TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 12. Januar 2016
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Roman Unger, Dipl.-Math. Ailyn Schäfer, Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematik I (für Informatiker, ET und IK)

Wintersemester 2015/16

8. Übung: Orthogonale Abbildungen und Eigenwerte

Aufgabe 1

(a) Wie lautet die Abbildungsmatrix für eine Spiegelung im Raum $\mathbb{R}^2$ an einer Geraden, welche durch den Ursprung geht und den Anstiegswinkel α besitzt?

Hinweis: Mit Hilfe der Additionstheoreme erhält man eine besonders schöne Form.

(b) Berechnen Sie das Bild des Vektors $[1, -2]^\top$ unter einer solchen Spiegelung für $\alpha = 60°$.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass das Produkt zweier orthogonaler Matrizen wieder eine orthogonale Matrix ist.

(b) Welche Werte kann die Determinante einer orthogonalen Matrix annehmen?

(c) Bestimmen Sie alle orthogonalen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & x \\ y & z \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad B = \begin{pmatrix} x & \frac{7}{25} \\ y & z \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte der Matrix A und deren algebraische Vielfachheiten.

(b) Für welchen Wert $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A *diagonalisierbar*, d.h., für jeden Eigenwert stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit überein? Geben Sie für diesen Fall die Eigenvektoren an.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden beiden Matrizen und vergleichen Sie sie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sind beide Matrizen ähnlich zueinander?

Aufgabe 5

Berechnen Sie die charakteristischen Polynome, die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen. Geben Sie auch die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der einzelnen Eigenwerte an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$