TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 26. Mai 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst

Dipl.-Math. Ingolf Busch Dr. Roman Unger
Dipl.-Math. Björn Sprungk Dipl.-Math. oec. Jan Blechschmidt

Mathematik II (für Informatiker, ET und IK)

Sommersemester 2014

6. Übung: Vektorfolgen und Stetigkeit

Aufgabe 1

Gegeben seien die Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrizen S^2 und S^3 und stellen Sie damit C als ein Polynom von S dar.

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und damit die Eigenwerte von S. Welche Eigenwerte besitzt C?

(c) Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl ω mit $\omega^4 = 1$ der Vektor $\vec{v} = (1, \omega, \omega^2, \omega^3)^\top$ ein Eigenvektor von S ist. Welche Eigenvektoren besitzt dann C?

Aufgabe 2

Konvergieren die folgenden Vektorfolgen für $n \to \infty$? Wenn ja, wie lautet jeweils der Grenzwert?

$$\vec{a}^{(n)} = \left(\frac{1}{n!}, \sqrt{n^2-1} - n\right)^\top, \qquad \vec{b}^{(n)} = \left(2^n, \frac{1}{n}, 1\right)^\top,$$
$$\vec{c}^{(n)} = \left(\frac{\sin(n)}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^\top, \qquad \vec{d}^{(n)} = \left(\frac{2n-1}{n+1}, \frac{n+5}{n-1}\right)^\top.$$

Aufgabe 3

(a) Konvergiert die Vektorfolge für $n \to \infty$

$$\vec{d}^{(n+2)} = \vec{d}^{(n+1)} \times \vec{d}^{(n)}, \quad \vec{d}^{(1)} = e_1, \quad \vec{d}^{(2)} = e_2?$$

(b) Wie verhält sich die Vektorfolge, wenn man $\vec{d}^{(2)} = 0.5e_2$ setzt?

Aufgabe 4

Gegeben sei die Vektorfolge

$$\vec{a}^{(n+1)} = P\vec{a}^{(n)}, \quad \vec{a}^{(1)} = (-1,1)^\top, \quad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von P und geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren an.

(b) Stellen Sie $\vec{a}^{(1)}$ bzgl. dieser Basis dar.

(c) Was bewirkt eine Multiplikation von $\vec{a}^{(1)}$ mit P? Was bedeutet das für die Konvergenz und den Grenzwert der Vektorfolge?

(d) Wie verhält sich die Vektorfolge, wenn $\vec{a}^{(1)} = (1,2)^\top$ gewählt wird?

Aufgabe 5

Veranschaulichen Sie die folgenden Funktionen:

$$a)\ f(x,y) = 4 - x^2 - y^2, \quad b)\ f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Geben Sie zusätzlich jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie den maximalen Wertebereich an.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) \text{ und } \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) \text{, aber nicht } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

für die Funktionen

$$a)\ f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}, \quad b)\ f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

jeweils existieren.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{für } x^4+y^2>0, \\ 0 & \text{für } x^4+y^2=0, \end{cases}$$

in $(0,0)$ stetig längs jeder Halbgeraden $\vec{x} = (t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)^T$, mit $t \geq 0,\ \alpha \in [0,2\pi)$ fest, ist, jedoch bezüglich ihres ganzen Definitionsbereiches in $(0,0)$ nicht stetig sein kann.