TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 6. Mai 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst

Dipl.-Math. Ingolf Busch Dr. Roman Unger
Dipl.-Math. Björn Sprungk Dipl.-Math. oec. Jan Blechschmidt

Mathematik II (für Informatiker, ET und IK)

Sommersemester 2014

5. Übung: Orthogonale Abbildungen und Eigenwerte

Aufgabe 1

(a) Wie lautet die Abbildungsmatrix für eine Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an einer Geraden durch den Ursprung mit Anstiegswinkel $\alpha = 60°$? Was ist das Bild des Vektors $[1, -2]^\top$ unter dieser Spiegelung?

(b) Wie lautet die Abbildungsmatrix einer solchen Spiegelung mit beliebigem Winkel $\alpha \in [0, \pi)$? (Hinweis: mit Hilfe von Additionstheoremen erhält man eine besonders schöne Form.)

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier orthogonaler Matrizen wieder eine orthogonale Matrix ist.

(b) Bestimmen Sie alle orthogonalen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & x \\ y & z \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad B = \begin{pmatrix} x & \frac{7}{25} \\ y & z \end{pmatrix}.$$

(c) Stellen Sie eine orthogonale und symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ auf, die $\frac{1}{3}(x, 2, 2)$ mit $x \in \mathbb{R}$ als 1. Zeile enthält.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen und vergleichen Sie!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die charakteristischen Polynome, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen. Geben Sie auch die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der einzelnen Eigenwerte an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$