The Estimates of Powers of Operator Generated by Iirational Rotation

Ali A. Shukur

Belarusian State University
IWOTA 2017

Introduction

Definition

An analytic function $R(\lambda; T) := (T - \lambda I)^{-1}$ defined on resolvent set $\rho(T)$ is called *resolvent operator.*

Definition

An operator T is called *power-bounded* if there exists constant C such that

$$\sup_{n \geq 0} \|T^n\| = C < \infty.$$

Introduction

Definition

An analytic function $R(\lambda;T) := (T-\lambda I)^{-1}$ defined on resolvent set $\rho(T)$ is called *resolvent operator*.

Definition

An operator T is called *power-bounded* if there exists constant C such that

$$\sup_{n\geq 0} \|T^n\| = C < \infty.$$

Weighted Shift Operator

Definition

A bounded linear operator T on a Banach space $F(X)$ of functions or vector-valued functions on a set X is called *weighted Shift operator* (WCO) if it can by represented in the form

$$Tu(x) = a(x)u(\alpha(x)), \quad x \in X, \tag{1}$$

where $\alpha : X \to X$ is a given map and $a(x)$ is a scalar- or matrix-valued function on X.

Weighted Shift Operator Generated by Rotation

If we consider representation

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z},$$

then a rotation on the unit circle can be formulated in an additive form, i.e. the map $\gamma : x \to x + h$ acts as a rotation of angle $2\pi h$ on unit circle $\mathbb{S}^1$.

Definition

An operator T_γ acting on $C(\mathbb{S}^1)$ by formula

$$T_\gamma u(x) = u(\gamma(x)),$$

is called *a rotation operator*. For any $a \in C(\mathbb{S}^1)$, an operator acting by formula

$$(aT_h u)(x) = a(x)u(x+h), \tag{2}$$

is called *a weighted shift operator generated by rotation*.

Denete by

$$a_n(x) = \prod_{j=0}^{n-1} |a(x+jh)|.$$

Norm of powers of operator (2) is given by

$$\|[aT_h]^n\| = \max_x a_n(x).$$

Lemma (1.)

Let aT_h *be a weighted shift operator generated by rotation.*

1. *If* h *is a rational number, i.e.* $h =: \frac{m}{N}, N \neq 0,$ *– some fractions, then* $\sigma(aT_h) = \Sigma_N(a)$ *where*

$$\Sigma_N(a) = \{\lambda : \exists x \in X, \lambda^N = a_N(x)\}.$$

2. *If* h *is irrational number, then* $\sigma(aT_h) = \{\lambda : |\lambda| = \Phi(a)\}$*, where* $\Phi(a)$ *is the geometric average of* a*, i.e.*

$$\Phi(a) = \exp[\int_0^1 \ln |a(x)| dx] \tag{3}$$

and $R(aT_h) = \Phi(a)$.

Theorem (Sh. (2015))

Let $h = \frac{m}{N}, m \neq 0$. *There exists constant* $C = C(a, N)$ *such that for the norm of powers of operator* aT_h *satisfies*

$$R(aT_h)^n \leq \|[aT_h]^n\| \leq C(a, N)R(aT_h)^n.$$

In particular, if $n = \nu N$, *then*

$$\|[aT_h]^n\| = R(a; N)^n;$$

if $n = \nu N + l, 1 < l < N$, *then*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|[aT_h]^n\|}{R(a; N)^n} = \max_{s\in M(l)} |a_l(s)|,$$

where

$$M(l) = \{t : |a_l(t)| = \max_x a_l(x)\}.$$

Assume that the spectral radius in (3) is equal to 1, then

$$\int_0^1 \varphi(x) = 0, \tag{4}$$

where $\varphi(x) = \ln|a(x)|$ and

$$\ln\|[aT_h]^n\| = \max_x \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(x + jh).$$

The convergence of the sequence $\varphi_n(x)$ is relate to different aspects, in particular, to homological equation

$$g(x+h) - g(x) = \varphi(x) \tag{5}$$

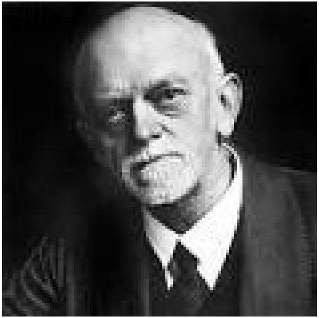
and to problem of small denominators[1].
The equality (4) is the necessary condition but not the sufficient of solution of (5).

However, the equation (5) has been cited as an example when the sole solutions of analytical functional equations are non-differentiable functions in

Fifth Hilbert's Problem

[1] V.I Arnold, *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Uspehi Mat. Nauk, 18:6(114) (1963), P.91–192

II International Congress of Mathematicians in Paris on 8 August 1900

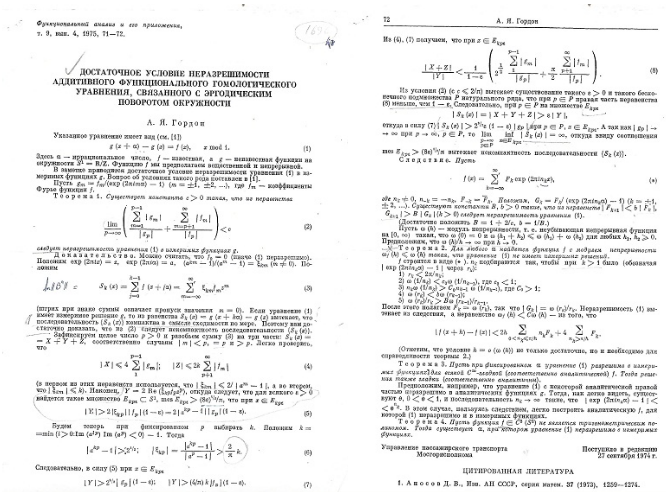


"Who of us would not be glad to lift the veil behind which the future lies hidden; to cast a glance at the next advances of our science and at the secrets of its development during future centuries?" Thus David Hilbert began his historic speech on mathematical problems at the International Congress of Mathematicians in 1900.

David Hilbert 1862-1943.
*IMU and Wikipedia.

Theorem (Gordon, 1975)

If $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{S}^1)$ is not trigonometrical polynomial, then there exsits an irrational number h for which the equation (5) has no measurable solutions.



Функциональный анализ и его приложения,
т. 9, вып. 4, 1975, 71—72.

1696

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ НЕРАЗРЕШИМОСТИ АДДИТИВНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ГОМОЛОГИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННОГО С ЭРГОДИЧЕСКИМ ПОВОРОТОМ ОКРУЖНОСТИ

А. Я. Гордон

Указанное уравнение имеет вид (см. [1])

$$g(x+\alpha) - g(x) = f(x), \quad x \bmod 1. \tag{1}$$

Здесь α — иррациональное число, f — известная, а g — неизвестная функции на окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Функцию f мы предполагаем вещественной и непрерывной.

В заметке приводится достаточное условие неразрешимости уравнения (1) в измеримых функциях g. Вопрос об условиях такого рода поставлен в [1].

Пусть $g_m = f_m/(\exp(2\pi i m\alpha) - 1)$ $(m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, где f_m — коэффициенты Фурье функции f.

Теорема 1. *Существует константа $c > 0$ такая, что из неравенства*

$$\varliminf_{p\to\infty} \left(\frac{\sum_{m=1}^{p-1} |g_m|}{|g_p|} + \frac{\sum_{m=p+1}^{\infty} |f_m|}{|f_p|} \right) < c \tag{2}$$

следует неразрешимость уравнения (1) в измеримых функциях g.

Доказательство. Можно считать, что $f_0 = 0$ (иначе (1) неразрешимо). Положим $\exp(2\pi i x) = z$, $\exp(2\pi i \alpha) = a$, $(a^{km} - 1)/(a^m - 1) = \xi_{km}$ $(m \neq 0)$. Положим

$$S_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} f(x + j\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \xi_{km} f_m z^m \tag{3}$$

(штрих при знаке суммы означает пропуск значения $m = 0$). Если уравнение (1) имеет измеримое решение g, то из равенства $S_k(x) = g(x + k\alpha) - g(x)$ вытекает, что последовательность $(S_k(x))$ компактна в смысле сходимости по мере. Поэтому нам достаточно доказать, что из (2) следует некомпактность последовательности $(S_k(x))$.

Зафиксируем целое число $p > 0$ и разобьем сумму (3) на три части: $S_k(x) = X + Y + Z$, соответственно случаям $|m| < p$, $= p$ и $> p$. Легко проверить, что

$$|X| \leqslant 4 \sum_{1}^{p-1} |g_m|; \quad |Z| \leqslant 2k \sum_{p+1}^{\infty} |f_m| \tag{4}$$

(в первом из этих неравенств используется, что $|\xi_{km}| \leqslant 2/|a^m - 1|$, а во втором, что $|\xi_{km}| \leqslant k$). Наконец, $Y = 2\,\mathrm{Re}\,(\xi_{kp} f_p z^p)$, откуда следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $E_{kp\varepsilon} \subset S^1$, $\operatorname{mes} E_{kp\varepsilon} > (8\varepsilon)^{1/2}/\pi$, что при $x \in E_{kp\varepsilon}$

$$|Y| > 2|\xi_{kp}||f_p|(1-\varepsilon) = 2|a^{kp} - 1||g_p|(1-\varepsilon). \tag{5}$$

Будем теперь при фиксированном p выбирать k. Положим $k = \min\{l > 0 : \mathrm{Im}\,(a^{lp})\,\mathrm{Im}\,(a^p) < 0\} - 1$. Тогда

$$|a^{kp} - 1| > 2^{1/2}; \quad |\xi_{kp}| = \frac{|a^{kp} - 1|}{|a^p - 1|} > \frac{2}{\pi} k. \tag{6}$$

Следовательно, в силу (5) при $x \in E_{kp\varepsilon}$

$$|Y| > 2^{3/2} |g_p| (1-\varepsilon); \quad |Y| > (4/\pi)\, k\, |f_p| (1-\varepsilon). \tag{7}$$

Из (4), (7) получаем, что при $x \in E_{kp\varepsilon}$

$$\frac{|X+Z|}{|Y|} < \frac{1}{1-\varepsilon} \left(2^{\frac{1}{2}} \frac{\sum_{1}^{p-1} |g_m|}{|g_p|} + \frac{\pi}{2} \frac{\sum_{p+1}^{\infty} |f_m|}{|f_p|} \right). \tag{8}$$

Из условия (2) (с $c \leqslant 2/\pi$) вытекает существование такого $\varepsilon > 0$ и такого бесконечного подмножества P натурального ряда, что при $p \in P$ правая часть неравенства (8) меньше, чем $1 - \varepsilon$. Следовательно, при $p \in P$ на множестве $E_{kp\varepsilon}$

$$|S_k(x)| = |X + Y + Z| > \varepsilon |Y|,$$

откуда в силу (7) $|S_k(x)| > 2^{3/2}\varepsilon(1-\varepsilon)|g_p|$ при $p \in P$, $x \in E_{kp\varepsilon}$. А так как $|g_p| \to \infty$ при $p \to \infty$, $p \in P$, то $\lim\limits_{\substack{p\to\infty\\ p\in P}} \inf\limits_{x \in E_{kp\varepsilon}} |S_k(x)| = \infty$, откуда ввиду соотношения $\operatorname{mes} E_{kp\varepsilon} > (8\varepsilon)^{1/2}/\pi$ вытекает некомпактность последовательности $(S_k(x))$.

Следствие. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' F_k \exp(2\pi i n_k x), \tag{*}$$

где $n_k \neq 0$, $n_{-k} = -n_k$, $F_{-k} = \overline{F}_k$. Положим, $G_k = F_k/(\exp(2\pi i n_k \alpha) - 1)$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Существуют константы B, $b > 0$ такие, что из неравенств $|F_{k+1}| < b|F_k|$, $|G_{k+1}| > B|G_k|$ $(k > 0)$ следует неразрешимость уравнения (1).

(Достаточно положить $B = 1 + 2/c$, $b = 1/B$.)

Пусть $\omega(h)$ — модуль непрерывности, т. е. неубывающая непрерывная функция на $[0, \infty)$ такая, что $\omega(0) = 0$ и $\omega(h_1 + h_2) \leqslant \omega(h_1) + \omega(h_2)$ для любых $h_1, h_2 \geqslant 0$. Предположим, что $\omega(h)/h \to \infty$ при $h \to 0$.

Теорема 2. *Для любого α найдется функция f с модулем непрерывности $\omega_f(h) \leqslant \omega(h)$ такая, что уравнение (1) не имеет измеримых решений.*

f строится в виде (*). n_k подбираются так, чтобы при $k > 1$ было (обозначая $|\exp(2\pi i n_k \alpha) - 1|$ через r_k):

1) $r_k < 2\pi/n_k$;
2) $\omega(1/n_k) < c_1 \omega(1/n_{k-1})$, где $c_1 < 1$;
3) $n_k \omega(1/n_k) > C_0 n_{k-1} \omega(1/n_{k-1})$, где $C_0 > 1$;
4) $\omega(r_k) < b\omega(r_{k-1})$;
5) $\omega(r_k)/r_k > B\omega(r_{k-1})/r_{k-1}$.

После этого полагаем $F_k = \omega(r_k)$, так что $|G_k| = \omega(r_k)/r_k$. Неразрешимость (1) вытекает из следствия, а неравенство $\omega_f(h) < C\omega(h)$ — из того, что

$$|f(x+h) - f(x)| < 2h \sum_{0 < n_k \leqslant \pi/h} n_k F_k + 4 \sum_{n_k > \pi/h} F_k.$$

(Отметим, что условие $h = o(\omega(h))$ не только достаточно, но и необходимо для справедливости теоремы 2.)

Теорема 3. *Пусть при фиксированном α уравнение (1) разрешимо в измеримых функциях для всякой C^∞-гладкой (соответственно аналитической) f. Тогда решения также гладки (соответственно аналитичны).*

Предположим, например, что уравнение (1) с некоторой аналитической правой частью неразрешимо в аналитических функциях g. Тогда, как легко видеть, существуют θ, $0 < \theta < 1$, и последовательность $n_k \to \infty$ такие, что $|\exp(2\pi i n_k \alpha) - 1| < \theta^{n_k}$. В этом случае, пользуясь следствием, легко построить аналитическую f, для которой (1) неразрешимо и в измеримых функциях.

Теорема 4. *Пусть функция $f \in C^2(S^1)$ не является тригонометрическим полиномом. Тогда существует α, при котором уравнение (1) неразрешимо в измеримых функциях.*

Управление пассажирского транспорта
Мосгорисполкома

Поступило в редакцию
27 сентября 1974 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Аносов Д. В., Изв. АН СССР, серия матем. 37 (1973), 1259—1274.

Theorem (Antonevich, Sh. (2017))

Let $\varphi(x)$ not be trigonometrical polynomial and it satisfies condition (4). *For any sequence ω_n such that $\frac{\omega_n}{n} \to 0$, there exists irrational number h, such that for some subsequence n_j holds*

$$\|[aT_h]^{n_j}\| \geq e^{\omega_{n_j}}.$$

It means that the growth rate of powers of operators generated by irrational rotation can be arbitrary.

Considered number h can be constructed as Liouville's number, i.e.

$$|h - \frac{m}{N}| < \frac{1}{N^{\mu}} \quad \mu > 0.$$

Lemma (2.)

If function $\varphi(x)$ *is not trigonometrical polynomial and satisfies (4), then for any* N_0 *there exists rational number* $h = \frac{m}{N}$ *for* $N \geq N_0$ *such that*

$$R(aT_h) > 1.$$

Theorem (Erdös, 1975)

Let $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < \ldots$ *be an infinite sequence of integers satisfying*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \eta_n^{\frac{1}{t^n}} = \infty$$

for every $t > 0$*, and* $\eta_n > n^{1+\epsilon}$*. For some fixed* $\epsilon > 0$ *and* $n > n_0(\epsilon)$*. Then*

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\eta_n}$$

is a Liouville number.

Let $\epsilon > 0$ and

$$A_\epsilon = \{h \in \mathbb{R} : \exists\, C \text{ such that } |h - \frac{m}{N}| \geq \frac{C(h)}{N^{2+\epsilon}} \;\forall\, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Theorem

Let $\varphi(x) \in C^m(\mathbb{S}^1)$ and it satisfies condition (4) and let $h \in A_\epsilon$ for some $\epsilon > 0$. If $m > \epsilon + 3$, then the weighted shift operator generated by irrational rotation is a power-bounded operator, i.e.

$$\sup_{n \geq 0} \|[aT_h]^n\| < C^{2-m+\epsilon}.$$

Theorem

If function $\varphi(x)$ is a trigonometrical polynomial, then the weighted shift operator generated by irrational rotation is a power-bounded operator, i.e.

$$\sup_{n\geq 0} \|[aT_h]^n\| < C$$

for any irrational number h.

If $\sigma(T) \in \mathbb{S}^1$, then :

$$R(\lambda; T) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n,$$

and

$$\|R(\lambda; T)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \|T^n\| \quad (|\lambda| > 1). \tag{6}$$

Theorem (Kriess Matrix Theorem, 1953)

Let T be a linear bounded Banach space operator. If T is power-bounded and $\sigma(T) = \mathbb{S}^1$, then the resolvent holds

$$\|R(\lambda; T)\| \leq \frac{C}{|\lambda| - 1} \qquad (|\lambda| > 1). \tag{7}$$

Condition (7) is called *Kriess's resolvent condition*.

Theorem (Ritt, 1962)

Let T be a linear bounded Banach space operator. If T is power-bounded and $\sigma(T) = \{1\}$, then the resolvent holds

$$\|R(\lambda; T)\| \leq \frac{C}{|\lambda - 1|} \qquad (|\lambda| > 1). \tag{8}$$

Condition (8) is called *Ritt's resolvent condition*.

Theorem (Antonevich, Sh. (2016))

Let T be a linear bounded Banach space operator. If $\sigma(T) \in \mathbb{S}^1$, then the resolvent holds

$$\|R(\lambda;T)\| \leq C \exp[\frac{\rho}{(|\lambda|-1)^{\gamma}}] \tag{9}$$

if and only if

$$\|T^n\| \leq C \exp[\nu n^{\beta}]$$

where the relations between the orders and types are given by:

$$\gamma = \frac{\beta}{1-\beta}, \beta = \frac{\gamma}{1+\gamma}, \tag{10}$$

$$\rho = \frac{(\beta\nu)^{\beta}}{\gamma}, \quad \nu = \frac{(\rho\gamma)^{\frac{1}{\gamma+1}}}{\beta}. \tag{11}$$

Theorem

Let T be a linear bounded Banach space operator. If $\sigma(T) \in \mathbb{S}^1$, then the resolvent holds

$$\|R(\lambda; T)\| \leq \frac{C}{(|\lambda| - 1)^{\xi+1}} \tag{12}$$

if and only if

$$\|T^n\| \leq Cn^{\xi}.$$

$$\|(aT_h - \lambda I)^{-1}\| \geq \begin{cases} C\exp[\frac{\rho}{(|\lambda|-1)^{\gamma}}], & \text{only if} \quad \omega_{n_j} = \nu n_j^{\beta}; \\ \\ \frac{C}{(|\lambda|-1)^{\xi+1}} & \text{only if} \quad \omega_{n_j} = \xi \ln n_j. \end{cases}$$

where h is irrational number.

Open qestion:

For which irrational number h, the subsequence ω_{n_j} has power growth?

Some References

- Antonevich A.B. *Linear functional equation.operator approach*,Berlin:Birkhauser; 1996.
- Antonevich A.B. and Shukur Ali A. *Estimations of the Norm of Powers of Operators Generated by Irrational Rotation*, J. Doklady of the national academy of science of Belarus, Vol.60 (1),2017, P.30–35.(in Russian)
- Anosov D. V. , *On an additive functional homology equation connected with an ergodic rotation of the circle*, Math. USSR-Izv., 7:6 (1973), 1257–1271. (in Russian)
- Katznelson Y., L. Tzafriri *On power bounded operators,* J. Functional analysis. – 1986. – Vol. 68. – P. 313-328.
- Shukur Ali A., *The beahvior of power of operator, generated by rational rotation*, J. Vitsnik of Belarusian State Uni. Ser. 1.2016.2.P. 110-115. (in Russian)

Thank you!
Have a nice day.