Mathematik I

(für Informatiker, ET und IK)

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Wintersemester 2015/16

Mathematik!
TU Chemnitz

Inhalt

Wie sag' ich's?

Werfen Sie einen kurzen Blick auf folgende lyrische Einlassung:

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig in } x_0 \\ &\qquad :\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon) \end{aligned}$$

Möglicherweise bewegen Sie jetzt Fragen wie

- Wie kann man jemals einen solchen Ausdruck durchblicken?
- Wozu muss man sich überhaupt derart kompliziert ausdrücken?

Lassen Sie uns dazu ein kleines Experiment durchführen:

Wie sag' ich's?

Werfen Sie einen kurzen Blick auf folgende lyrische Einlassung:

$$
\begin{aligned}
&f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig in } x_0 \\
&\qquad :\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)
\end{aligned}
$$

Möglicherweise bewegen Sie jetzt Fragen wie

- Wie kann man jemals einen solchen Ausdruck durchblicken?
- Wozu muss man sich überhaupt derart kompliziert ausdrücken?

Lassen Sie uns dazu ein kleines Experiment durchführen:

Erklären Sie Ihrem Nachbarn in einer Minute, was eine reelle Zahl ist, und warum für diese das Kommutativgesetz der Addition gilt.

Wie sag' ich's?

Werfen Sie einen kurzen Blick auf folgende lyrische Einlassung:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig in } x_0$$
$$:\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

Möglicherweise bewegen Sie jetzt Fragen wie

- Wie kann man jemals einen solchen Ausdruck durchblicken?
- Wozu muss man sich überhaupt derart kompliziert ausdrücken?

Lassen Sie uns dazu ein kleines Experiment durchführen:

Erklären Sie Ihrem Nachbarn in einer Minute, was eine reelle Zahl ist, und warum für diese das Kommutativgesetz der Addition gilt.

Wahrscheinlich ist Ihnen aufgefallen, dass die Umgangssprache für eine präzise Beschreibung nicht ausreicht. Wir brauchen eine Fachsprache zur mathematischen Kommunikation. Diese muss erst erlernt werden.

Inhalt

Elemente der Aussagenlogik

Eine Aussage p ist ein sprachliches oder formelmäßiges Gebilde, dem man entweder den Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ zuordnen kann.

Sprechweisen

- „p ist eine wahre (richtige) Aussage.“, „p gilt.“
- „p ist eine falsche Aussage.“, „p gilt nicht.“

Insbesondere kann keine Aussage gleichzeitig wahr und falsch sein.

Sind folgende Konstrukte Aussagen? Was ist ggf. ihr Wahrheitswert?

„Wir sprechen gerade über Aussagenlogik.“;
„Wie soll ich bloß die Prüfung schaffen?“;
„$6^2 = 36$“;
„$7 = \sqrt{48}$“;
„$\sqrt{14}$“;
„Rettet den Euro!“;
„Wir befinden uns in Dresden oder Chemnitz.“
„Diese Aussage ist falsch.“

Elemente der Aussagenlogik

Eine Aussagenverknüpfung liefert eine neue Aussage, deren Wahrheitwert sich aus den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen ergibt.

Seien p und q Aussagen, dann heißt

- $\overline{p}$ (auch $\neg p$) Negation von p (sprich: „nicht p“),
- $p \vee q$ Disjunktion von p und q (sprich: „p oder q“),
- $p \wedge q$ Konjunktion von p und q (sprich: „p und q“).

Die Wahrheitswerte werden durch folgende Tabellen festgeschrieben:

p	$\overline{p}$
w	f
f	w

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
w	w	w	w
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	f

Beachten Sie den rot markierten Wahrheitswert bei „oder“ – umgangssprachlich meint man mitunter nicht dasselbe!

Geben Sie den Wahrheitswert der Aussage

„Wir gehen heute abend ins Kino oder ins Theater“

in Abhängigkeit von der tatsächlich durchgeführten Aktivitäten an. Machen Sie sich den Unterschied zur Umgangssprache klar.

Geben Sie die Wahrheitswerte und Negationen zu folgenden Aussagen an:

- p: „Unsere Vorlesung findet heute am Nachmittag statt.“
- q: „Unsere Vorlesung findet heute am Abend statt.“

Warum ist q nicht die Negation von p?

Ein zentrales Element beim Aufbau mathematischer Theorie ist das logische Schließen. Dafür benötigen wir zwei weitere Verknüfungen.

Seien p und q Aussagen; dann heißt

- $p \Rightarrow q$ Implikation („Aus p folgt q"; „Wenn p gilt, so gilt q."),
- $p \Leftrightarrow q$ Äquivalenz („p gilt **genau** dann, wenn q gilt.").

Eine Implikation ist genau dann falsch, wenn man aus **wahren** Aussagen die **falschen** Schlüsse zieht (p wahr, q falsch).

Eine Äquivalenz bedeutet, dass p und q immer den gleichen Wahrheitswert besitzen.

Die zugehörige Wahrheitswerttabelle spielt für den Praktiker kaum eine Rolle – die sprachliche Fassung der Begriffe ist handlicher:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Elemente der Aussagenlogik

Wichtig sind aber folgende alternative Sprechweisen:

- für $p \Rightarrow q$: „p ist hinreichend für q.“ oder “q ist notwendig für p.“
- für $p \Leftrightarrow q$: „p ist hinreichend und notwendig für q.“

und folgender Satz:

Satz 2.1

Seien p und q Aussagen. Dann gilt:

- $(p \Leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (p \Rightarrow q)$ *und* $(q \Rightarrow p)$
- $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

Die zweite Aussage bildet die Grundlage für das indirekte Beweisen („Angenommen q gilt nicht, dann kann auch p nicht gelten.“).

Interpretieren Sie die Aussage „Wenn n gerade ist, so ist auch n^2 gerade.“ vor dem Hintergrund der zweiten Beziehung in Satz 2.1.

Satz 2.2

Es seien p, q und r beliebige Aussagen. Dann gelten immer:

- $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ *(doppelte Verneinung),*
- $p \vee \overline{p}$ *(Satz vom ausgeschlossenen Dritten),*
- $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Kommutativgesetze),*
- $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$,
$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(Assoziativgesetze),*
- $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$,
$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *(Distributivgesetze),*
- $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$,
$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ *(De Morgansche Regeln).*

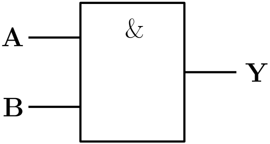
Punkte 1-4 scheinen sofort klar. Im Zweifel erfolgt der Nachweis solcher Äquivalenzen durch Aufstellen von Wahrheitstabellen.

In der Digitaltechnik gibt es genau zwei Zustände (hohe/niedrige(keine) Spannung; 1/0), die man als logisches „wahr“ bzw. „falsch“ interpretiert.

Schaltungen bestehen häufig aus „Logikgattern“ (engl. *gates*).
Diese besitzen z. B. 2 Eingänge (A,B) und einen Ausgang (Y) und reproduzieren logische Verknüfungen.

Eine wichtige Anwendung von Satz 2.2 liegt in der Analyse und Vereinfachung logischer Schaltnetzwerke.

Beispiel: Schaltsymbol und Wahrheitstabelle für ein UND-Gatter



A	B	Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Elemente der Aussagenlogik

Eine Aussageform ist ein Gebilde, welches eine oder mehrere Variablen enthält, und das nach dem Ersetzen der Variablen durch konkrete Werte in eine Aussage übergeht.

Schreibweise: $p(x)$, falls x als Variable verwendet wird.

Mit $p(x)$ sei die Aussageform $x \leq 1$ bezeichnet, wobei x eine reelle Variable sei. Wie lauten die Aussagen $p(0)$ und $p(4)$ und was ist ihr Wahrheitswert?

Eine weitere Möglichkeit, Aussageformen in Aussagen zu überführen, ist die Bindung der Variablen an Quantoren. Die wichtigsten sind:

- $\forall$ – „für alle … gilt …“
- $\exists$ – „es existiert (mindestens) ein …, so dass …“

Beispiel: „Für alle reellen Zahlen x gilt $x > 1$.“ „Es gibt eine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$.“ (Beide Aussagen sind natürlich falsch.)

Definition 2.3

Sei $p(x)$ eine Aussageform; dann meinen wir mit

- der Negation von „Für alle x gilt $p(x)$“ die Aussage „Es existiert ein x, für das $p(x)$ nicht gilt“; symbolisch:

$$\overline{\forall x : p(x)} := (\exists x : \overline{p(x)})$$

- der Negation von „Es existiert ein x, für das $p(x)$ gilt“ die Aussage „Für alle x gilt $p(x)$ nicht“; symbolisch:

$$\overline{\exists x : p(x)} := (\forall x : \overline{p(x)})$$

Natürlich erfolgt diese Definition im Einklang mit unserer Intuition - die Intuition wird lediglich sinnvoll formalisiert.

Formulieren Sie die Negationen von “Für alle reellen Zahlen x gilt $x > 1$.“, “Es gibt eine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$.“, “Jeder Haushalt gibt ein Drittel seines Einkommens für Wohnen aus.“ (SZ, 8.9.12) und “Alle Politiker lügen gelegentlich.“

Gerüstet mit diesen Vorkenntnissen lassen sich die gebräuchlichen Sprachkonstrukte der Mathematik grob typisieren.

Ein Axiom ist eine Aussage, die innerhalb einer Theorie nicht begründet oder hergeleitet wird. Axiome werden beweislos vorausgesetzt. Wichtige Eigenschaften von Axiomensystemen sind Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit.[1]

Beispiel: Kommutativgesetz für reelle Zahlen, siehe später.

Ein Satz ist eine Aussage, die mittels eines Beweises als wahr erkannt wurde. Den Beweis bildet dabei eine Kette von Schlussfolgerungen, die nur von Axiomen oder bereits bewiesenen Sätzen ausgeht.

Beispiel: „$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl."

Gebräuchliche Ausprägungen von Sätzen sind auch

- Lemma (Hilfssatz) – ein Satz, der als Zwischenstufe in einem Beweis dient,
- Korollar (Folgerung) – ein Satz, der ohne großen Beweisaufwand aus einem anderen folgt.

Die Abgrenzung zum Satz ist jeweils fließend und subjektiv.

[1] vgl. D. Hofstadter: *Gödel, Escher Bach*. Basic Books, New York NY 1979

Eine Definition dient zur Festlegung eines mathematischen Begriffs. Hier sind eher Wertungen wie „sinnvoll/nicht sinnvoll“ statt „wahr/falsch“ angebracht. Sinnvolle Definitionen erfüllen unter anderem folgende Anforderungen:

- Widerspruchsfreiheit,
- Zirkelfreiheit (das zu Definierende darf nicht selbst Bestandteil der Definition sein),
- Angemessenheit (nicht zu eng und nicht zu weit gefasst),
- Redundanzfreiheit (keine Bestandteile enthalten, die aus anderen logisch folgen).

Häufig schreibt man Definitionen in der Form von Gleichungen oder Äquivalenzen und verwendet die Symbole $:=$ und $:\Leftrightarrow$. Der zu definierende Ausdruck steht immer auf der Seite des Doppelpunkts.

Beispiel: $a^0 := 1$ für $a \in \mathbb{R}$.

Da in der Mathematik **alle** Aussagen per logischem Schluss bewiesen werden, entsteht ein sehr scharfer Wahrheitsbegriff.

In den (experimentellen) Naturwissenschaften ist der Wahrheitsbegriff stärker an Beobachtungen gekoppelt und daher weniger scharf (deduktive vs. induktive Schlussweisen).

Die Mathematik ist also im logischen Sinne präziser, dies erfordert aber eben auch eine kompliziertere Fachsprache.

Für unsere Vorlesung: Ein strenger Aufbau der Theorie kostet Zeit und ist nicht Aufgabe des Anwenders, daher folgender Kompromiss:

- Reihenfolge von Axiomen, Sätzen und Definitionen entspricht weitgehend dem strengen Aufbau der Theorie,
- Beweise und Beweisideen werden dort skizziert, wo sie dem Verständnis des Stoffes dienen,
- „technische“ und aufwändige Beweise werden weggelassen – verwenden Sie bei Interesse entsprechende Literatur.

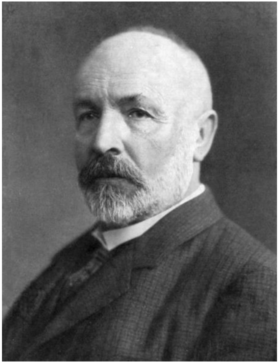
Inhalt

Elemente der Mengenlehre

Definition 2.4 („naive“ Mengendefinition, Cantor*, 1895)

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Die erwähnten Objekte heißen Elemente dieser Menge M.
Schreibweise: $x \in M$ (bzw. $x \notin M$).



* Georg Cantor (1845-1918),
deutscher Mathematiker,
lieferte u. a. wichtige Beiträge zur Mengenlehre.

- aufzählende Darstellung – Elemente werden explizit aufgelistet, z.B.:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Chemnitz; Dresden; Freiberg; Leipzig}\}, \\ B &= \{2; 3; 5; 7\}. \end{aligned}$$

- beschreibende Darstellung – Elemente werden durch eine Eigenschaft charakterisiert, z.B.:

$$\begin{aligned} A &= \{x : x \text{ ist sächsische Universitätsstadt.}\}, \\ B &= \{p : p \text{ ist Primzahl und } p < 10\}. \end{aligned}$$

Die Gesamtheit, die kein Element enthält heißt leere Menge.
Symbol: $\emptyset$ oder $\{\}$.

Seien A und B Mengen.

- A heißt Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Schreibweise: $A \subseteq B$.
- A und B heißen gleich, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und umgekehrt ($A \subseteq B$ und $B \subseteq A$).
  Schreibweise: $A = B$.
- A heißt echte Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist, und ein Element von B existiert, das nicht zu A gehört. ($A \subseteq B$ und $A \neq B$). Schreibweise: $A \subset B$.

Die Teilmengen einer Menge M können wiederum zur sogenannten Potenzmenge zusammengefasst werden:

$$\mathscr{P}(M) := \{A : A \subset M\}.$$

Man gebe die Potenzmenge von $A = \{1; 2; 4\}$ an.

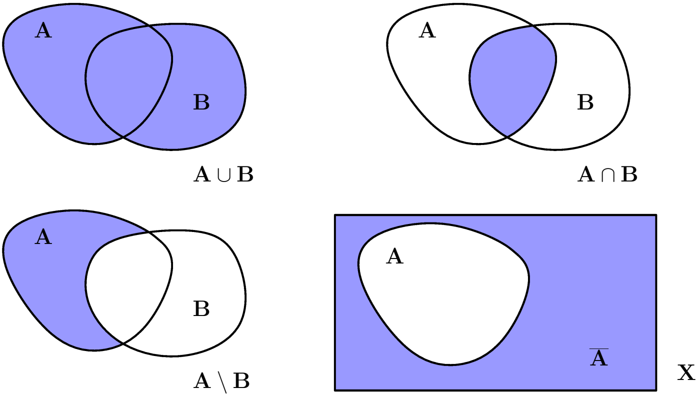
Seien A und B Teilmengen einer Grundmenge X. Dann heißt

- $A \cup B := \{x : \; x \in A$ oder $x \in B\}$ die Vereinigung von A und B,
- $A \cap B := \{x : \; x \in A$ und $x \in B\}$ der Durchschnitt von A und B,
- $A \setminus B := \{x : \; x \in A$ und $x \notin B\}$ die (mengentheoretische) Differenz von A und B (sprich „A ohne B"),
- $\overline{A} := X \setminus A$ das Komplement von A in X.

Geben Sie zu $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ und $B = \{0; 4; 5\}$ die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$ an.
Wie lauten Vereinigung und Durchschnitt der Mengen

$$\begin{aligned} C &= \{p : \; p \text{ ist Primzahl}\} \text{ und} \\ D &= \{p : \; p \text{ ist Primzahl und } p < 10\}? \end{aligned}$$

Visualisierung von Mengenoperationen und -beziehungen erfolgt häufig im sogenannten Venn-Diagramm:



Vereinigung ($\cup$), Schnitt ($\cap$) bzw. Komplement wurden letztlich über die logischen Junktoren „oder"($\vee$), „und" ($\wedge$) bzw. Negation definiert. Daher gelten für Mengenoperationen analoge Regeln zu Satz 2.2:

Satz 2.5 (Regeln für das Operieren mit Mengen)

Es seien A, B, C Mengen. Dann gelten:

- $A \cap B = B \cap A$, $\quad A \cup B = B \cup A$,
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $\quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $A \cap A = A$, $\quad A \cup A = A$,
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $\quad A \cup \emptyset = A$,
- $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$, $\quad A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$,
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Seien A und B Mengen. Dann heißt die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ kartesisches Produkt von A und B, kurz

$$A \times B := \{(a, b) : \ a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Analog definiert man für Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \ a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

und schreibt im Falle der Gleichheit aller A_i kürzer

$$A^n := A \times A \times \cdots \times A \quad (n \text{ Faktoren}).$$

Als wichtigste Beispiele werden uns $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ begegnen – das sind die Entsprechungen von Anschauungsebene und -raum.

Mit Relationen werden Beziehungen zwischen Objekten ausgedrückt. Eine (binäre) Relation R auf einer Grundmenge M ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $M \times M$, also

$$R \subseteq M \times M.$$

Wichtige Eigenschaften von Relationen sind

(a) Reflexivität. $\forall x \in M : (x, x) \in R$.

(b) Symmetrie. $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.

(c) Transitivität. $\forall x, y, z \in M : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

Eine Relation, die alle drei Eigenschaften erfüllt, heißt Äquivalenzrelation.

Eine Partition $\mathscr{P}$ einer Menge M bezeichnet eine Zerlegung in disjunkte Teilmengen, d.h.

$$M = \bigcup_{T \in \mathscr{P}} T \quad \text{und } S \cap T = \emptyset \text{ für je zwei verschiedene } S, T \in \mathscr{P}.$$

Jede Partition einer Menge erzeugt eine Äquivalenzrelation auf ihr und umgekehrt.

Weitere wichtige Eigenschaften von Relationen:

(d) Antisymmetrie. $\forall x, y \in M : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.

(e) Asymmetrie. $\forall x, y \in M : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$.

Eine Relation auf M heißt Ordnungsrelation, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Besipiel: $\leq$, $\subseteq$.

Eine Ordnungsrelation auf M heißt vollständig oder linear, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $xRy \vee yRx$.

Eine Relation auf M heißt strenge Ordnungsrelation, wenn sie asymmetrisch und transitiv ist.

Beispiel: $<$.

Eine strenge Ordnungsrelation heißt vollständig, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt $xRy \vee yRx$.

Inhalt

Die reellen Zahlen

Erinnern Sie sich an unser Experiment in der allerersten Stunde?

Obwohl **jeder** von uns schon seit Jahren reelle Zahlen verwendet, fällt es uns extrem schwer, das Wesen der Zahl in Worte zu fassen.

Es lohnt sich also eine nähere Betrachtung – gerade auch weil Messwerte für viele physikalische Größen als reelle Zahlen aufgefasst werden können.

Einen (eher historisch interessanten) Anfangspunkt liefert uns folgendes berühmte wie umstrittene Zitat:

"Die natürlichen Zahlen hat Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk."

(Leopold Kronecker, deutscher Mathematiker, 1823–1891)

Skizzieren wir zunächst das klassische Vorgehen über Zahlbereichserweiterungen.

Wir starten mit

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ – natürliche Zahlen
  („hat Gott gemacht“ oder werden über Peano-Axiome beschrieben)
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Nach Einführung der Addition stellt man fest, dass Gleichungen wie $x + 9 = 1$ in $\mathbb{N}$ nicht lösbar sind, daher Erweiterung zu

- $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – ganze Zahlen

Nimmt man die Multiplikation hinzu, sind wiederum Gleichungen wie $(-2) \cdot x = 1$ in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar, daher Erweiterung zu

- $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ – rationale Zahlen (alle endlichen und periodischen Dezimalbrüche)

Wählt man die Zahlengerade als Modell, so kann man mit den rationalen Zahlen zumindest beliebig feine Einteilungen realisieren.

Die reellen Zahlen

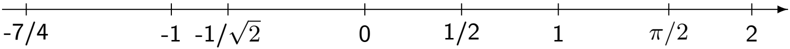
Lücken in $\mathbb{Q}$

Aber: Bereits Euklid (ca. 360-280 v. Chr.) überlieferte uns den Beweis zu

Satz 2.6

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, *d.h.* $\sqrt{2}$ *ist keine rationale Zahl.*

Die rationalen Zahlen erfassen also nicht die gesamte Zahlengerade.
Erst durch “Vervollständigen“ gelangt man zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.



Jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht genau eine reelle Zahl.

Die erste exakte Formulierung dieses Vervollständigungsprozesses stammt übrigens nicht aus der Antike. Dies gelang erst Karl Weierstraß (deutscher Mathematiker, 1815-1897).

Die reellen Zahlen

Moderner axiomatischer Ansatz

Klassische Zahlbereichserweiterungen sind anschaulich, erweisen sich aber im Detail als kompliziert, z. B. bei

- Einführung von Addition und Multiplikation sowie der damit verbundenen Rechengesetze,
- Einführung einer Ordnungsrelation („größer/kleiner“),
- Ausformulieren des Vervollständigungsschritts.

Moderne Ansätze definieren daher $\mathbb{R}$ direkt über Axiome, die unmittelbar die Rechengesetze liefern. Man benötigt:

- Körperaxiome (liefern Rechengesetze),
- Anordnungsgesetze (liefern Ordnungsrelation),
- Vollständigkeitsaxiom.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ werden als entsprechende Teilmengen von $\mathbb{R}$ aufgefasst.
Wir verzichten auf eine formale Angabe der Axiome, geben aber die unmittelbar resultierenden Gesetze an.

(1) $(a+b)+c = a+(b+c) \;\; \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ (Assoziativgesetz der Addition),

(2) $a+0 = a \;\; \forall a \in \mathbb{R}$ (neutrales Element der Addition),

(3) $a+(-a) = 0 \;\; \forall a \in \mathbb{R}$ (inverse Elemente der Addition),

(4) $a+b = b+a \;\; \forall a,b \in \mathbb{R}$ (Kommutativgesetz der Adddition),

(5) $(ab)c = a(bc) \;\; \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$ (Assoziativgesetz der Multiplikation),

(6) $a \cdot 1 = a \;\; \forall a \in \mathbb{R}$ (neutrales Element der Multiplikation),

(7) $a\frac{1}{a} = 1 \;\; \forall a \in \mathbb{R},\, a \neq 0$ (inverse Elemente der Multiplikation),

(8) $ab = ba \;\; \forall a,b \in \mathbb{R}$ (Kommutativgesetz der Multiplikation),

(9) $a(b+c) = ab+ac \;\; \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ (Distributivgesetz).

Diese Gesetze korrespondieren mit den Körperaxiomen.
Eine Menge die die Körperaxiome erfüllt, heißt (Zahl-)Körper.

Wir definieren für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n := a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n \text{ Faktoren}), \quad a^0 := 1$$

und, falls $a > 0$:

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

Dann folgen aus den arithmetischen Gesetzen weitere Rechenregeln:

Satz 2.7

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelten

- $a \cdot 0 = 0$,
- $ab = 0 \ \Rightarrow \ a = 0$ *oder* $b = 0$,
- $a^2 = b^2 \ \Leftrightarrow \ a = b$ *oder* $a = -b$,
- $-(-a) = a, \quad -(a+b) = -a - b$,
- $(-a)b = a(-b) = -ab, \quad (-a)(-b) = ab$,
- $a^n a^m = a^{n+m} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$ *(falls $a \neq 0$)*,
- $a^n b^n = (ab)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ *(falls $a, b \neq 0$)*.

Weiterhin lassen sich mit den arithmetischen Gesetzen folgende wohlbekannte Aussagen beweisen:

Satz 2.8 (Binomische Formeln)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ *gilt*

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Natürlich kann man auch Binome höheren Grades so auswerten. Z. B. gilt

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Einen allgemeingültige Formel für $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$, finden Sie in der Literatur unter dem Namen „Binomischer Lehrsatz".

(10) Zwischen zwei reellen Zahlen a und b besteht immer genau eine der folgenden drei Größenbeziehungen:
$a < b$ (a kleiner b), $a = b$ (a gleich b), $a > b$ (a größer b).

(11) $(a < b \text{ und } b < c) \;\Rightarrow\; a < c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (Transitivität),

(12) $a < b \;\Leftrightarrow a + c < b + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (Monotonie der Addition),

(13) $(a < b \text{ und } 0 < c) \;\Leftrightarrow\; ac < bc \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
(Monotonie der Multiplikation).

Definition:

$a \le b$ (a kleiner oder gleich b) bedeutet $a < b$ oder $a = b$.
$a \ge b$ (a größer oder gleich b) bedeutet $a > b$ oder $a = b$.

Diese Gesetze korrespondieren mit den Anordnungsaxiomen.
Körper, die die Anordnungsaxiome erfüllen, heißen geordnete Körper. Beispiele sind $\mathbb{R}$, aber auch $\mathbb{Q}$.

Aus den Anordnungsaxiomen folgen weiterhin die Regeln für den Umgang mit Ungleichungen:

Satz 2.9

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten:

- $a \le b$ *und* $c \le d \quad \Rightarrow \quad a + c \le b + d$,
- $a \le b$ *und* $c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac \ge bc$ *und* $\frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$,
- $a \le b \quad \Rightarrow \quad -b \le -a$,
- $0 < a \le b \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$,
- $a \le b < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} \le \frac{1}{a} < 0$,
- $a < 0 < b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$.

Finden Sie die Lösungen der Ungleichung $\frac{x-1}{x+3} < 2 \quad (x \neq -3)$.

Definition 2.10 (Obere und untere Schranken)

Sei $M \neq \emptyset$, eine Teilmenge der reellen Zahlen.

- M heißt nach oben beschränkt , wenn es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt mit
$$x \leq C \text{ für alle } x \in M.$$
Jede solche Zahl C heißt obere Schranke von M. Die kleinste obere Schranke einer nach oben beschränkten Menge M heißt Supremum von M (Schreibweise: $\sup M$).
- M heißt nach unten beschränkt , wenn es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt mit
$$x \geq C \text{ für alle } x \in M.$$
Jede solche Zahl C heißt untere Schranke von M. Die größte untere Schranke einer nach unten beschränkten Menge M heißt Infimum von M (Schreibweise: $\inf M$).

M heißt beschränkt, wenn M sowohl nach oben wie auch nach unten beschränkt ist. Gilt $\sup M \in M$ [$\inf M \in M$], so heißt $\sup M$ [$\inf M$] auch Maximum [Minimum] von M.

Die reellen Zahlen

Beispiele:

Ist die Menge

$$M_1 := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$$

beschränkt? Geben Sie falls möglich obere und untere Schranken, Supremum und Infimum sowie Maximum und Minimum an.

Betrachten wir weiterhin

$$M_2 := \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}.$$

Offenbar ist M_2 nach oben beschränkt, denn 42 ist obere Schranke. Ein Supremum besitzt die Menge in den **rationalen** Zahlen jedoch nicht, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

In den **reellen** Zahlen ist die Angabe des Supremums jedoch unproblematisch: $\sup M_2 = \sqrt{2}$.

Das letzte Beispiel liefert den Schlüssel für den noch fehlenden Vervollständigungsschritt bei der Konstruktion von $\mathbb{R}$.

(14) Jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Folgerungen:

- Jede nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Infimum in $\mathbb{R}$.
- Jede beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum und ein Infimum in $\mathbb{R}$.

Damit ist die axiomatische Konstruktion von $\mathbb{R}$ komplett. Kurz zusammenfassen kann man (1)-(14) in folgendem Satz:

$\mathbb{R}$ ist ein ordnungsvollständiger geordneter Körper.

Intervalle sind „zusammenhängende" Teilmengen von $\mathbb{R}$. Es wird dabei nach Inklusion der Randpunkte unterschieden.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$:

$$
\begin{array}{lcll}
[a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \le x \le b\} & \textbf{(abgeschlossenes Intervall)}, \\
(a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \le b\} & \textbf{(halboffenes Intervall)}, \\
[a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \le x < b\} & \textbf{(halboffenes Intervall)}, \\
(a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\} & \textbf{(offenes Intervall)}, \\
[a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \le x\}, & \\
(a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\}, & \\
(-\infty,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \le b\}, & \\
(-\infty,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}, & \\
(-\infty,\infty) & := & \mathbb{R}. &
\end{array}
$$

Auf dem Zahlenstrahl lassen sich Intervalle als zusammenhängende Bereiche darstellen.

Der **Betrag** von $a \in \mathbb{R}$ ist durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{für } a \geq 0, \\ -a, & \text{für } a < 0 \end{cases} \qquad \text{definiert.}$$

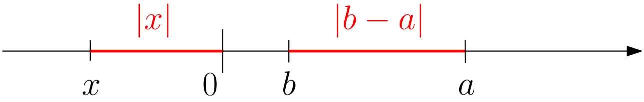
Satz 2.11 (Rechnen mit Beträgen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ gelten

- $|a| \geq 0$, *wobei* $|a| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0$,
- $|a| = c \;\Rightarrow\; a = c$ *oder* $a = -c$,
- $|a| = |-a|$ *und* $|a - b| = |b - a|$,
- $|ab| = |a||b|$,
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ ***(Dreiecksungleichung)***,
- $|a| \leq c \;\Leftrightarrow\; -c \leq a \leq c$.

Für den Betrag gibt es eine einfache, aber wichtige Interpretation am Zahlenstrahl. Für $a, b \in \mathbb{R}$

- gibt $|a|$ den Abstand von a zur Null an,
- gibt $|a - b| = |b - a|$ den Abstand zwischen a und b an.



Zum Abschluss dieses Kapitels ein Kuriosum aus der mathematischer Unterhaltungsliteratur. Es geht um eine Gesetzesvorlage vom Ende des 19. Jahrhunderts im Landesparlament des US-Bundesstaates Indiana..

- ab 1892 veröffentlicht der Arzt (und Hobby-Mathematiker) Edward J. Goodwin mehrere Arbeiten zur Quadratur des Kreises. Eine Behauptung: $\pi = 3.2$
- 1897 Gesetzesvorlage für Parlament von Indiana zur Festlegung von π. Zweck: Vermeidung von Gebühren an Urheber
- Entwurf zunächst im Ausschuss für Kanalwesen, dann an Bildungsausschuss verwiesen, von diesem befürwortet.
- Entwurf passiert eine Parlamentskammer nach 3 Lesungen mit 67:0 Stimmen.
- Mathematik-Professor Clarence Abiathar Waldo (Purdue University) interveniert, „berät“ einige maßgeblichen Senatoren.
- Entscheidung auf unbestimmte Zeit vertagt (Wert der Vorlage nicht einschätzbar, Sache aber nicht für Gegenstand der Gesetzgebung gehalten)

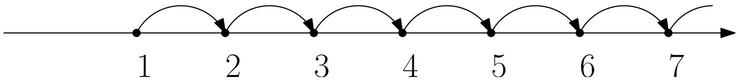
Inhalt

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Ausgehend von den reellen Zahlen findet man leicht folgende Charakterisierung der natürlichen Zahlen:

Die natürlichen Zahlen sind die kleinste Teilmenge von $\mathbb{R}$, die sowohl die Zahl 1 und mit jeder Zahl n auch deren **Nachfolger** $n+1$ enthält.

Visualisierung am Zahlenstrahl:



Daraus können wir nun ein wichtiges Beweisprinzip ableiten.

Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Satz 2.12 (Prinzip der vollständigen Induktion)

Eine Aussageform $A(n)$ ist genau dann für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr, wenn

- $A(1)$ *wahr ist (**„Induktionsanfang“**),*
- *aus der Gültigkeit von $A(n)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ stets die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt (**„Induktionsschritt“**).*

Der Induktionsschritt sichert also folgende „Kette“ von Implikationen:

$$A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \ldots \Rightarrow A(n) \Rightarrow A(n+1) \Rightarrow \ldots$$

Man ist natürlich nicht zwingend auf den Startwert 1 festgelegt. Man kann im Induktionsanfang auch bei einem beliebigen $n_0 \in \mathbb{Z}$ starten, muss dann aber auch den Induktionsschritt für $n \geq n_0$ beweisen.

Beispiel 2.13 (Bernoullische Ungleichung)

Man beweise folgende Ungleichung mittels vollständiger Induktion:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Wir führen eine vollständige Induktion über n aus.

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt

$$(1+x)^n = 1+x = 1+n \cdot x,$$

d. h. die Aussage ist für alle $x \geq -1$ wahr.

Induktionsschritt:

Angenommen, (2.1) ist für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr, d. h.

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (x \geq -1) \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung, IV).}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) \qquad \text{(nach IV)} \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x \qquad \text{(da } nx^2 \geq 0\text{).}
\end{aligned}$$

Aus der Gültigkeit von (2.1) für n folgt also die Gültigkeit für $n+1$.

Inhalt

Abbildungen und Funktionen

Hier sollen nur die grundlegenden Begriffe bereitgestellt/wiederholt werden. Eine intensive Beschäftigung mit der Materie erfolgt später.

Definition 2.14 (Funktion)

Seien A und B Mengen. Eine Abbildung oder Funktion $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, durch die jedem $x \in A$ **genau** ein $y = f(x) \in B$ zugeordnet wird.

A heißt Definitionsbereich von f und $f(A) := \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$ heißt Wertebereich oder Bild von f.

Für $x \in A$ heißt $y = f(x)$ Bild von x unter f oder Funktionswert von f an der Stelle x.

Zwei Funktionen $f : D_f \to B$, $x \mapsto f(x)$, und $g : D_g \to C$, $x \mapsto g(x)$, heißen gleich ($f = g$), wenn $D_f = D_g$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D_f = D_g$ gelten.

Abbildungen und Funktionen

Schreibweisen:

$$\begin{array}{c} f : A \to B \\ y = f(x) \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{c} f : A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{array} .$$

Beschreibung von Funktionen

Eine Funktion $f : A \to B$ kann man auf verschiedene Weisen beschreiben:

- analytisch, d.h. durch Angabe der Zuordnungsvorschrift,
- tabellarisch, d.h. durch eine Wertetabelle,
- graphisch, d.h. durch Visualisierung der Menge

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B,$$

  des sogenannten Graphen von f.
  (Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist der Graph von f eine „Kurve“ im $\mathbb{R}^2$.)

Definition 2.15

Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Zu einer Menge $A' \subseteq A$ heißt

$$f(A') := \{f(x) : x \in A'\} \subseteq B$$

das Bild von A' unter f. Zu einer Menge $B' \subseteq B$ heißt

$$f^{-1}(B') := \{x \in A : \ f(x) \in B'\}$$

das Urbild von B' unter f.

Man bestimme $f([1,2])$ und $f^{-1}([1,4])$ für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^2$.

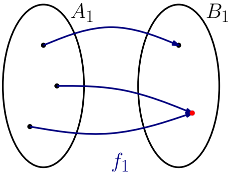
Definition 2.16

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

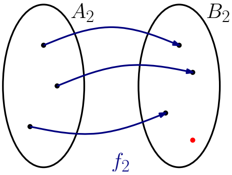
- injektiv (eineindeutig), wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt,
- surjektiv, wenn es zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ gibt mit $y = f(x)$,
- bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Ist f bijektiv, so existiert die Umkehrfunktion

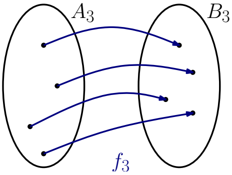
$$f^{-1} : B \to A, \qquad f^{-1}(y) = x \;:\Leftrightarrow\; y = f(x).$$



surjektiv, nicht injektiv



injektiv, nicht surjektiv



bijektiv

Ist die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2$ injektiv/surjektiv/bijektiv?
Wie verhält es sich mit

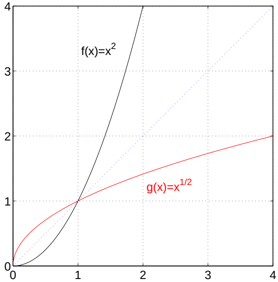
- $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f_2(x) = x^2$,
- $f_3 : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_3(x) = x^2$,
- $f_4 : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f_4(x) = x^2$?

Beispiel 2.17 ($n-$te Wurzel)

Die Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ bijektiv. Die Umkehrfunktion ist die $n-$te Wurzel:

$$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

Beachten Sie: die $n-$te Wurzel ist für negative Zahlen **nicht** definiert. Statt $\sqrt[2]{x}$ schreibt man kurz $\sqrt{x}$.



Situation für $n = 2$. Wie bei allen reellen Funktionen entsteht der Graph von f^{-1} durch Spiegeln des Graphen von f an der Geraden $y = x$.

Inhalt

Erinnern Sie sich an die Zahlbereichserweiterungen? Unser Ziel war dabei, bestimmte Gleichungstypen uneingeschränkt lösen zu können.

Z. B. hatte $x + 5 = 2$ in $\mathbb{N}$ keine Lösung. Erweitert man den Zahlbereich zu $\mathbb{Z}$, so lässt sich eine Lösung angeben ($x = -3$).

In den **reellen** Zahlen sind quadratische Gleichungen nicht immer lösbar: $x^2 = 1$ hat in $\mathbb{R}$ zwei Lösungen ($x_{1/2} = \pm 1$), dagegen hat $x^2 = -1$ in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

Um diesen „Mangel" zu beheben, kann man eine weitere Zahlbereichserweiterung durchführen. Der initiale Schritt ist dabei das Hinzufügen einer neuen Zahl i, die $i^2 = -1$ erfüllt.

Definition 2.18 (Komplexe Zahl)

Eine komplexe Zahl z ist ein Ausdruck der Form

$$z = a + ib \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R},$$

Die Zahl i (mit der Eigenschaft $i^2 = -1$) heißt imaginäre Einheit.

$a =: \operatorname{Re} z$ heißt Realteil von z,
$b =: \operatorname{Im} z$ heißt Imaginärteil von z.

Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sowohl die Realteile als auch die Imaginärteile übereinstimmen.

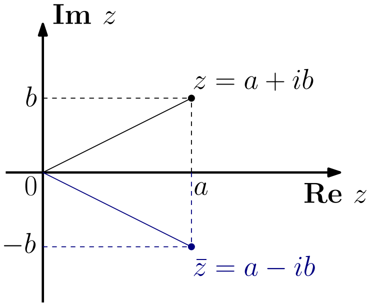
Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Statt $x + i0$ schreibt man x, d.h. reelle Zahlen sind komplexe Zahlen mit Imaginärteil 0. In diesem Sinne gilt also $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Definition 2.19

Sei $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ eine komplexe Zahl. Dann heißt

- $\bar{z} := a - ib$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.
- $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ der Betrag von $|z|$.



Eine komplexe Zahl z veranschaulicht man sich als Punkt der Gaußschen Zahlenebene mit den Koordinaten $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$.

Rechenoperationen in $\mathbb{C}$

Für $z = a + ib,\ w = c + id \in \mathbb{C}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ definiert man

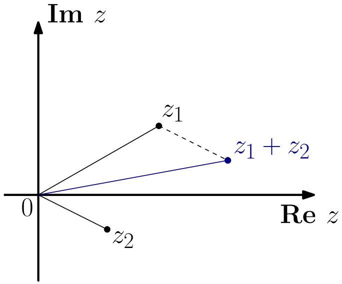
$$\begin{aligned}
z + w &:= (a + c) + i(b + d),\\
z - w &:= (a - c) + i(b - d),\\
zw &:= (ac - bd) + i(ad + bc),\\
\tfrac{z}{w} &:= \tfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\tfrac{bc-ad}{c^2+d^2} \quad (w \neq 0).
\end{aligned}$$

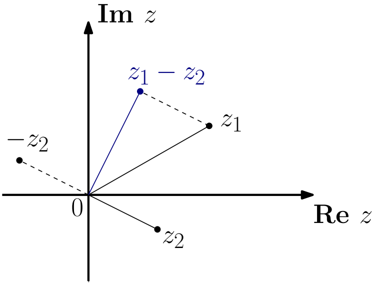
Diese Operationen sind so definiert, dass man die gewohnten Vorstellungen von den reellen Zahlen unter Beachtung von $i^2 = -1$ direkt übertragen kann.

Die Division lässt sich als „Erweitern" mit dem Konjugiert-Komplexen des Nenners auffassen:

$$\frac{z}{w} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}.$$

Man gebe zu $z_1 = 1,\ z_2 = -i,\ z_3 = -3 + 2i,\ z_4 = 1 + i$ Real- und Imaginärteil an und zeichne die zugehörigen Punkte in die Gaußschen Zahlenebene. Man berechne $z_3 + z_4$, $z_3 - z_4$, $z_3 \cdot z_4$ sowie z_3/z_4.
Wie lautet die kartesische Form der Zahl $\frac{1}{i}$?

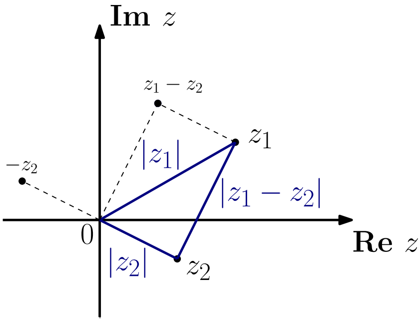


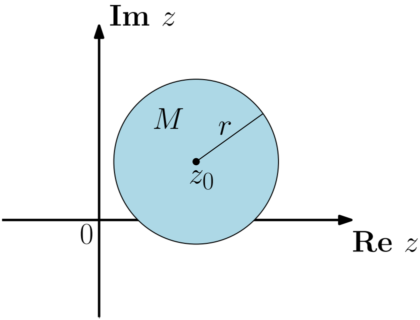


Beachten Sie die Analogie zur Vektorrechnung!

In der Gaußschen Zahlenebene charakterisiert

- $|z|$ den Abstand einer Zahl z zum Koordinatenursprung
- $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ den Abstand zwischen z_1 und z_2 in der Gaußschen Zahlenebene.
- die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$ für $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe um z_0 mit Radius r.





Mit der eingeführten Addition und Multiplikation bildet $\mathbb{C}$ einen Zahlkörper. Konsequenzen sind:

Die arithmetischen Gesetze der reellen Zahlen (vgl. S. 41) gelten auch für komplexe Zahlen.

Satz 2.20

Die Rechenregeln für reelle Zahlen (Satz 2.7) sowie die binomischen Formeln und deren Verallgemeinerungen (vgl. S. 43) gelten auch für komplexe Zahlen.

Wie gewohnt schreiben wir dabei für $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$

$$z^n := z \cdot z \cdot \ldots \cdot z \quad (n \text{ Faktoren}), \quad z^0 := 1, \quad z^{-n} := \frac{1}{z^n} \; (z \neq 0).$$

Finden Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $z^2(z+1)(z-4+i) = 0$.

Satz 2.21

Für $z, w \in \mathbb{C}$ *gelten*

- $\bar{\bar{z}} = z$,
- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$, $\quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$,
- $z\bar{z} = |z|^2$, $\quad |\bar{z}| = |z|$,
- $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,
- $z = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$.

Beweisen Sie einige dieser Regeln.

Satz 2.22

Für $z, w \in \mathbb{C}$ *gelten*

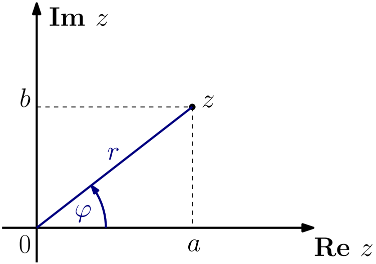
- $|z| \geq 0$, *wobei* $|z| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$,
- $|z| = |-z|$,
- $|zw| = |z||w|$,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ ***(Dreiecksungleichung)***.

Warum lassen sich die Regeln

- $|a| = c \;\Rightarrow\; a = c$ oder $a = -c$,
- $|a| \leq c \;\Leftrightarrow\; -c \leq a \leq c$.

für $a \in \mathbb{R},\ c \geq 0$ **nicht** auf komplexe Zahlen anwenden?

Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ ist auch über ihre Polarkoordinaten in der Gaußschen Zahlenebene eindeutig charakterisiert:



Dabei ist

- $r = |z|$ der Abstand von z zu 0,
- φ der „Drehwinkel" des Ortsvektors zu z, gemessen von der reellen Achse im Gegenuhrzeigersinn.

Mir den klassischen Definitionen von Sinus und Kosinus am Einheitskreis gilt also für $z = a + ib$:

$$z = r\cos\varphi + i \cdot r\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Definition 2.23 (Polarform)

Für $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R}), z \neq 0$, heißt $\varphi = \arg(z)$ Argument von z, falls

$$|z|\cos\varphi = a \quad \text{und} \quad |z|\sin\varphi = b. \tag{2.2}$$

Die Darstellung

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

heißt Polarform von z.

Das Argument ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π festgelegt. Man wählt häufig $\varphi \in [0, 2\pi)$, um Eindeutigkeit zu erhalten, und spricht dann vom **Hauptwert** des Arguments.

- Von der Polarform $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ zur kartesischen Form gelangt man durch Ausmultiplizieren.
- Von der kartesischen Form $z = a + ib$ zur Polarform gelangt man mit $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und (2.2).

  Zur Bestimmung des Arguments kann man auch

  $$\tan\varphi = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

  benutzen, muss dabei aber auf Quadrantenbeziehungen achten (der Fall $a = 0$ ist trivial).

Wie lautet die Polarform von $2i, -1, -3 + 2i$?

Die Zahl $e^{i\varphi}$ $(\varphi \in \mathbb{R})$ spielt im Zusammenhang mit der Polarform eine wichtige Rolle. Da uns noch keine Potenzreihen zur Verfügung stehen, definieren wir sie vorläufig mittels

Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (\varphi \in \mathbb{R})$$

Damit kann man jede komplexe Zahl $z \neq 0$ schreiben als

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi} \qquad (\varphi = \arg(z)).$$

Diese Darstellung nennt man **Eulersche**, **Exponential**- oder einfach wieder **Polardarstellung** von z.

Im Einklang mit den Potenzgesetzen schreiben wir ferner $e^z = e^a e^{ib}$ für eine beliebige komplexe Zahl $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Auch dies wollen wir vorläufig als Definition verstehen.

Es lässt sich zeigen, dass die komplexe Exponentialfunktion ähnlichen Gesetzen genügt, wie die reelle:

Satz 2.24

Für $z, w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ *gelten:*

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w, \quad e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}, \quad (e^z)^n = e^{nz},$$

insbesondere also für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$*:*

$$e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}, \quad e^{i(\varphi-\psi)} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}}, \quad (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

Die Eulersche Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $(\varphi \in \mathbb{R})$ liefert den Schlüssel für folgende Beobachtung:

- $e^{i\varphi}$ ist die komplexe Zahl auf dem Einheitskreis, deren Argument φ ist.

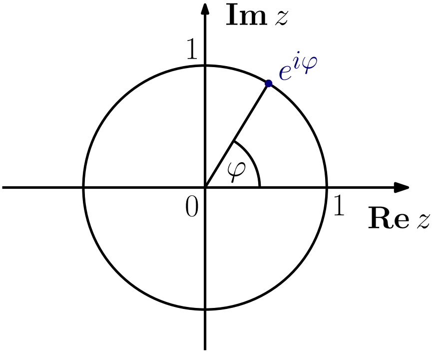


Bild rechts: Leonhard Euler (1707-1783), Schweizer Mathematiker.

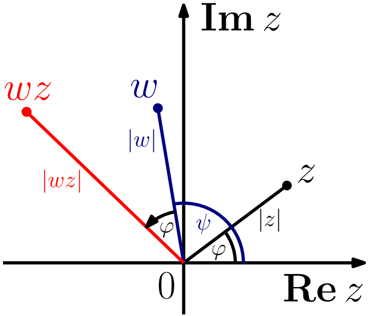
Für zwei komplexe Zahlen $z, w \neq 0$ mit den Polardarstellungen

$$\begin{aligned} z &= |z|\, e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ w &= |w|\, e^{i\psi} = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \quad (\varphi, \psi \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

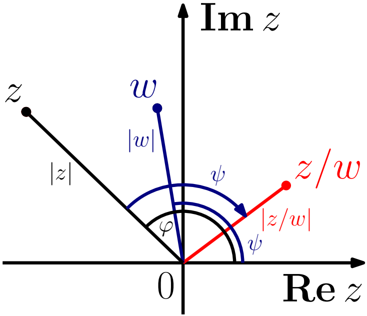
erhält man

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z||w|\, e^{i\varphi} e^{i\psi} \\ &= |zw|\, e^{i(\varphi+\psi)} \\ &= |zw|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)), \\ \frac{z}{w} &= \frac{|z|\, e^{i\varphi}}{|w|\, e^{i\psi}} \\ &= \left|\frac{z}{w}\right| e^{i(\varphi-\psi)} \\ &= \left|\frac{z}{w}\right| (\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)), \end{aligned}$$

d.h. $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$ und $\arg(\frac{z}{w}) = \arg(z) - \arg(w)$



Im z
Re z
0
wz
w
z
$|wz|$
$|w|$
$|z|$
φ
ψ
φ



Im z
Re z
0
z
w
z/w
$|z|$
$|w|$
$|z/w|$
ψ
φ
ψ

Für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ mit Polardarstellung $z = |z|\, e^{i\varphi}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt weiterhin

$$z^n = |z|^n \,(e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Bei der Ermittlung der Lösungen von $w^n = z$ zu einer gegebenen komplexen Zahl $z = |z|\, e^{i\varphi}$ ist zu beachten, dass $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ im Gegensatz zum reellen Fall $2\pi-$periodisch ist, d.h.

$$e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2k\pi)} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Somit liefert die (formale) Anwendung der Potenzgesetze

$$w^n = |z|\, e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad w = |z|^{\frac{1}{n}}\, e^{i\,\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n})}.$$

Auch die Periode 2π wird also durch n geteilt, wodurch n **verschiedene** „n-te Wurzeln“ von z entstehen.

Wir fassen unsere Vorüberlegung folgendermaßen zusammen:

Satz 2.25 (Potenzieren und Radizieren in $\mathbb{C}$)

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

- *Die $n-$te Potenz von $z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(\varphi \in \mathbb{R})$ ergibt sich zu*
$$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$
*Insbesondere gilt die **de Moivresche Formel***
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$
- *Für jede Zahl $z = |z|e^{i\varphi}$ besitzt die Gleichung $w^n = z$ genau n verschiedene Lösungen*
$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}))$$
mit $k = 0, \ldots, n-1$.

Die $n-$ten Wurzeln von $|z|e^{i\varphi}$ liegen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{|z|}$ um den Nullpunkt und bilden ein regelmäßiges $n-$Eck.

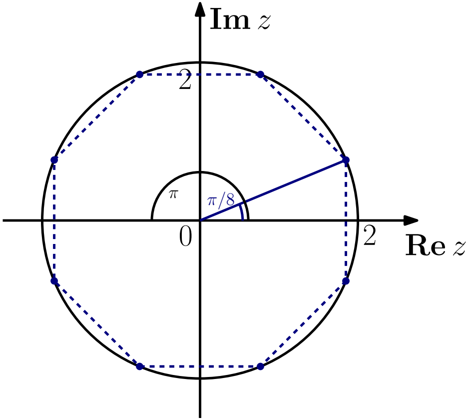


Illustration am Beispiel der 8-ten Wurzeln von $-256 = 256e^{i\pi}$.

Mit Hilfe der Eulerschen und der de Moivreschen Formel lassen sich Beziehungen für trigonometrische Funktionen zeigen, z. B.

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$,
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (\sin^n x := (\sin x)^n$, analog für $\cos)$
- $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$,
- $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Beweisen Sie einige dieser Beziehungen.

Bei der Bestimmung $n-$ter Wurzeln wurden Gleichungen der Form $z^n - a = 0$ gelöst. Wir wollen die Frage der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen allgemeiner untersuchen. Folgende Terminologie:

Eine Abbildung der Form

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

mit festen Zahlen („**Koeffizienten**“) $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ heißt komplexes Polynom vom Grad $\deg(p) = n$.

Eine Zahl $w \in \mathbb{C}$ heißt **Nullstelle** von p, falls $p(w) = 0$.

Besitzt ein Polynom p vom Grad $n \geq 1$ eine Nullstelle w, so lässt sich p ohne Rest durch $(z - w)$ teilen, d.h. es gibt ein Polynom q von Grad $n - 1$ mit

$$p(z) = (z - w)\, q(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Anders als in $\mathbb{R}$ gilt in den komplexen Zahlen folgende Aussage:

Satz 2.26 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt mindestens eine ***komplexe*** *Nullstelle.*

Von jedem Polynom p mit Grad $n \geq 1$ kann man also einen Linearfaktor abspalten. Ist der verbleibende Rest mindestens vom Grad 1, kann man dies natürlich erneut tun usw. . . Wir halten fest:

Folgerung 2.27

Das Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sei gegeben durch*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Dann existieren komplexe Zahlen $w_1, \ldots, w_n$ *mit*

$$p(z) = a_n (z - w_1)(z - w_2) \ldots (z - w_n). \tag{2.3}$$

Jedes komplexe Polynom hat also sogar n *Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) und zerfällt vollständig in Linearfaktoren.*

Die Berechnung der Nullstellen gemäß Satz 2.26 und Folgerung 2.27 ist i. Allg. nur numerisch möglich. Ausnahmen bilden n-te Wurzeln oder quadratische Gleichungen mit **reellen** Koeffizienten:

Satz 2.28

Die komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0, \qquad p, q \in \mathbb{R},$$

sind gegeben durch

$$z_{1,2} = \begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q \geq 0, \\ -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, & \text{falls } \frac{p^2}{4} - q < 0. \end{cases}$$

Verifizieren Sie den zweiten Fall durch Modifikation der bekannten Herleitung der p–q–Formel. Geben Sie die komplexen Lösungen von $z^2 - 4z + 5 = 0$ an.

Das Auftreten konjugiert komplexer Zahlen in der p-q-Formel lässt sich verallgemeinern:

Satz 2.29

Sind die Koeffizienten des Polynoms

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

allesamt ***reell****, so sind die Nullstellen reell ($\lambda_j \in \mathbb{R}$) oder treten in konjugiert komplexen Paaren ($\alpha_j \pm i\beta_j$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$) auf. Es existiert eine Zerlegung der Form*

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - \lambda_j) \prod_{j=1}^{m} ((z - \alpha_j)^2 + \beta_j^2), \tag{2.4}$$

wobei $k + 2m = n$. Jedes ***reelle Polynom*** *lässt sich also als Produkt von Linearfaktoren und quadratischen Polynomen schreiben.*

Geben Sie Zerlegungen von $p(z) = z^3 + z$ gemäß (2.3) und (2.4) an.

In der Wechselstromtechnik treten häufig sinus-/cosinusförmige Spannungs- bzw. Stromverläufe auf:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t) \\ u(t) &= U_m \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

(I_m, U_m Amplituden, t Zeit, $\omega = 2\pi f$ Kreisfrequenz, f Frequenz (Netz in D: $f = 50\,\mathrm{Hz}$))

Der Winkel φ charakterisiert die i.A. auftretende **Phasenverschiebung** zwischen Strom und Spannung.

Ursache für die Phasenverschiebung sind verschiedene „Arten“ von Widerständen im Wechselstromkreis:

- **Ohmscher Widerstand** R:
  $U_m = R\,I_m$, keine Phasenverschiebung,
- **Induktivität** L (Spule):
  $U_m = \omega L I_m$, Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$,
  Hintergrund Selbstinduktion/Lenzsches Gesetz,
- **Kapazität** C (Kondensator):
  $U_m = \frac{1}{\omega C}\ I_m$, Phasenverschiebung -$\frac{\pi}{2}$,
  Hintergrund: fortwährende Ladungs-/Entladungsvorgänge.

Es müssen also nicht nur die reellen Proportionalitätsfaktoren, sondern auch die Phasenverschiebungen beachtet werden.

Trick: Verwende zur Berechnung komplexe Ströme und Spannungen und interpretiere dabei nur den Realteil:

$$i(t) = I_m e^{i\omega t}, \qquad u(t) = U_m e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Mit folgenden **komplexen** Widerständen $\tilde{R}$ gilt dann das Ohmsche Gesetz $u(t) = \tilde{R}\, i(t)$ auch hier:

- Ohmscher Widerstand $R \in \mathbb{R}$:

$$u(t) = U_m e^{i\omega t} = R I_m e^{i\omega t} = R i(t),$$

- Induktiver Widerstand $R_L = i\omega L$:

$$u(t) = U_m e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} = i\omega L\, I_m e^{i\omega t} = R_L i(t) \qquad \text{(beachte } i = e^{i\frac{\pi}{2}}\text{)}$$

- Kapazitiver Widerstand $R_C = -i\frac{1}{\omega C}$:

$$u(t) = U_m e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} = -\frac{i}{\omega C} I_m e^{i\omega t} = R_C i(t) \quad \text{(beachte } -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}\text{)}$$

Für einen komplexen Widerstand R bezeichnet man $\operatorname{Re} R$ als **Wirk-** und $\operatorname{Im} R$ als **Blindwiderstand**. Ohmsche Widerstände sind reine Wirkwiderstände, kapazitive und induktive reine Blindwiderstände.

Vorteile der komplexen Wechselstromrechnung:

- Das Ohmsche Gesetz gilt wie gewohnt (für die Realteile gilt es nicht!),
- Phasenverschiebung $\arg R$ und **Scheinwiderstand** $|R| = U_m/I_m$ werden gleichzeitig erfasst,
- Die Kirchhoffschen Gesetze und ihre Folgerungen gelten damit auch im Wechselstromkreis, z. B.

$$R = R_1 + R_2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

für Reihen-/Parallelschaltung zweier Widerstände.

Weitere Anwendungen der komplexen Zahlen finden sich an verschiedensten Stellen. Einige werden Sie im Laufe ihres Studiums sicher kennenlernen, z.B.

- Die mit bestimmten Differentialgleichungen verknüpften „Eigenwerte“ sind komplexe Zahlen. Standardanwendungen sind Federschwinger oder Fadenpendel.
- In der Signal- oder Bildanalyse verwendet man oft die komplexwertige Fouriertransformierte, um Frequenzanalysen oder -filterungen durchzuführen.
- In der Quantenmechanik werden Teilchen durch ihre komplexwertige Zustandsfunktion beschrieben. Interpretiert wird nur deren Quadrat („Ortsauffindungswahrscheinlichkeitsdichte“)

Ziele erreicht?

Sie sollten nun (bzw. nach Abschluss der Übungen/Nacharbeiten des Stoffes):

- sicher mit reellen Zahlen, Gleichungen und Ungleichungen umgehen können,
- sicher mit komplexen Zahlen umgehen können (Arithmetik in kartesischer und Polarform, Potenzen und Wurzeln, einfache Gleichungen, Veranschaulichungen in der Gaußschen Zahlenebene),
- einfache bis mäßig schwierige logische Zusammenhänge und Schlüsse erfassen können,
- Überblickswissen über den Aufbau mathematischer Theorie im allgemeinen besitzen,
- eine grobe Vorstellung vom axiomatischen Aufbau von Zahlenbereichen haben,
- erste Vorstellungen entwickelt haben, wozu man das bisher vermittelte Wissen in der Informatik/Elektrotechnik braucht.

Sie sind sich nicht sicher oder meinen „nein“? Dann werden Sie aktiv!