

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2017/18

3. Übungsblatt: Komplexe Zahlen**Aufgabe 1**Es seien $z_1 = 2 - 2i$ und $z_2 = 1 + 3i$. Berechnen Sie

- (a) i^n , (b) $z_1 + z_2$, (c) $z_1 - z_2$, (d) $\overline{z_1} + z_1$, (e) $z_1 z_2$, (f) $z_2 \overline{z_2}$, (g) $4z_1 - iz_2$, (h) $\frac{z_1}{z_2}$,
 (i) $|z_1|z_2$, (j) $|z_1 z_2|$, (k) z_1^3 , (l) z_1^{-1} , (m) z_2^{-2} , (n) $\frac{1 + i^{-1}}{1 - i^{-3}}$.

Aufgabe 2Bestatigen Sie folgende Beziehungen für $z, w \in \mathbb{C}$:

- (a) $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$, (b) $z\overline{z} = |z|^2$, (c) $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$, (d) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

Aufgabe 3

Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen in der GAUSS'schen Zahlenebene!

- (a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq -1\}$, (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \operatorname{Re}(z)\}$, (c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 2 \text{ und } |z + i| \leq 2\}$,
 (d) $\left\{z \in \mathbb{C} : \overline{z} = \frac{1}{z}\right\}$, (e) $\left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = 1\right\}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $z_1 \neq z_2$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z_1 = \frac{\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) + 3 - 5i}{2 - i}.$$

Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ gegeben. Welchen Betrag und welches Argument besitzt die komplexe Zahl

$$z_2 = 2(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi)) ?$$

Aufgabe 5

Es seien

$$z_1 = 3, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = 3i, \quad z_4 = -5i, \quad z_5 = -1 - i\sqrt{3}, \quad z_6 = \overline{z_5}, \\ z_7 = 3e^{-i\pi/4}, \quad z_8 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad z_9 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}, \quad z_{10} = 1 - i.$$

- (a) Zeichnen Sie die Zahlen in die GAUSS'sche Zahlenebene ein und geben Sie jeweils beide Polardarstellungen (trigonometrisch & exponentiell) an!
 (b) Berechnen Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe der Exponentialdarstellung und geben Sie das Ergebnis in kartesischer Form an!

$$z_7 z_8, \quad \frac{z_8^2}{z_7}, \quad z_{10}^{10}, \quad \frac{\overline{z_{10}}^n}{z_{10}^{n+2}}.$$

Aufgabe 6

- (a) Berechnen Sie die vierten Wurzeln der imaginären Einheit i .
- (b) Lösen Sie $z^3 = \sqrt{8} + \sqrt{8}i$.
- (c) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für die die komplexe Zahl $z = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}$ die Gleichung $z^n = 1$ erfüllt.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

- (a) $z^2 + 2z + 3 = 0$,
- (b) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$,
- (c) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$,
- (d) $\left(\frac{z+1}{2-z}\right)^2 = -1$.