

Mathematik I (für Informatiker, ET und IK)

Wintersemester 2015/16

7. Übung: Orthogonalität, Skalarprodukt, Norm und analytische Geometrie

Aufgabe 1

- (a) Berechnen Sie die Längen der Vektoren $\mathbf{a} = (3, 0, 4)^\top$, $\mathbf{b} = (7, 0, 1)^\top$ und $\mathbf{c} = (4, 4, -2)^\top$.
- (b) Orthonormieren Sie die Vektoren aus (a).
- (c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{x} = (3, 4, -1)^\top$ und $\mathbf{y} = (7, 5, 2)^\top$.

Aufgabe 2

- (a) Man berechne für die Vektoren $\mathbf{a} = (1, 0, 0)^\top$, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)^\top$, $\mathbf{c} = (-1, 0, 0)^\top$ und $\mathbf{d} = (0, 1, 0)^\top$ die folgenden Produkte:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}), \quad [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \cdot \mathbf{d}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}), \quad [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] \times \mathbf{d}.$$

- (b) Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}) \times \mathbf{z} + (\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}) \times \mathbf{y} + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \times \mathbf{x}.$$

- (c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit den Eckpunkten $A = (7, 3, 4)^\top$, $B = (1, 0, 6)^\top$ und $C = (4, 5, -2)^\top$.

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ferner bezeichne $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ das Einheitsquadrat im \mathbb{R}^2 . Machen Sie sich klar, dass $f(Q)$ wieder ein Viereck ist und berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

Welchen Zusammenhang zur Determinante von A stellen Sie fest?

Aufgabe 4

- (a) Liegen die Punkte $A = (1, 2, 1)^\top$, $B = (-1, 1, 2)^\top$ und $C = (5, 4, -2)^\top$ auf einer Geraden?
- (b) Zeigen Sie, dass die Punkte $A = (2, -1, -2)^\top$, $B = (1, 2, 1)^\top$, $C = (2, 3, 0)^\top$ und $D = (5, 0, -6)^\top$ in einer Ebene liegen!

Aufgabe 5

- (a) Es sei E die Ebene, welche auf dem Vektor $\mathbf{n} = (2, -1, 3)^\top$ senkrecht steht und durch den Punkt $P_0 = (5, 3, -2)^\top$ geht. Bestimmen Sie die Gleichung von E in Normalform.
- (b) Es sei die Ebene E gegeben durch: $4x - 2y + 3z - 11 = 0$. Gesucht ist die Gleichung der Ebene, die parallel zu E ist und durch $P_0 = (1, 2, 1)$ geht.
- (c) Gesucht ist die Gleichung der Ebene in Normalenform, die durch die Punkte $P_0 = (1, -2, 7)$, $P_1 = (5, 3, 6)$ und $P_2 = (-2, -8, 1)$ geht.
- (d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen $E_1 : x - 2y + 2z - 8 = 0$ und $E_2 : x + z - 6 = 0$.
- (e) Gesucht ist die Gleichung der Ebene, die auf den Ebenen $E_1 : 2x + y - 3z - 4 = 0$ und $E_2 : 5x + 5y - 7z + 11 = 0$ senkrecht steht und durch den Punkt $P_0 = (2, 4, -1)$ geht.
- (f) Gesucht ist die Punkt-Richtungs-Form der Geraden durch $A = (-1, 2, 3)$ und $B = (2, 6, -2)$.
- (g) Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 :

$$g_1 : \mathbf{x} = (-1; 1; 0)^\top + \lambda(1, -2, 1)^\top, \quad g_2 : \mathbf{x} = \mu(2, -1, -1)^\top.$$

Wie groß ist der Winkel zwischen diesen beiden Geraden?

- (h) Gesucht ist der Schnittpunkt S der Ebene $E : x - y + 3z = -2$ mit der Geraden $g : \mathbf{x} = (2, -4, 1)^\top + \lambda(2, 2, -1)^\top$.
- (i) Gesucht ist die Gerade g , die die z -Achse senkrecht schneidet und durch den Punkt $P_0 = (1, -1, 1)$ geht.
- (j) Gesucht ist der Schnittpunkt S der Geraden $g : \mathbf{x} = (-1, 2, 1)^\top + \lambda(2, 1, -1)^\top$ mit der Ebene $E : 3x - 2y + z = 3$.
- (k) Gegeben sind die Geraden

$$g_1 : \mathbf{x} = (1, 1, 3)^\top + \lambda(1, -2, 1)^\top, \quad g_2 : \mathbf{x} = (4, 2, 1)^\top + \mu(0, 1, -2)^\top.$$

Wie liegen diese zueinander?

- (l) Bestimmen Sie den Abstand zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2 aus der vorherigen Teilaufgabe.