TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 18. Dezember 2017
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Max Winkler, M. sc. Alexandra Bünger, Dipl.-Math. oec. Toni Kowalewitz,
M. sc. Robert Nasdala, Dipl.-Math. Michael Quellmalz

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2017/18

7. Übung: Orthogonalität, Skalarprodukt, Norm und analytische Geometrie

Aufgabe 1

(a) Berechnen Sie die Längen der Vektoren $\boldsymbol{a} = (3, 0, 4)^\top$, $\boldsymbol{b} = (7, 0, 1)^\top$ und $\boldsymbol{c} = (4, 4, -2)^\top$.

(b) Orthonormieren Sie die Vektoren aus (a).

(c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{x} = (3, 4, -1)^\top$ und $\boldsymbol{y} = (7, 5, 2)^\top$.

Aufgabe 2

(a) Man berechne für die Vektoren $\boldsymbol{a} = (1, 0, 0)^\top$, $\boldsymbol{b} = (0, 0, 1)^\top$, $\boldsymbol{c} = (-1, 0, 0)^\top$ und $\boldsymbol{d} = (0, 1, 0)^\top$ die folgenden Produkte:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}), \qquad [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}] \cdot \boldsymbol{d}, \qquad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}), \qquad [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}] \times \boldsymbol{d}.$$

(b) Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{x}.$$

(c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit den Eckpunkten $A = (7, 3, 4)^\top$, $B = (1, 0, 6)^\top$ und $C = (4, 5, -2)^\top$.

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Ferner bezeichne $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ das Einheitsquadrat im $\mathbb{R}^2$. Machen Sie sich klar, dass $f(Q)$ wieder ein Viereck ist und berechnen Sie dessen Flächeninhalt.
Welchen Zusammenhang zur Determinante von A stellen Sie fest?

Aufgabe 4

(a) Liegen die Punkte $A = (1, 2, 1)^\top$, $B = (-1, 1, 2)^\top$ und $C = (5, 4, -2)^\top$ auf einer Geraden?

(b) Zeigen Sie, dass die Punkte $A = (2, -1, -2)^\top$, $B = (1, 2, 1)^\top$, $C = (2, 3, 0)^\top$ und $D = (5, 0, -6)^\top$ in einer Ebene liegen!

Aufgabe 5

(a) Es sei E die Ebene, welche auf dem Vektor $\boldsymbol{n} = (2, -1, 3)^\top$ senkrecht steht und durch den Punkt $P_0 = (5, 3, -2)^\top$ geht. Bestimmen Sie die Gleichung von E in Normalform.

(b) Es sei die Ebene E gegeben durch: $4x - 2y + 3z - 11 = 0$. Gesucht ist die Gleichung der Ebene, die parallel zu E ist und durch $P_0 = (1, 2, 1)$ geht.

(c) Gesucht ist die Gleichung der Ebene in Normalenform, die durch die Punkte $P_0 = (1, -2, 7)$, $P_1 = (5, 3, 6)$ und $P_2 = (-2, -8, 1)$ geht.

(d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen $E_1 : x-2y+2z-8 = 0$ und $E_2 : x+z-6 = 0$.

(e) Gesucht ist die Gleichung der Ebene, die auf den Ebenen $E_1 : 2x + y - 3z - 4 = 0$ und $E_2 : 5x + 5y - 7z + 11 = 0$ senkrecht steht und durch den Punkt $P_0 = (2, 4, -1)$ geht.

(f) Gesucht ist die Punkt-Richtungs-Form der Geraden durch $A = (-1, 2, 3)$ und $B = (2, 6, -2)$.

(g) Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2:

$$g_1 : \boldsymbol{x} = (-1; 1; 0)^\top + \lambda(1, -2, 1)^\top, \qquad g_2 : \boldsymbol{x} = \mu(2, -1, -1)^\top.$$

Wie groß ist der Winkel zwischen diesen beiden Geraden?

(h) Gesucht ist der Schnittpunkt S der Ebene $E : x - y + 3z = -2$ mit der Geraden $g : \boldsymbol{x} = (2, -4, 1)^\top + \lambda(2, 2, -1)^\top$.

(i) Gesucht ist die Gerade g, die die z-Achse senkrecht schneidet und durch den Punkt $P_0 = (1, -1, 1)$ geht.

(j) Gesucht ist der Schnittpunkt S der Geraden g: $\boldsymbol{x} = (-1, 2, 1)^\top + \lambda(2, 1, -1)^\top$ mit der Ebene $E : 3x - 2y + z = 3$.

(k) Gegeben sind die Geraden

$$g_1 : \boldsymbol{x} = (1, 1, 3)^\top + \lambda(1, -2, 1)^\top, \qquad g_2 : \boldsymbol{x} = (4, 2, 1)^\top + \mu(0, 1, -2)^\top.$$

Wie liegen diese zueinander?

(l) Bestimmen Sie den Abstand zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2 aus der vorherigen Teilaufgabe.