TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 16. Oktober 2017
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Max Winkler, M. sc. Alexandra Bünger, Dipl.-Math. oec. Toni Kowalewitz,
M. sc. Robert Nasdala, Dipl.-Math. Michael Quellmalz

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2017/18

2. Übungsblatt: Reelle Zahlen, vollständige Induktion und Abbildungen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie, ob die folgenden Mengen nach unten und/oder oben beschränkt sind und geben Sie in den entsprechenden Fällen das Infimum bzw. Supremum an.

(a) $M = [0,1] \cup (2,3)$,

(b) $M = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n \right\}$,

(c) $M = \left\{ \frac{x-1}{x+1} : x \in [0, \infty) \right\}$,

(d) $M = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 4 < 0 \right\}$,

(e) $M = \left\{ \mathrm{e}^{x^2 - x} : x \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die gilt:

(a) $|x-4| < 10$, (b) $|1+2x| \geq 4$, (c) $|2x+1| = |x-1| + 1$, (d) $\left| \frac{x-3}{2x-5} \right| > 3$.

Aufgabe 3

Warum gilt für reelle Zahlen a, b immer $|a| \leq |a+b| + |b|$? Weisen Sie damit nach, dass

$$\big| |a| - |b| \big| \leq |a+b|.$$

Aufgabe 4

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$,

(b) $\sum\limits_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$,

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Aufgabe 5

Wo ist der Fehler in folgender vollständigen Induktion? Überprüfen Sie die Behauptung für $n = 1, 2, 3, 4$ und korrigieren Sie die Induktion.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2n - 1 \leq 2^{n-1}$.

Beweis: Beweis durch vollständige Induktion über n.

- *Induktionsbeginn*: $n = 1$
  Für $n = 1$ ist $2n - 1 = 1 = 2^0$.
- *Induktionsschritt*: $n \to n + 1$
  Es ist $2(n+1) - 1 = (2n - 1) + 2$. Nach Induktionsannahme folgt:

$$(2n-1) + 2 \leq 2^{n-1} + 2 \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n.$$

  Also gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6

Geben Sie alle Funktionen $f\colon X \to Y$ an und untersuchen Sie diese auf die Eigenschaften *injektiv, surjektiv, bijektiv*!

(a) $X = \{a, b\},\ Y = \{1, 2\}$,

(b) $X = \{a\},\ Y = \{1, 2, 3\}$,

(c) $X = \{a, b\},\ Y = \{1\}$.

Aufgabe 7

Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f\colon A \to B$ *injektiv, surjektiv* oder *bijektiv* sind. Geben Sie notfalls Einschränkungen A', B' von A bzw. B an, so dass $f : A' \to B'$ bijektiv wird.
Bestimmen Sie dann die Umkehrfunktion $f^{-1} : B' \to A'$.

(a) $A = B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = e^x$

(b) $A = [0, \infty),\ B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \sqrt{x}$

(c) $A = B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \sin x$

(d) $A = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \tan x$

(e) $A = B = \mathbb{N}$, $\quad f(n) = n^2$

(f) $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{Q}$, $\quad f(n) = \frac{1}{n}$

(g) $A = B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = |2x - 4|$