

Mathematik II (für Informatiker, ET und IK)

Sommersemester 2014

8. Übung: totales Differential und vektorwertige Funktionen

Aufgabe 1

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen das totale Differential:

a) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

b) $f(x, y, z) = xe^{x^2+y^2+z^2}$

Aufgabe 2

In einem Experiment wird aus einer Messung von Spannung U und Stromstärke I ein Widerstand mit dem Ohmschen Gesetz $R = \frac{U}{I}$ berechnet. Wie hängt der relative Fehler des Widerstands mit den relativen Fehlern von Spannung und Stromstärke zusammen?

Aufgabe 3

Von einem geraden Kegelstumpf hat man die Radien der Grundkreise mit $r_1 = (30 \pm 1) \text{ mm}$, $r_2 = (60 \pm 1) \text{ mm}$ sowie die Höhe mit $h = (50 \pm 0, 2) \text{ mm}$ gemessen.

Bestimmen Sie den absoluten und den relativen Fehler bei der Berechnung des Kegelstumpfvolumens nach der Formel

$$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Aufgabe 4

Um wieviel Prozent kann das errechnete Volumen eines geraden Kreiszylinders fehlerhaft sein, wenn der Radius mit $1/3\%$ und die Höhe mit $1/2\%$ fehlerhaft gemessen werden?

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Ableitungen (Jacobi-Matrizen) folgender Funktionen:

(a) $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{f}(x, y, z) = \begin{bmatrix} y^2 \\ ze^{3xy} \end{bmatrix}$,

(b) $\vec{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{g}(x, y) = \begin{bmatrix} x \sin y \\ y \sin x \\ \sin x \cos y \end{bmatrix}$,

(c) $\vec{h}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{h}(r, \phi) = \begin{bmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{bmatrix}$,

(d) $\vec{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}$.

Haben Sie eine Vorstellung, was die Funktion γ in (d) beschreibt?

Aufgabe 6

Gegeben seien

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ t^3 \end{bmatrix}, \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 \sin x_2.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Komposition $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h := f \circ g$ mit Hilfe der Kettenregel.