TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 6. Juni 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst

Dipl.-Math. Ingolf Busch
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Dr. Roman Unger
Dipl.-Math. oec. Jan Blechschmidt

Mathematik II (für Informatiker, ET und IK)

Sommersemester 2014

7. Übung: Differentialrechnung in mehreren Variablen

Aufgabe 1

Ermitteln Sie jeweils sämtliche ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

(a) $f(x,y) = 4 + x^3 + 3x^2y^3 + y^3$ (b) $f(x,y) = x\sin(2x+y)$ (c) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$

(d) $f(x,y) = x^y$ (e) $f(x,y) = xe^{y/x}$ (f) $f(x,y) = x^2 + e^x y + e^y x^2 - 3x\ln y$

Aufgabe 2

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 2x^2 + y^2$.

(a) Zeichnen Sie eine Karte (Höhenlinienbild) der Funktion.

(b) Vergewissern Sie sich, dass der Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})^\top$ auf dem Graphen von f liegt.

(c) Bestimmen Sie im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ den Gradienten und die Gleichung der Tangentialebene.

(d) Bestimmen Sie im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ die Ableitung in Richtung $a = (1,0)^\top$. In welcher Richtung besitzt die Tangentialebene den steilsten Anstieg, und wie kann man diesen berechnen?

(e) Finden Sie einen Richtungsvektor , dessen Richtungsableitung in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$ $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ist.

Aufgabe 3

Gegeben seien zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl c. Zeigen Sie dass

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x,t) := f(x+ct) + g(x-ct)$$

die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

(a) $f(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{a}\|^2$

(b) $f(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{a}\|^\alpha$ für $\alpha > 0$

(c) $f(\vec{x}) = \ln \|\vec{x} - \vec{a}\|$

mit $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und einem festen $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.