

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2017/18

6. Übung: Determinanten und inverse Matrizen

Aufgabe 1

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

- (a) Welche Vektoren werden auf den Nullvektor abgebildet?
- (b) Gibt es einen Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$, dessen Bild $\mathbf{b} = (2, 2, 2)^\top$ ist?
- (c) Gibt es zwei verschiedene Vektoren, die das gleiche Bild haben?
- (d) Welche Dimension hat der Bildraum von f ?

Aufgabe 2

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3i & -4 \\ 4 & -3i \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1-i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix},$$

$$J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 2 & 1 & 2 \\ -i & 0 & i-1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a & -b \\ 1 & b & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & n \end{pmatrix}, N_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- (a) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen A, \dots, K .
- (b) Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\det L = 0$?
- (c) Wie können Sie $\det F = 0$ begründen, ohne die Determinante auszurechnen?
- (d) Berechnen Sie – falls möglich – die inversen Matrizen zu A, B, D, F, G und J .

- (e) Wie lautet die Determinante und inverse Matrix von M_n ?
- (f) Was bewirkt die Matrix-Vektor Multiplikation $N_n x$? Was bedeutet das für die Matrix-Vektor Multiplikation $N_n^2 x$ und damit die Matrix N_n^2 ? Kann man damit eine inverse Matrix zu N_n angeben?