**TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik** 28. März 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst

Dipl.-Math. Ingolf Busch Dr. Roman Unger
Dipl.-Math. Björn Sprungk Dipl.-Math. oec. Jan Blechschmidt

# Mathematik II (für Informatiker, ET und IK)

Sommersemester 2014

## 1. Übung: Vektorräume und Matrizen

### Aufgabe 1

Es seien die Elemente $a = (2, 1, 0)^\top$ und $b = (1, 2, 0)^\top$ gegeben.

(a) Man zeige, dass $a$ und $b$ linear unabhängige Elemente des $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Man ergänze $\{a, b\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

(c) Man bestimme alle $c \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $\{a, b, c\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

### Aufgabe 2

Sind die folgenden Vektoren linear abhängig oder unabhängig?

(a) drei beliebige Vektoren des $\mathbb{R}^2$,

(b) $x = (2, 0, -1)^\top,\ y = (1, 1, 1)^\top,\ z = (1, 3, t)^\top$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$,

(c) $x = (1, 1, 1, 1)^\top,\ y = (1, -1, -1, 1)^\top,\ z = (1, -1, 1, -1)^\top,$
$u = (1, 1, -1, t)^\top$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

### Aufgabe 3

Die Vektoren $x, y, z$ seien linear unabhängig.

(a) Sind die Vektoren $x - y,\ y - z,\ z - x$ linear abhängig oder unabhängig?

(b) Sind die Vektoren $x + y,\ y + z,\ z + x$ linear abhängig oder unabhängig?

### Aufgabe 4

$\Pi_2$ sei der Raum aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich $2$. Die Addition zweier Poloynome ist definiert durch $(p_1 + p_2)(t) := p_1(t) + p_2(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$. Die Multiplikation eines Polynoms mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist durch $(\lambda p)(t) := \lambda p(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$ definiert.

(a) Überzeugen Sie sich, dass man mit diesen Operationen einen Vektorraum erhält.

(b) Man gebe eine Basis in diesem Raum an! Welche Dimension hat dieser Raum?

(c) Ist $U = \{p \in \Pi_2 : p(0) = p(1) = 0\}$ ein Unterraum von $\Pi_2$?

(d) Sind die Polynome $1 - t^2, t - t^2, 2 - t - t^2$ linear unabhängig?

**Aufgabe 5**

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear ist, und geben Sie deren Abbildungsmatrix an:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y + z.$$

(b) Geben Sie die Abbildungsmatrix der folgenden linearen Abbildung an:

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \\ 2y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6**

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad G = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -6 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie (falls definiert):
$A + B,\ B - 3A,\ A \cdot C,\ A^\top \cdot B,\ C \cdot A,\ E \cdot F,\ F \cdot E,\ F \cdot C,$
$(A \cdot C) \cdot F,\ A \cdot (C \cdot F),\ D^3,\ H^2$.

(b) Welche weiteren Matrizenprodukte von zwei dieser Matrizen sind möglich? (ohne Transponieren)

(c) Für welche Matrizen $X$ gilt $X \cdot H = H \cdot X$?

(d) $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$ sei die $i$-te Spalte der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Was sind die Ergebnisse der Produkte $e_i^\top \cdot Y$, $Y \cdot e_j$ und $e_i^\top \cdot Y \cdot e_j$.