TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 4. Oktober 2017
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Max Winkler, M. sc. Alexandra Bünger, Dipl.-Math. oec. Toni Kowalewitz,
M. sc. Robert Nasdala, Dipl.-Math. Michael Quellmalz

Mathematik I (für IF, ET und Ph)

Wintersemester 2017/18

1. Übungsblatt: Aussagenlogik und Mengenlehre

Aufgabe 0

Sind die folgenden Formulierungen Aussagen?

$2 + 13 = 15$, $\int e^x dx$, $2x - 1 = 7$, Warum ist $\frac{\pi}{2}$ größer als 1? , $2^{8220} - 1$ ist eine Primzahl.

Aufgabe 1

Es seien A, B und C Aussagen. Beweisen Sie mittels Wahrheitstafel:

(a) $\overline{A \wedge B} \iff \overline{A} \vee \overline{B}$ (DE MORGAN'sche Regel),

(b) $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

(c) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

(d) $(A \implies B) \iff \overline{A \wedge \overline{B}}$.

Aufgabe 2

Vereinfachen Sie die folgenden aussagenlogischen Ausdrücke:

(a) $A \vee (A \wedge B)$, (b) $\overline{\overline{A} \wedge (A \vee B)}$, (c) $A \wedge (A \vee (A \wedge (A \vee B)))$.

Aufgabe 3

Überlegen Sie sich, welche der folgenden Aussagen wahr sind und wie sie diese mittels Quantoren bzw. in ausformulierten Sätzen ausdrücken können.

(a) (i) Für alle Autos gibt es jeweils einen Motor, mit dem das Auto fährt.
(ii) Es gibt einen Motor für alle Autos, mit dem diese fahren.

(b) (i) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n$.
(ii) $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R} : x \leq n$.

Hinweis: Hier bezeichnet $\mathbb{N}$ die Menge aller natürlichen Zahlen und $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen.

Aufgabe 4

Seien $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{c, d\}$. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:

$$a \in A, \quad e \in A, \quad A \subset B, \quad \{b\} \in A, \quad \{b\} \subset A, \quad \emptyset \in A, \quad \emptyset \subset A.$$

Aufgabe 5

Gegeben seien folgende Intervalle der reellen Achse: $A = [1, 2)$, $B = [2, 4]$, $C = [4, 5]$, $D = (2, \infty)$. Bilden Sie:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \cap C, \quad C \setminus D, \quad D \setminus C, \quad A \cup D,$$

und geben Sie die Komplementärmengen zu den Intervallen an!

Aufgabe 6

(a) Es seien $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ und $C = \{\aleph\}$. Geben Sie die Elemente von $A \times B \times C$ an.

(b) Die Anzahl aller Elemente einer Menge A wird in der Mathematik mit dem Symbol $|A|$ bezeichnet und *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* der Menge A genannt. Es sei $A = \{1, \ldots, n\}$. Geben Sie die Mächtigkeit von A^k an (für natürliche Zahlen n und k).

(c) Seien $A = \{x : x \in [0, 1] \vee x = 3\}$ und $B = \{y : y \in [1, 3] \vee y = 4\}$. Bilden Sie $A \times B$ und veranschaulichen Sie diese Menge grafisch!

Aufgabe 7

Es seien A, B und C Mengen. Verifizieren Sie zunächst $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ und zeigen Sie damit durch mengentheoretische Umformungen, dass

(a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

(b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus \overline{C})$,

(c) $A \setminus (A \setminus (B \setminus (B \setminus C))) = A \cap B \cap C$.

Weisen Sie weiterhin anhand eines Gegenbeispiels nach, dass im Allgemeinen

(d) $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$.

Aufgabe 8

Welche der drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität besitzen die folgenden Relationen?

(a) Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und

$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (3, 1)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$, $R_3 = \{(1, 1)\}$.

(b) Sei M die Menge der Geraden einer Ebene und

$R_1 = \{(g_1, g_2) : g_1 \parallel g_2\}$, $R_2 = \{(g_1, g_2) : g_1 \perp g_2\}$.

Aufgabe 9

Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind Äquivalenzrelationen, Ordnungsrelationen oder weder noch?

$R_1 = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \,|\, \exists k \in \mathbb{N} : m + n = 2k\}$, $R_2 = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \,|\, \exists k \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} = 2k\}$, $R_3 = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \,|\, m \text{ ist Teiler von } n\}$.