TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 13. November 2017
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Max Winkler, M. sc. Alexandra Bünger, Dipl.-Math. oec. Toni Kowalewitz,
M. sc. Robert Nasdala, Dipl.-Math. Michael Quellmalz

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2017/18

4. Übungsblatt: Vektorräume, lineare Unabhängigkeit und Matrizen

Aufgabe 1

Wir betrachten die Menge $V = \mathbb{R}^2$ und definieren eine Vektoraddition und Skalarmultiplikation durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ist $(V, +, \cdot)$ dann ein Vektorraum oder nicht? Warum?

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob U ein Teilraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist, und beschreiben Sie die Menge U geometrisch:

(a) $U = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$,

(b) $U = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 0\}$,

(c) $U = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$.

Aufgabe 3

Sind die folgenden Vektoren linear abhängig oder unabhängig?

(a) $\boldsymbol{a} = (2, 1, 0)^\top$ und $\boldsymbol{b} = (1, 2, 0)^\top$,

(b) $\boldsymbol{x} = (2, 0, -1)^\top,\ \boldsymbol{y} = (1, 1, 1)^\top,\ \boldsymbol{z} = (1, 3, t)^\top$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$,

(c) drei beliebige Vektoren des $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4

(a) Sei U ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$ und habe die Dimension $\dim U = n$. Was können Sie dann über U aussagen?

(b) Man zeige, dass die Vektoren $\boldsymbol{b}_1 = (2, 1)^\top$ und $\boldsymbol{b}_2 = (5, 2)^\top$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden. Wie lauten die *Koordinaten* eines Vektors $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ bzgl. der Basis $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$?

(c) Es seien die Vektoren $\boldsymbol{a} = (2, 1, 0)^\top$ und $\boldsymbol{b} = (1, 2, 0)^\top$ wie in Aufgabe 3(a). Ergänzen Sie $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad G = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -6 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie, sofern definiert,

$$A+B, \quad B-3A, \quad A\cdot C, \quad A^\top \cdot B, \quad C\cdot A, \quad E\cdot F, \quad F\cdot E, \quad F\cdot C, \quad (A\cdot C)\cdot F, \quad A\cdot(C\cdot F), \quad B^2, \quad D^3.$$

(b) Welche weiteren Matrizenprodukte aus diesen Matrizen sind möglich? (Ohne Transponieren.)

(c) Es sei $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^\top$ die i-te Spalte der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Was sind die Ergebnisse der Produkte $\boldsymbol{e}_i^\top \cdot Y$, $Y \cdot \boldsymbol{e}_j$ und $\boldsymbol{e}_i^\top \cdot Y \cdot \boldsymbol{e}_j$?

Aufgabe 6

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear ist, und geben Sie deren Abbildungsmatrix an:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y + z.$$

(b) Geben Sie die Abbildungsmatrix der folgenden linearen Abbildung an:

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \\ 2y \end{pmatrix}.$$