TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 23. November 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dr. Roman Unger, Dipl.-Math. Ailyn Schäfer, Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematik I (für Informatiker, ET und IK)

Wintersemester 2015/16

5. Übung: Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten der Matrix X spannen einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ auf. Geben Sie die Dimension dieses Unterraums an.

Aufgabe 2

Finden Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme.

(a)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_2 + 17x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(d) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 &= -\beta \end{aligned}$$

mit den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von α und β hat das LGS

(a) genau eine Lösung, (b) keine Lösung, (c) unendlich viele Lösungen?

Geben Sie für Fall (c) die Lösungsmenge an.

Aufgabe 4

Für welche Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das folgende LGS eindeutig lösbar?

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ -2\alpha x_1 + \alpha x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie die Matrix $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, welche

$$2X - (A+B)^2 X = I - C^\top X.$$

erfüllt.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von $XA + B = A^\top$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$