TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 8. April 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst

Dipl.-Math. Ingolf Busch Dr. Roman Unger
Dipl.-Math. Björn Sprungk Dipl.-Math. oec. Jan Blechschmidt

Mathematik II (für Informatiker, ET und IK)

Sommersemester 2014

3. Übung: Determinanten und inverse Matrizen

Aufgabe 1

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Welche Vektoren werden auf den Nullvektor abgebildet?

(b) Gibt es einen Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$, dessen Bild $\vec{b} = (2, 2, 2)^\top$ ist?

(c) Gibt es zwei verschiedene Vektoren, die das gleiche Bild haben?

(d) Welche Dimension hat der Bildraum von f?

Aufgabe 2

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3i & -4 \\ 4 & -3i \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1-i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix} \quad I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & n \end{pmatrix} \quad M_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 & 4 \\ -4 & 5-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen $A, \cdots, K$ und $L_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Berücksichtigen Sie dazu unterschiedliche Möglichkeiten!

(b) Berechnen sie die Determinante von $M_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in Abhängigkeit von n.

(c) Für welche λ gilt $\det N = 0$?

(d) Begründen Sie $\det F = 0$ ohne die Determinante zu berechnen.

(e) Berechnen Sie, falls möglich die inversen Matrizen zu A, B, D, F, G, J

(f) Berechnen Sie die inverse Matrix von K.

(g) Was bewirkt die Matrix-Vektor Multiplikation $M\vec{x}$? Was bedeutet das für die Matrix-Vektor Multiplikation $M^2\vec{x}$ und damit die Matrix M^2? Kann man damit eine inverse Matrix zu M angeben? (Hinweis: Man kann zunächst das Problem für kleine n lösen)

(h) Wie lautet die inverse Matrix von L?