Mathematik II

(für Informatiker, ET und IK)

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Sommersemester 2014

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Inhalt

Inhalt

Orthogonale Abbildungen

Eine große Klasse linearer Abbildungen sind die orthogonalen Abbildungen.

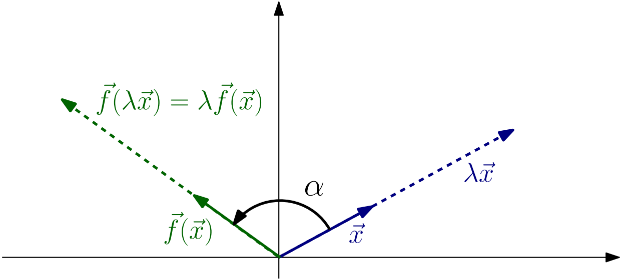
Sie spielen insbesondere bei geometrischen Transformationen eine Rolle und zeichnen sich durch die Eigenschaft aus, Längen und Winkel unverändert zu lassen.

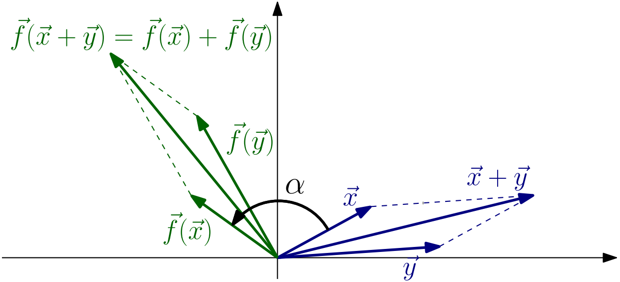
So lassen sich zum Beispiel Drehungen und Spiegelungen mit orthogonalen Abbildungen mathematisch beschreiben.

Drehungen des $\mathbb{R}^2$ um einen Winkel α und Mittelpunkt in $\vec{0}$ sind zunächst <u>lineare</u> Abbildungen, wie an folgenden Skizzen deutlich wird:

Orthogonale Abbildungen

Drehung als lineare Abbildung





Zeichnen Sie eine analoge Skizze für Spiegelung des $\mathbb{R}^2$ an einer Geraden durch $\vec{0}$.

Natürlich lässt sich dieses geometrische Argument analog auf Drehungen und auf Spiegelungen an Ebenen im $\mathbb{R}^3$ anwenden.

Sowohl Drehungen um den Ursprung als auch Spiegelungen an einer Geraden (Ebene) durch den Ursprung können also als Matrix-Vektor-Multiplikationen beschrieben werden.

Wir begeben uns auf die Suche nach den Abbildungsmatrizen zu diesen Abbildungen.

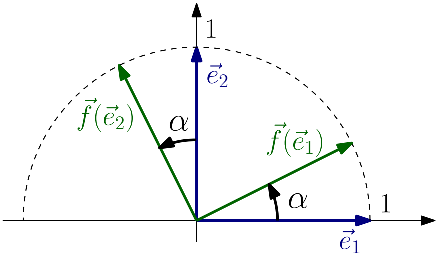
Die Spalten der gesuchten Abbildungsmatrix sind gerade die Bilder der Einheitsvektoren unter der Drehung.

Es gilt

$$\vec{f}(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

und

$$\vec{f}(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}.$$



Damit ist die gesuchte Abbildungsmatrix

$$D_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Die Matrix D_α ist invertierbar, denn

$$\det D_\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Ihre Inverse realisiert gerade die Drehung um $-\alpha$, d. h.

$$D_\alpha^{-1} = D_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Für D_α gilt also die bemerkenswerte Beziehung

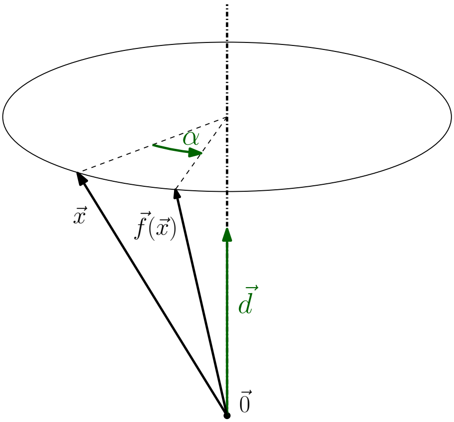
$$D_\alpha^{-1} = D_\alpha^T.$$

Berechnen Sie Drehmatrix für eine Drehung um den Ursprung mit $\alpha = 30°$. Geben Sie das Bild des Vektors $[2, 3]^T$ an.

Wiederholen Sie bei Bedarf die Begriffe Inverse, Invertierbarkeit und Determinante aus Kap. 7.4 und 7.5.

Drehungen im $\mathbb{R}^3$ werden durch eine Drehachse (die den Ursprung enthält) und einen Drehwinkel α festgelegt.

Die Drehachse wird dabei durch einen Vektor $\vec{d}$ festgelegt, der in die positive Achsenrichtung zeigt.



Besonders einfach wird die Angabe der Drehmatrizen, wenn man die Einheitsvektoren (also die Koordinatenachsen) als Drehachsen verwendet:

$$D_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad D_{y,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

$$D_{z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jede beliebige Drehung im $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Komposition von Drehungen um die Koordinatenachsen schreiben.

Physiker sprechen daher häufig von drei möglichen Freiheitsgraden der Rotation.

Machen Sie sich an einem der obigen Beispiele klar, dass die angegebene Matrix die gewünschte Transformation realisiert. Berechnen Sie dazu das Produkt $D\vec{x}$ für die gewählte Drehmatrix D.

Natürlich kann man auch im allgemeinen Fall die Drehmatrix angeben. Bei vorgegebenem Achsvektor $\vec{d}$ (mit $\|\vec{d}\| = 1$) und Winkel α lautet diese

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha + (1-\cos\alpha)d_1^2 & (1-\cos\alpha)d_1d_2 - d_3\sin\alpha & (1-\cos\alpha)d_1d_3 + d_2\sin\alpha \\ (1-\cos\alpha)d_1d_2 + d_3\sin\alpha & \cos\alpha + (1-\cos\alpha)d_2^2 & (1-\cos\alpha)d_2d_3 - d_1\sin\alpha \\ (1-\cos\alpha)d_1d_3 - d_2\sin\alpha & (1-\cos\alpha)d_2d_3 + d_1\sin\alpha & \cos\alpha + (1-\cos\alpha)d_3^2 \end{bmatrix}$$

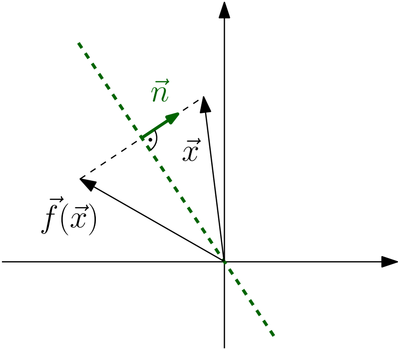
Eine explizite Abbildungsvorschrift ist gegeben durch

$$\vec{f}(\vec{x}) = \cos\alpha\,\vec{x} + (1-\cos\alpha)(\vec{x}^T\vec{d})\,\vec{d} + \sin(\alpha)(\vec{d}\times\vec{x}).$$

Dies alles schaut man bei Bedarf aber am besten in der Literatur nach.

Wir betrachten zunächst Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$ an einer Geraden durch $\vec{0}$ senkrecht zum Vektor $\vec{n}$. Dabei sei $\vec{n}$ auf Länge 1 normiert ($\|\vec{n}\| = 1$).

Wir lesen das Spiegelbild $\vec{f}(x)$ von $\vec{x}$ aus folgender Skizze ab:



$$\vec{f}(x) = \vec{x} - 2(\vec{n}^T\vec{x})\vec{n}$$

Beachten Sie dabei, dass wegen der Normierung von $\vec{n}$ die Länge der Projektion von $\vec{x}$ auf $\vec{n}$ gerade $\vec{n}^T\vec{x}$ ist.

Es gilt also

$$\begin{aligned}\vec{f}(x) &= \vec{x} - 2(\vec{n}^T\vec{x})\vec{n}\\ &= \vec{x} - 2\vec{n}(\vec{n}^T\vec{x})\\ &= \vec{x} - 2(\vec{n}\vec{n}^T)\vec{x},\end{aligned}$$

d. h. die Spiegelung wird durch Multiplikation mit der Matrix

$$S_{\vec{n}} = I - 2\vec{n}\vec{n}^T = \begin{bmatrix} 1-2n_1^2 & -2n_1n_2 \\ -2n_1n_2 & 1-2n_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_2^2-n_1^2 & -2n_1n_2 \\ -2n_1n_2 & n_1^2-n_2^2 \end{bmatrix}$$

beschrieben (beachte $n_1^2 + n_2^2 = 1$).

Geben Sie die Spiegelungsmatrix für die Spiegelung an der Geraden $x_2 = -x_1$ an. Multiplizieren Sie diese Matrix mit einem Vektor $\vec{x}$. Kann man das Ergebnis auch rein geometrisch begründen?

Bei Spiegelungen im $\mathbb{R}^3$ verwendet man statt der Spiegelachse eine Spiegelebene durch den Ursprung, welche ganz analog durch den Normalenvektor $\vec{n}$ festgelegt ist ($\|\vec{n}\| = 1$).

Die Spiegelungsmatrix besitzt jetzt drei Zeilen und Spalten, allerdings die gleiche Struktur:

$$S_{\vec{n}} = I - 2\vec{n}\vec{n}^T.$$

Zeichnen Sie eine geeignete Skizze, in welcher die Analogie sichtbar wird. Wie lautet die Matrix $S_{\vec{n}}$ in ausgeschriebener Form?

Drehungen und Spiegelungen gehören zur Klasse der orthogonalen linearen Abbildungen, die sich auch für höhere Dimensionen erklären lassen:

Definition 8.1

Eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal, wenn sie das Innenprodukt nicht verändert, d. h. wenn

$$(U\boldsymbol{y})^T(U\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} \qquad \text{für alle } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere ist eine orthogonale Matrix

- längenerhaltend, d. h. $\|U\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ für alle $\boldsymbol{x}$ und
- winkeltreu , d. h. $\measuredangle(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = \measuredangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

Satz 8.2 (Charakterisierung orthogonaler Matrizen)

Sei $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- *U ist orthogonal.*
- *Die Spalten (Zeilen) von U bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.*
- *U ist invertierbar mit $U^{-1} = U^T$.*

Machen Sie sich klar, warum aus Punkt 1 Punkt 2 und daraus wiederum Punkt 3 folgt.

Bestätigen Sie mit Punkt 3, dass die 2D-Spiegelungsmatrix $S = I - 2\vec{n}\vec{n}^T$ orthogonal ist.

Die Entsprechung zu orthogonalen Matrizen im $\mathbb{C}^n$ sind unitäre Matrizen. Auch hier verwendet man das unveränderte Skalarprodukt zur Definition.

Dabei muss natürlich statt $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}$ immer das komplexe Skalarprodukt $\boldsymbol{y}^H\boldsymbol{x}$ verwendet werden.

Die Aussagen von Satz 8.2 gelten dann analog – die Beziehung im letzten Punkt lautet dabei

$$U^{-1} = U^H.$$

Unitäre Abbildungen werden Ihnen möglicherweise in der Quantenmechanik begegnen.

Inhalt

Wir betrachten ein Flugzeug, das auf einer holprigen Piste landet.

Modell des Flugzeugs:

- drei Massen: m_1 (Rumpf und Motor); m_2, m_3 (Flügel),
- drei Steifigkeiten (k_1, k_2, k_3) für die „federnde“ Verbindung der Teile.

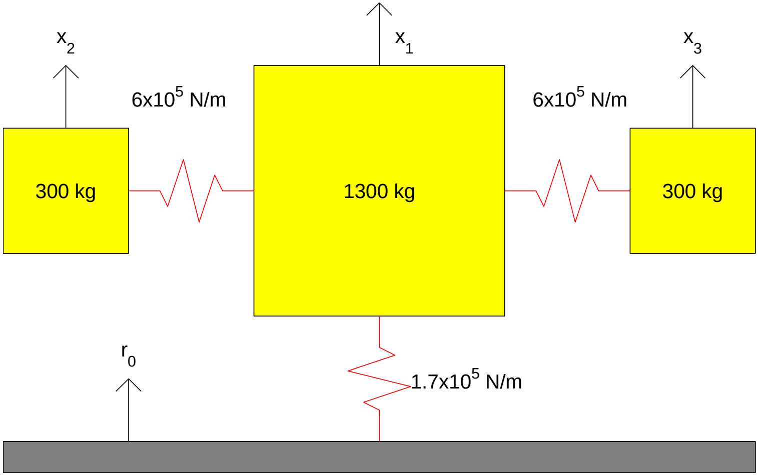
Die Piste wird durch eine Sinuskurve

$$r(t) = r_0 \sin(\omega_0 t)$$

modelliert. Der Rumpf ist dann einer externen Kraft

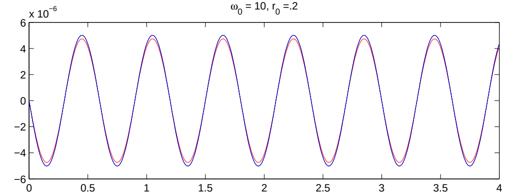
$$f_1(t) = k_1 r_0 \sin(\omega_0 t)$$

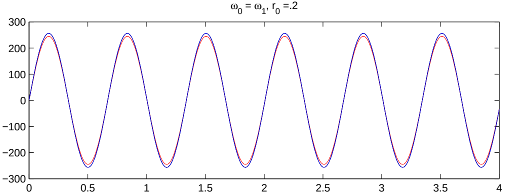
ausgesetzt. Die Frequenz ω_0 hängt von der Landungsgeschwindigkeit v ab.



x2
x1
x3
6x10^5 N/m
6x10^5 N/m
300 kg
1300 kg
300 kg
r0
1.7x10^5 N/m

Die mathematische Analyse des Beispiels wird erst am Ende des Semesters gelingen. Wir zeigen hier aber schon die Lösungen $x_{1,2,3}(t)$ [in m] über t [in s] für $v = 120\,$km/h und $v = 108\,$km/h:





Beachten Sie, dass sich die Amplituden bei den verschiedenen Landungsgeschwindigkeiten um 7 Größenordnungen(!!!) unterscheiden.

Im zweiten Fall tritt ein Resonanzphänomen auf: Wenn die Anregungsfrequenz ω_0 (nahezu) mit einer der Eigenfrequenzen $\omega_{1,2,3}$ des Flugzeugs übereinstimmt, kommt es zu gefährlich großen Oszillationen.

Die Nichtbeachtung von Eigenfrequenzen und Resonanz kann z. B. bei Brücken oder Hochhäusern katastrophale Auswirkungen haben:

Tacoma Narrows Bridge (WA, 1940).
Bild: Prelinger Archives

Weitere Beispiele:

Broughton suspension bridge, Manchester 1831;
Millennium footbridge, London 2000.

Um z.B. Resonanzphänomene zu analysieren, benötigt man die folgenden Begriffe:

Definition 8.3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (oder $\mathbb{C}^{n \times n}$). Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, gibt, so dass

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}. \tag{8.1}$$

Jeder Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, der (8.1) erfüllt, heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Achtung: Auch wenn wir nur reelle Matrizen betrachten: bei Eigenwerten und Eigenvektoren lässt man immer auch komplexe Zahlen zu!

Die Richtung eines Eigenvektors wird durch die lineare Abbildung A nicht verändert – der Eigenvektor wird lediglich gestreckt.

Das rechte Bild entsteht z. B. aus dem linken durch eine „Scherung" der Leinwand.

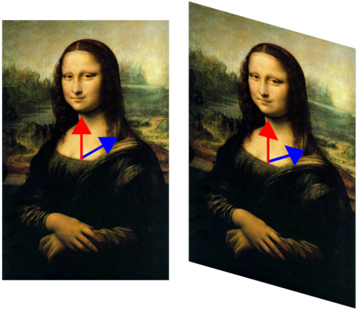


Bild: Wikimedia Commons

Der rote Vektor bleibt unverändert und ist damit ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Der blaue Vektor ändert hingegen seine Richtung und ist daher kein Eigenvektor der Scherungsabbildung.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Welche reellen Eigenwerte besitzt eine Drehung im Raum um die x_1-Achse, und welcher reelle Eigenvektor kommt in Frage?

Wie verhält es sich mit einer Spiegelung in der Ebene an einer Geraden durch 0 und senkrecht zu $\vec{n}$?

Argumentieren Sie rein geometrisch!

Bestätigen Sie, dass $\lambda = 1$ Eigenwert von $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ mit zugehörigem Eigenvektor $\boldsymbol{v} = [2, 1]^T$ ist.

Zeigen Sie, dass jedes komplexe Vielfache des Vektors $[1, i]^T$ ein Eigenvektor von $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda = i$ ist.

Formulieren Sie eine allgemeingültige Aussage und bestätigen Sie diese durch Einsetzen in (8.1).

Anmerkung: Bislang wissen wir weder, wie man EW und EV berechnet, noch ob in den Beispielen alle EW und EV erfasst wurden.

Wir benutzen zur Herleitung der Formel für die Eigenwertberechnung folgende Äquivalenzkette:

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- $\Leftrightarrow$ Es gibt einen Vektor $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ mit $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$.
- $\Leftrightarrow$ Ein Vektor $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ löst das homogene LGS $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.
- $\Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda I) = 0$.

Die Eigenwerte sind also gerade die Nullstellen der Funktion

$$c_A(\lambda) := \det(A - \lambda I).$$

Diese Funktion ist ein Polynom vom Grad n und wird das charakteristische Polynom von A genannt.

Satz 8.4

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist das charakteristische Polynom $c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ein Polynom vom exakten Grad n mit reellen Koeffizienten und Höchstkoeffizienten 1 oder -1.

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von c_A, also die Lösungen der Gleichung

$$c_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0. \tag{8.2}$$

Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(vgl. 2. und 3. Kasten auf S. 167).

Sei λ Eigenwert der Matrix A. Die zugehörigen Eigenvektoren von A sind die (nicht-trivialen) Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}. \tag{8.3}$$

Zusammen mit $\mathbf{0}$ bilden sie einen Unterraum des $\mathbb{C}^n$, den sogenannten Eigenraum von A zum Eigenwert λ,

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A, \lambda) &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \,:\, A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\} \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \,:\, (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} \\ &= \mathscr{N}(A - \lambda I) \end{aligned}$$

Berechnen Sie sämtliche Eigenvektoren zu den Eigenwerten der Matrizen A und B von Seite 169.

Definition 8.5

Die algebraische Vielfachheit $\nu_{\text{alg}}(\lambda)$ eines Eigenwerts λ von A ist seine Vielfachheit als Nullstelle des charakteristischen Polynoms c_A von A.

Die geometrische Vielfachheit $\nu_{\text{geom}}(\lambda)$ eines Eigenwerts λ von A ist die Dimension des zugehörigen Eigenraums $\dim(\text{Eig}(A, \lambda))$.

Anmerkung zur Berechnung Um die algebraischen Vielfachheiten zu bestimmen, muss man nur das charakteristische Polynom c_A kennen. Um die geometrische Vielfachheiten zu berechnen, reicht die Kenntnis von c_A allein nicht aus.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra summieren sich die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zu n.

Die Summe der geometrischen Vielfachheiten kann dagegen kleiner sein. Es gilt folgender Satz:

Satz 8.6

Sei λ Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit algebraischer Vielfachheit $\nu_{\mathsf{alg}}(\lambda)$ und geometrischer Vielfachheit $\nu_{\mathsf{geom}}(\lambda)$. Dann gilt:

$$1 \le \nu_{\mathsf{geom}}(\lambda) \le \nu_{\mathsf{alg}}(\lambda) \le n.$$

Machen Sie sich am Beispiel der Matrix $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ klar, dass die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts tatsächlich kleiner sein kann als die algebraische.

Beim Beispiel im Kasten auf S. 172 handelt es sich um einen sogenannten Jordan-Block, d. h. eine Matrix der Form

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Dieser besitzt nur den Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 1 und algebraischer Vielfachheit n.

Bestätigen Sie diese Aussagen. Für die geometrische Vielfachheit nutzen Sie am besten die Beziehung

$$\nu_{\mathsf{geom}}(\lambda) = \dim(\mathsf{Eig}(A,\lambda)) = n - \mathsf{rang}(A - \lambda I).$$

Das charakteristische Polynom einer reellen 2×2-Matrix A besitzt die Struktur

$$c_A(x) = x^2 + px + q \qquad \text{(mit } p, q \in \mathbb{R}\text{)}.$$

In Kombination mit Satz 8.6 ergeben sich verschiedene Möglichkeiten für die Eigenwerte. Es existieren

- entweder zwei verschiedene reelle Eigenwerte λ_1 und λ_2, die geometrische und algebraische Vielfachheit 1 haben. Zu jedem Eigenwert gibt es reelle Eigenvektoren.
- oder zwei verschiedene konjugiert-komplexe Eigenwerte λ_1 und λ_2, die geometrische und algebraische Vielfachheit 1 haben. Zu jedem Eigenwert gibt es komplexe Eigenvektoren.

(b. w.)

- oder nur einen Eigenwert λ, der dann zwangsläufig reell ist.
  Er besitzt die algebraische Vielfachheit 2 und
  - entweder die geometrische Vielfachheit 2, d. h. jeder Vektor aus $\mathbb{C}^2$ ist Eigenvektor. A besitzt dann die Form

$$A = \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

  - oder die geometrische Vielfachheit 1.

Ordnen Sie die Beispiele von S. 169 und S. 172 den entsprechenden Fällen zu.

Führen Sie eine ähnliche Analyse für den 3×3-Fall durch. (Auf die Unterscheidung zwischen reellen und komplexen Eigenwerten können Sie dabei verzichten.)

Wir widmen uns nun der Frage, wie groß die Dimension des von den Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aufgespannten Unterraums ist.

Insbesondere wollen wir wissen, wann es eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A gibt.

Wir beginnen mit folgendem Satz:

Satz 8.7

Gehören die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ zu ***verschiedenen*** *Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ der $n \times n$-Matrix A, dann sind sie linear unabhängig.*

Machen Sie sich dies zumindest für den Fall $r = 2$ klar.

Wenn es n verschiedene Eigenwerte zur Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, existiert also eine Basis des $\mathbb{C}^n$, die nur aus Eigenvektoren von A besteht.

Allgemeiner gilt sogar:

Satz 8.8

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es existiert genau dann eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A, wenn die geometrische und algebraische Vielfachheit für jeden Eigenwert von A übereinstimmen.

Die Matrix $A = \left[\begin{smallmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 7$ mit den Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1 = [2, 1]^T$ und $\boldsymbol{v}_2 = [-4, 1]^T$ (vgl. S. 169 f.). Sie bilden eine Basis des $\mathbb{C}^2$ (und in diesem Falle auch eine Basis des $\mathbb{R}^2$).

Satz 8.9

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gelten:

- *A und A^T besitzen dasselbe charakteristische Polynom, also dieselben Eigenwerte (mit i. A. verschiedenen Eigenräumen).*
- *Besitzt A den Eigenvektor $\boldsymbol{x}$ zum Eigenwert λ, dann besitzen*

$$\alpha A,\ A^m,\ A + \beta I_n,\ p(A) = \alpha_m A^m + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$$

denselben Eigenvektor $\boldsymbol{x}$, allerdings zum Eigenwert

$$\alpha\lambda,\ \lambda^m,\ \lambda + \beta,\ p(\lambda) = \alpha_m \lambda^m + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0.$$

- *A ist genau dann invertierbar, wenn alle Eigenwerte von A von 0 verschieden sind. Ist dann λ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\boldsymbol{x}$, so ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} mit demselben Eigenvektor $\boldsymbol{x}$.*

Verifizieren Sie einige dieser Aussagen.

Weiterhin kann man Eigenwerte sehr einfach bestimmen, wenn A bestimmte strukturelle Eigenschaften besitzt:

Satz 8.10

Ist A eine (untere oder obere) Dreiecksmatrix, so sind die Hauptdiagonaleinträge von A genau die Eigenwerte von A.

Dies trifft insbesondere dann zu, wenn A eine Diagonalmatrix ist. In diesem Fall sind die Einheitsvektoren zugehörige Eigenvektoren.

Erinnerung/Bemerkung: Eine Diagonalmatrix enthält nur auf der Hauptdiagonalen Einträge ungleich Null. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Einträge entlang der Diagonalen, so schreibt man $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Bei Dreiecksmatrizen sind alle Elemente ober- bzw. unterhalb der Hauptdiagonalen gleich Null.

Definition 8.11

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt, so dass

$$A = V^{-1}BV. \tag{8.4}$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn A ähnlich zu einer Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist, d. h. wenn es eine invertierbare Matrix $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt mit

$$D = V^{-1}AV.$$

Bemerkung: Gleichung (8.4) ist äquivalent zu

$$VA = BV \quad \text{und} \quad B = VAV^{-1}.$$

Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} c_{V^{-1}BV}(\lambda) &= \det(V^{-1}BV - \lambda I) \\ &= \det(V^{-1}(B - \lambda I)V) \\ &= (\det V)^{-1} \det(B - \lambda I) \det V \\ &= c_B(\lambda). \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

Satz 8.12

Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom und damit die gleichen Eigenwerte.

Die Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ sind dabei allerdings verschieden: $\vec{x}$ ist genau dann Eigenvektor von $A = V^{-1}BV$, wenn
$V\boldsymbol{x}$ Eigenvektor von B ist.

Um den Ähnlichkeitsbegriff vollständig zu verstehen, muss man sich mit Basistransformationen auseinandersetzen. Wir gehen dabei von der Darstellung $B = VAV^{-1}$ von S. 180 aus.

Zu einem gegebenen Vektor $\boldsymbol{x}$ lässt sich $V\boldsymbol{x}$ als Linearkombination der Spalten $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ von V schreiben:

$$V\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{v}_n.$$

Fasst man $\vec{x}$ als Koordinatenvektor bezüglich der Basis $\mathscr{B}_V = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ auf, so ist $V\boldsymbol{x}$ gerade der zugehörige Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis.

Man sagt daher auch, V stellt eine Basistransformation von der Basis $\mathscr{B}_V$ in die Standardbasis dar.

Die Abbildung V^{-1} macht die Transformation rückgängig und stellt somit eine Basistransformation von der Standardbasis nach $\mathscr{B}_V$ dar.

Verifizieren Sie beide Aussagen am Beispiel der Basis $\mathscr{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right], \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right]\}$ und des Vektors $\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\end{bmatrix} = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]_{\mathscr{B}}$.

In $B\boldsymbol{x} = VAV^{-1}\boldsymbol{x}$ kann man die rechte Seite nun von rechts nach links wie folgt lesen:

- Stelle $\boldsymbol{x}$ als Koo rdinatenvektor bezüglich der Basis $\mathscr{B}_V = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ dar (d. h. Multiplikation mit V^{-1}).
- Führe die durch B beschriebene lineare Abbildung in den Koordinaten bezüglich $\mathscr{B}_V$ aus (d. h. Multiplikation mit A).
- Transformiere das Ergebnis wieder zurück in die Standardkoordinaten (Multiplikation mit V).

Wir haben somit erkannt:

Satz 8.13

Ähnliche Matrizen stellen die gleiche lineare Abbildung bezüglich verschiedener Basen dar.

Folglich besitzen ähnliche Matrizen

- dieselbe Determinante,
- denselben Rang und
- denselben Defekt.

Auch die Aussage von Satz 8.12 wird mit dieser Erkenntnis noch ein Stück verständlicher.

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, für eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A existiert (vgl. Satz 8.8).

Dann kann die Abbildung A bezüglich dieser Basis nur durch Streckungen der Basisvektoren ausgedrückt werden (Multiplikation mit einer Diagonalmatrix).

Beispiel Die Matrix $A = \left[\begin{smallmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 7$ mit den Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1 = [2,1]^T$ und $\boldsymbol{v}_2 = [-4,1]^T$ (vgl. S. 169 f./177). Es gilt die Darstellung

$$A = VDV^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

In der Diagonalmatrix D stehen die Eigenwerte und in den Spalten von V die Eigenvektoren.

Die allgemeine Situation beschreibt folgender Satz:

Satz 8.14

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn die algebraische und geometrische Vielfachheit für jeden Eigenwert übereinstimmen.

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte und $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ zugeordnete Eigenvektoren, die eine Basis des $\mathbb{C}^n$ bilden, so gilt die Darstellung

$$A = VDV^{-1}.$$

Dabei gilt $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, und $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ sind in dieser Reihenfolge die Spalten von V.

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt symmetrisch, wenn $A = A^T$ gilt, d. h. die Einträge symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen.

Symmetrische Matrizen haben bemerkenswerte Eigenschaften:

Satz 8.15

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, so besitzt A nur reelle Eigenwerte. Es gibt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Es gibt also eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (d. h. $U^T = U^{-1}$), so dass

$$A = UDU^T.$$

Insbesondere ist A diagonalisierbar.

Für orthogonale Matrizen gibt es ein ähnliches Ergebnis. Beachten Sie aber, dass die Eigenwerte hier i. A. komplex sind!

Satz 8.16

Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, so besitzt A nur Eigenwerte mit Betrag 1. Es gibt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Es gibt also eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (d. h. $U^H = U^{-1}$), so dass

$$A = UDU^H.$$

Insbesondere ist A diagonalisierbar.

Bemerkung: Die Klasse der Matrizen, welche eine Basis aus orthonormalen Eigenvektoren besitzen, ist größer als die der symmetrischen (Hermiteschen) Matrizen. Genau trifft dies zu für normale Matrizen. Diese sind charakterisiert durch die Eigenschaft

$$AA^T = A^T A, \quad \text{bzw.} \quad AA^H = A^H A.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Geben Sie in beiden Fällen eine Darstellung der Form VDV^{-1} an. Erkennen Sie die Matrix B von S. 169 f. wieder?

Jede quadratische Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ besitzt die allgemeine Form

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$$

mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, einem Vektor $\boldsymbol{b}$ und einer Zahl $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel: $n = 2$

$$\phi(x_1, x_2) = a_{1,1}x_1^2 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,1}x_2x_1 + a_{2,2}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c$$

Die Aufgabe der Hauptachsentransformation besteht darin, durch einen geeigneten Basiswechsel im $\mathbb{R}^n$ die quadratische Funktion in eine einfache Form zu bringen, an der man leicht ihren Typ ablesen kann.

Dies ist auch hilfreich bei der Klassifikation von Quadriken (auch Kegelschnitte genannt), also den Punktmengen

$$Q = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \phi(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Da die Matrix A ohne Beschränkung der Allgemeinheit als symmetrisch angenommen werden kann besitzt diese eine Basis aus orthonormalen Eigenvektoren, d.h. eine orthogonale Matrix Q mit

$$Q^T A Q = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Für die neue Variable $\boldsymbol{y} := Q^T \boldsymbol{x}$ gilt dann $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$ und, mit dem neuen Vektor $\boldsymbol{d} := Q^T \boldsymbol{b}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c = (Q\boldsymbol{y})^T A (Q\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{b}^T (Q\boldsymbol{y}) + c \\
&= \boldsymbol{y}^T Q^T A Q \boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}^T Q \boldsymbol{y} + c = \boldsymbol{y}^T D \boldsymbol{y} + \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{y} + c \\
&= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 + \sum_{j=1}^n d_j y_j + c.
\end{aligned}$$

Als letzter Schritt folgt nun quadratisches Ergänzen in jeder Variablen y_j:

$$\lambda_j y_j^2 + d_j y_j = \lambda_j \left(y_j + \frac{d_j}{2\lambda_j} \right)^2 - \frac{d_j^2}{4\lambda_j}.$$

Mit einer weiteren Substitution $z_j = y_j + \frac{d_j}{2\lambda_j}$, $j = 1, \dots, n$ erhalten wir

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j^2 + d = \lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2 + d.$$

mit

$$d := c - \sum_{j=1}^n \frac{d_j^2}{4\lambda_j}.$$

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Selbststudium):

- über die Zusammenhänge zwischen Matrizen und linearen Abbildungen bescheidwissen,
- einfache geometrische Transformationen wie Drehungen und Spiegelungen mit Hilfe orthogonaler Matrizen beschreiben können,
- wissen, was orthogonale Matrizen charakterisiert,
- die Begriffe Eigenwert, Eigenvektor und Vielfachheit tiefgreifend verstanden haben,
- Eigenwerte und Eigenvektoren sicher berechnen können, ggf. auch unter Beachtung der Matrixstruktur,
- wissen, was es mit Basen von Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit auf sich hat.