

Mathematik II (für Informatiker, ET und IK)

Sommersemester 2014

10. Übung: Integralrechnung im \mathbb{R}^n

Aufgabe 1

a) Skizzieren Sie den Bereich

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0 \text{ und } x + y \leq 1\}.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_G xy(1-x) \, dx \, dy.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Schwerpunkt und das Volumen des homogenen Körpers, der durch die Flächen

$$z + x + y = a \ (a > 0), \quad z = 0, \quad x = 0, \quad y = 0$$

begrenzt wird.

Aufgabe 3

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve mit Parametrisierung

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} a \cos^3 t \\ a \sin^3 t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Hierbei ist $a > 0$ zu wählen. (Anm.: Es handelt sich um den Viertelbogen einer Astroide.)

(b) Berechnen Sie das Integral der Funktion $\vec{F}(x, y) = [0, y]^T$ längs des Astroidenbogens aus Aufgabe (a) auf direktem Wege.

(c) Bestätigen Sie mit der Integrabilitätsbedingung, dass es sich bei \vec{F} um ein Potentialfeld handelt und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential (d. h. eine Stammfunktion).

(d) Bestimmen Sie das Integral aus Teil (b) mit diesen Erkenntnissen erneut.

(e) Was ist der Wert des entsprechenden Arbeitsintegrals $\int \vec{F}(\vec{x}) \, d\vec{x}$ längs der geradlinigen Verbindung vom Anfangs- zum Endpunkt des Astroidenbogens?