5 Das Lebesgue-Integral

Definition 5.1. Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$, $f : X \to [0, \infty]$ eine nichtnegative messbare Funktion und

$$T_f^E := \left\{ \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} : n \in \mathbb{N},\ c_i \geq 0,\ E_i \in \mathcal{M},\ \varphi(x) \leq f(x)\ \forall x \in E \right\}$$

die Menge aller nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen, die auf E punktweise Minoranten von f sind. Dann heißt die Zahl

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu := \sup_{\varphi \in T_f^E} \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i)$$

Lebesgue-Integral von f auf E.

Bemerkung. Das Lebesgue-Integral einer nichtnegativen Funktion kann den Wert $+\infty$ annehmen. Die Definition ist sinnvoll, da nach Satz 4.16 jede nichtnegative, messbare Funktion beliebig genau von unten durch Treppenfunktionen angenähert werden kann.

Definition 5.2. Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Gilt $\int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ oder $\int_E f_- \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, so heißt

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu := \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu$$

Lebesgue-Integral von f auf E (mit f_+ und f_- wie in Folgerung 4.12). Die Funktion f heißt *summierbar* auf E, wenn $\int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ und $\int_E f_- \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ gilt. Mit $\mathcal{L}(E, \mu)$ bezeichnen wir die Menge der bezüglich μ auf E summierbaren Funktionen.

Bemerkung (Alternative Definition des Lebesgue-Integrals für *beschränkte* Funktionen).
Im Falle beschränkter, messbarer Funktionen kann das Lebesgue-Integral äquivalent wie folgt definiert werden: Für

$$m := \inf_{x \in E} f(x) > -\infty \qquad \text{und} \qquad M := \sup_{x \in E} f(x) < +\infty$$

bezeichne

$$\mathcal{Z} := \big\{ \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} : m = y_1 < y_2 < \cdots < y_n = M,\ n \in \mathbb{N} \big\}$$

die Familie aller endlichen Zerlegungen von $[m, M]$ und für $Z = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \in \mathcal{Z}$ setzen wir $E_i(Z) := \{x \in E : y_i \le f(x) < y_{i+1}\}$, wenn $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, und $E_n(Z) := \{x \in E : f(x) = y_n\}$. Dann kann man

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(E_i(Z))$$

zeigen.

Beispiel 5.3. Wir betrachten $X = \mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Maß μ und wählen $E := [0, 1]$ sowie

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(die so genannte *Dirichlet-Funktion*). Da $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ gilt, ist f messbar. Für f ist das Riemann-Integral nicht definiert, weil die Funktion in keinem Punkt stetig ist. Jedoch existiert das Lebesgue-Integral. Wir zeigen

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Sei also $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ eine Zerlegung von $[0, 1]$ (vgl. vorhergehende Bemerkung). Dann gilt

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{x \in E : 0 = y_1 \le f(x) < y_2\} = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ E_i &:= \{x \in E : 0 < y_i \le f(x) < y_{i+1} \le 1\} = \emptyset \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n-1, \\ E_n &:= \{x \in E : f(x) = y_n = 1\} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \mu(E_i) = 0 \cdot \mu([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) + 1 \cdot \underbrace{\mu([0, 1] \cap \mathbb{Q})}_{\le \mu(\mathbb{Q}) = 0} = 0.$$

Beachte: Das gleiche Ergebnis folgt auch unmittelbar aus Definition 5.1, weil f selbst eine Treppenfunktion ist.

Lemma 5.4. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} : X \to \mathbb{R}$ eine messbare Treppenfunktion. Dann gilt*

$$\int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i).$$

Beweis. Setzen wir $I_+ := \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n,\ c_i > 0\}$ und $I_- := \{i \in \mathbb{N} : 1 \le i \le n,\ c_i < 0\}$, so gilt $\varphi_+ = \sum_{i \in I_+} c_i \chi_{E_i}$ und $\varphi_- = -\sum_{i \in I_-} c_i \chi_{E_i}$. Aus Definition 5.1 folgt nun sofort

$$\int_E \varphi_+ \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i \in I_+} c_i \mu(E \cap E_i) \qquad \text{und} \qquad \int_E \varphi_- \,\mathrm{d}\mu = -\sum_{i \in I_-} c_i \mu(E \cap E_i).$$

Nach Definition 5.2 gilt somit

$$\int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_E \varphi_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_E \varphi_- \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i).$$

□

Satz 5.5 (Eigenschaften des Lebesgue-Integrals)**.** *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ sowie $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.*

(i) Gilt $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in E$ mit Konstanten $m, M \in \mathbb{R}$, so folgt

$$m\mu(E) \leq \int_E f \,\mathrm{d}\mu \leq M\mu(E).$$

(ii) [1] Mit $f, g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $f + g, cf \in \mathcal{L}(E, \mu)$ und

$$\int_E (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_E g \,\mathrm{d}\mu \qquad \textit{sowie} \qquad \int_E cf \,\mathrm{d}\mu = c \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

(iii) Ist $A \subseteq E$ messbar (d.h. $A \in \mathcal{M}$) und gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in E$, so folgt

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

(iv) Gilt $0 \leq f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in E$, so folgt

$$0 \leq \int_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

(v) Aus $f(x) \geq 0$ für alle $x \in E$ folgt die Äquivalenz

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \textit{ für fast alle } x \in E.$$

Beweis. (i) Man überlegt sich leicht, dass

$$\max\{0, m\} \leq f_+(x) \leq \max\{0, M\} \quad \text{und} \quad -\min\{0, M\} \leq f_-(x) \leq -\min\{0, m\}$$

für alle $x \in E$ gilt. Da somit $\max\{0, m\}\chi_E$ bzw. $-\min\{0, M\}\chi_E$ am Supremum in der

[1] Diese Aussage kann erst später mit Mitteln des Kapitels 6 bewiesen werden.

Definition von $\int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu$ bzw. $\int_E f_- \,\mathrm{d}\mu$ teilnehmen (vgl. Definition 5.1), folgt

$$\max\{0,m\}\mu(E) \le \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{bzw.} \qquad -\min\{0,M\}\mu(E) \le \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu.$$

Andererseits gilt für jede Treppenfunktion φ, die am Supremum in der Definition von $\int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu$ bzw. $\int_E f_- \,\mathrm{d}\mu$ teilnimmt, $\varphi \le \max\{0,M\}\chi_E$ bzw. $\varphi \le -\min\{0,m\}\chi_E$, also

$$\int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu \le \max\{0,M\}\mu(E) \qquad \text{bzw.} \qquad \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu \le -\min\{0,m\}\mu(E).$$

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned} m\mu(E) = (\max\{0,m\} + \min\{0,m\})\mu(E) &\le \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu \\ &\le (\max\{0,M\} + \min\{0,M\})\mu(E) = M\mu(E). \end{aligned}$$

(ii) Für den Beweis der beiden Aussagen benötigen wir Sätze, die wir erst in Kapitel 6 formulieren werden.

(iii) O.B.d.A. gelte $f \ge 0$ (auf E erfüllt, Verhalten auf $X \setminus E$ uninteressant). Wir setzen $T := \{\varphi \in T_f^A : \varphi(x) = 0 \;\forall x \in X\setminus A\}$ (vgl. Definition 5.1). Zu jedem $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i\chi_{E_i} \in T_f^A$ existiert dann ein $\psi = \sum_{i=1}^m d_i\chi_{F_i} \in T$ mit $\sum_{i=1}^n c_i\mu(A\cap E_i) = \sum_{i=1}^m d_i\mu(A\cap F_i)$; man setze einfach $m := n$, $d_i := c_i$ und $F_i := E_i \cap A$. Somit gilt

$$\sup_{\varphi\in T_f^A} \sum_{i=1}^n c_i\mu(A\cap E_i) \le \sup_{\varphi\in T} \sum_{i=1}^n c_i\mu(A\cap E_i)$$

und aus $T \subseteq T_f^E$ folgt

$$\sup_{\varphi\in T} \sum_{i=1}^n c_i\mu(E\cap E_i) \le \sup_{\varphi\in T_f^E} \sum_{i=1}^n c_i\mu(E\cap E_i).$$

Wegen $A \subseteq E$, d.h. $\mu(A\cap E_i) \le \mu(E\cap E_i)$ für $E_i \in \mathcal{M}$, folgt die Behauptung.

(iv) Die Behauptung folgt wegen $T_f^E \subseteq T_g^E$ sofort aus Definition 5.1.

(v) „$\Rightarrow$“: Setzen wir

$$F := \{x \in E : f(x) > 0\} \in \mathcal{M} \qquad \text{und} \qquad E_n := \{x \in E : f(x) > \tfrac{1}{n}\},$$

so gilt $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $F = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Zu zeigen ist $\mu(F) = 0$. Wir nehmen also an, es würde $\mu(F) > 0$ gelten. Nach Satz 2.6 gilt $\mu(E_n) \to \mu(F)$ für

$n \to \infty$, sodass dann ein $\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(E_{n_0}) > \varepsilon$ existieren. Aus (iii) und (i) des Satzes folgt nun

$$0 = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu > \int\limits_{E_{n_0}} f \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_{n_0}) > \frac{\varepsilon}{n} > 0.$$

Dies ist ein Widerspruch, d.h. $\mu(F) = 0$ ist gezeigt.

„$\Leftarrow$“: O.B.d.A. gelte $f \geq 0$ (auf E erfüllt, Verhalten auf $X \setminus E$ uninteressant). Sei $N \in \mathcal{M}$ eine Menge mit $\mu(N) = 0$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in E \setminus N$. Für jede Treppenfunktion $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$, die am Supremum in der Definition von $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ teilnimmt, muss dann ($c_i > 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ vorausgesetzt) $E \cap E_i \subseteq F$ und somit $\mu(E \cap E_i) \leq \mu(F) = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gelten. Also folgt $\sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i) = 0$ und damit $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

□

Satz 5.6. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar sowie $\nu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ die durch*

$$\nu(A) := \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu, \quad A \in \mathcal{M},$$

definierte Mengenfunktion.

(i) Gilt $f \geq 0$, so ist ν volladditiv.

(ii) Gilt $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$, so ist ν volladditiv.

Beweis. Wir zeigen (i). Seien zunächst $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ paarweise disjunkt und sei $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Für alle $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i} \in T_f^A$ (vgl. Definition 5.1) gilt dann

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap E_i) &= \sum_{i=1}^n c_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty (A_j \cap E_i)\right) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_j \cap E_i) \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int\limits_{A_j} \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \sum_{j=1}^\infty \int\limits_{A_j} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j)\end{aligned}$$

und der Übergang zum Supremum liefert

$$\nu(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \sup_{\varphi \in T_f^A} \sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap E_i) \leq \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).$$

Hieraus werden wir weiter unten die Subvolladditivität folgern; dazu benötigen wir jedoch die Additivität von ν.

Seien also $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ disjunkt. Nach dem schon Bewiesenen gilt mit $A_3 = A_4 = \dots = \emptyset$

$$\nu(A_1 \cup A_2) \le \nu(A_1) + \nu(A_2).$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existieren $\varphi_1 \in T_f^{A_1}$ und $\varphi_2 \in T_f^{A_2}$ mit

$$\int_{A_1} f \,\mathrm{d}\mu \le \int_{A_1} \varphi_1 \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \int_{A_2} f \,\mathrm{d}\mu \le \int_{A_2} \varphi_2 \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon.$$

Setzen wir $\quad \varphi(x) := \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{falls } x \in A_1 \\ \varphi_2(x) & \text{falls } x \in A_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad$ so gilt $\varphi \in T_f^{A_1 \cup A_2}$, und es folgt

$$\begin{aligned} \nu(A_1) + \nu(A_2) &= \int_{A_1} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{A_2} f \,\mathrm{d}\mu \le \int_{A_1} \varphi_1 \,\mathrm{d}\mu + \int_{A_2} \varphi_2 \,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon \\ &= \int_{A_1} \varphi \,\mathrm{d}\mu + \int_{A_2} \varphi \,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon \overset{(*)}{=} \int_{A_1 \cup A_2} \varphi \,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon \\ &\le \int_{A_1 \cup A_2} f \,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon = \nu(A_1 \cup A_2) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

wobei man sich die Gleichheit $(*)$ als Eigenschaft von Treppenfunktionen leicht überlegen kann. Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert die Additivität von ν.

Zurück zum Beweis der Subvolladditivität. Seien nun $B, B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Setzen wir $A_1 := B \cap B_1$ und $A_i := (B \cap B_i) \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j)$, so gilt $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ sowie $A_i \subseteq B_i$. Also folgt

$$\nu(B) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i),$$

d.h. ν ist subvolladditiv (die Additivität haben wir dabei zur Anwendung von Satz 2.5 (v) benötigt). Aus Satz 2.5 (vii) folgt nun die Volladditivität von ν.

Wie zeigen noch (ii). Wegen $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ sind die durch

$$\nu_+(A) := \int_A f_+ \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{und} \qquad \nu_-(A) := \int_A f_- \,\mathrm{d}\mu$$

definierten nichtnegativen Mengenfunktionen endlich, d.h. für alle $A \in \mathcal{M}$ gilt $\nu_+(A) < \infty$

und $\nu_-(A) < \infty$. Nach (i) sind ν_+ und ν_- volladditiv. Wegen

$$\nu(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_A f_- \,\mathrm{d}\mu = \nu_+(A) - \nu_-(A)$$

sieht man die Volladditivität von ν nun leicht ein. □

Folgerung 5.7. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \to [0, \infty]$ eine nichtnegative, messbare Funktion und $A, B \in \mathcal{M}$ mit $B \subseteq A$ und $\mu(A \setminus B) = 0$. Gilt $\int_A f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ oder $\int_B f \,\mathrm{d}\mu < \infty$, so ist auch das jeweils andere Integral endlich und die Werte der beiden Integrale stimmen überein.*

Beweis. Nach Satz 5.6 (i) (benötigen hier nur die Additivität) gilt

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \underbrace{\int\limits_{A\setminus B} f \,\mathrm{d}\mu}_{=0} + \int\limits_B f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_B f \,\mathrm{d}\mu,$$

wobei man sich das Verschwinden des ersten Summanden leicht anhand der Definition des Integrals überlegen kann. □

Definition 5.8. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und sei $E \in \mathcal{M}$. Zwei messbare Funktionen $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ bezeichnen wir als *äquivalent* auf E und schreiben $f \overset{E}{\sim} g$, wenn $\mu(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ gilt, d.h. wenn f und g fast überall auf E übereinstimmen.

Bemerkung. Man zeigt leicht, dass $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{M}$ gilt und dass $\overset{E}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller messbaren Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist.

Bemerkung. Aus Folgerung 5.7 erhält man, dass für $f, g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ mit $f \overset{E}{\sim} g$ die Gleichheit

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu$$

gilt.

Satz 5.9. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann gilt $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ genau dann , wenn $|f| \in \mathcal{L}(E, \mu)$ erfüllt ist. Dabei ist für alle $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ die Ungleichung*

$$\left| \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\mu$$

gültig.

Beweis. Sei $A := \{x \in E : f(x) \geq 0\}$. Dann gilt

$$\int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A |f| \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{E\setminus A} |f| \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f_+ \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{E\setminus A} f_- \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu$$

(bei der ersten Gleichheit haben wir Satz 5.6 (i) verwendet), d.h. $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ gilt genau dann, wenn $\int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ und $\int_E f_- \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Die im Satz formulierte Ungleichung ergibt sich wegen der Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$ direkt aus der Abschätzung

$$\left|\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \left|\int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu\right| = \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Satz 5.10. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen mit $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in E$. Aus $g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ folgt dann $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ und*

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen $T^E_{|f|} \subseteq T^E_g$ folgt aus Definition 5.1

$$\int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu,$$

d.h. $|f| \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Nach Satz 5.9 gilt dann auch $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ und mit dem Beweis zu Satz 5.9 erhalten wir

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

□

6 Grenzwertsätze für Integrale

Satz 6.1 (Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz)**.** *Seien* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *ein Maßraum,* $E \in \mathcal{M}$ *und* $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *messbare Funktionen mit* $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \dots$ *für alle* $x \in E$ *und* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *für alle* $x \in E$*. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen $f_n(x) \le f(x)$ für $x \in E$ folgt $\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

Insbesondere ist die Behauptung also für $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = +\infty$ gezeigt. Für $n \in \mathbb{N}$, $c \in (0,1)$ und $\varphi \in T_f^E$ (vgl. Definition 5.1) definieren wir

$$E_n(\varphi, c) := \{x \in E : f_n(x) \ge c\varphi(x)\}.$$

Dann gilt $E_n(\varphi, c) \in \mathcal{M}$ sowie $E_1(\varphi, c) \subseteq E_2(\varphi, c) \subseteq \dots \subseteq E$. Wegen $f(x) \ge \varphi(x)$ für alle $x \in E$ existiert zu jedem $x \in E$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) \ge c\varphi(x)$, d.h. es folgt $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(\varphi, c)$. Weiter gilt

$$\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \ge \int_{E_n(\varphi,c)} f_n \, \mathrm{d}\mu \ge \int_{E_n(\varphi,c)} c\varphi \, \mathrm{d}\mu = c \int_{E_n(\varphi,c)} \varphi \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $\varphi \in T_f^E$ und alle $c \in (0,1)$, wobei die letzte Gleichheit leicht aus Lemma 5.4 als Eigenschaft aller Treppenfunktionen folgt. Bei Grenzübergang für $n \to \infty$ ergibt sich daraus wegen Satz 5.6 (i) in Verbindung mit Satz 2.6

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \ge c \lim_{n\to\infty} \int_{E_n(\varphi,c)} \varphi \, \mathrm{d}\mu = c \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu\,.$$

Durch Übergang zum Supremum über alle $\varphi \in T_f^E$ erhält man schließlich entsprechend der Definition des Integrals über Treppenfunktionen

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu \ge c \sup_{\varphi \in T_f^E} \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu = c \int_E f \, \mathrm{d}\mu\,.$$

Der Grenzübergang $c \to 1$ liefert dann die Behauptung. □

Mit Satz 6.1 können wir nun auch den folgenden wichtigen Satz beweisen.

Satz 6.2. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $c \in \mathbb{R}$ und $f, g : X \to [0, \infty]$ zwei nichtnegative, messbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu \qquad \textit{und} \qquad \int_E cf\,\mathrm{d}\mu = c\int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

für alle $E \in \mathcal{M}$.

Beweis. Wir zeigen die Additivität zunächst für zwei messbare Treppenfunktionen $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ und $\psi = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{F_j}$ (o.B.d.A. gelte $\bigcup_{i=1}^n E_i = X = \bigcup_{j=1}^m F_j$). Es gilt

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^m \chi_{E_i \cap F_j} + \sum_{j=1}^m d_j \sum_{i=1}^n \chi_{E_i \cap F_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i + d_j)\chi_{E_i \cap F_j}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_E (\varphi+\psi)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i + d_j)\mu(E_i \cap F_j \cap E) = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^m \mu(E_i \cap F_j \cap E) + \sum_{j=1}^m d_j \sum_{i=1}^n \mu(E_i \cap F_j \cap E) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i \cap E) + \sum_{j=1}^m d_j \mu(F_j \cap E) = \int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu + \int_E \psi\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Zu f und g existieren nach Satz 4.16 Folgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer (vgl. Beweis zu 4.16), messbarer Treppenfunktionen auf X mit $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \dots$ bzw. $0 \le \psi_1 \le \psi_2 \le \dots$ und $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ bzw. $g(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$ für alle $x \in X$. Außerdem gilt $0 \le \varphi_1 + \psi_1 \le \varphi_2 + \psi_2 \le \dots$ und $(f+g)(x) = \lim_{n\to\infty}(\varphi_n + \psi_n)(x)$ für alle $x \in X$. Mit Satz 6.1 folgt nun

$$\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n + \psi_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n\,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

Die Homogenität folgt für nichtnegative, messbare Treppenfunktionen sofort aus Lemma 5.4. Zu f wählen wir nun wieder eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer, messbarer Treppenfunktionen mit $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \dots$ und $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ für alle $x \in X$. Dann gilt für $c \ge 0$ auch $0 \le c\varphi_1 \le c\varphi_2 \le \dots$ und $(cf)(x) = \lim_{n\to\infty}(c\varphi_n)(x)$ für alle $x \in X$, sodass aus Satz 6.1

$$\int_E cf\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E c\varphi_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} c \int_E \varphi_n\,\mathrm{d}\mu = c\int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

folgt. Für $c \leq 0$ gilt nun (vgl. Definition 5.2)

$$\int\limits_E cf \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E \underbrace{(cf)_+}_{=0} \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_E \underbrace{(cf)_-}_{=-cf} \,\mathrm{d}\mu = -\int\limits_E (-c)f \,\mathrm{d}\mu = -(-c)\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = c\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Satz 6.3. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Gilt $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, so ist f für fast alle $x \in E$ endlich.*

Beweis. Sei $A^+ := \{x \in E : f(x) = +\infty\}$ und sei $A_n^+ := \{x \in E : f(x) > n\}$ für $n = 1, 2, \ldots$. Dann gilt $A^+ \subseteq A_n^+$ für $n = 1, 2, \ldots$ und somit

$$0 \leq \mu(A^+) \leq \mu(A_n^+) = \int_{A_n^+} 1 \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{A_n^+} \frac{1}{n} f \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{n}\int\limits_{A_n^+} f_+ \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{n}\underbrace{\int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu}_{<\infty},$$

d.h. $\mu(A^+) = 0$. Für $A^- := \{x \in E : f(x) = -\infty\}$ und $A_n^- := \{x \in E : f(x) < -n\}$ erhalten wir analog

$$0 \leq \mu(A^-) \leq \mu(A_n^-) \leq \int\limits_{A_n^-} 1 \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{A_n^-} \frac{1}{n}(-f) \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{n}\int\limits_{A_n^-} f_- \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{n}\underbrace{\int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu}_{<\infty},$$

d.h. $\mu(A^-) = 0$. □

Satz 6.4 (Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz)**.** *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen mit $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ für alle $x \in E$ und $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in E$. Existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f_m \in \mathcal{L}(E, \mu)$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. O.B.d.A. gelte $m = 1$ (sonst die ersten $m - 1$ Folgenelemente verwerfen und den Rest neu nummerieren). Nach Satz 6.3 ist f_1 dann fast überall auf E endlich. O.B.d.A. können wir annehmen, dass f_1 auf ganz E endlich ist (sonst f_1 durch äquivalente, auf E endliche Funktion ersetzen). Definieren wir $g_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$g_n(x) := \begin{cases} f_n(x) - f_1(x), & x \in E, \\ 0, & x \in X \setminus E, \end{cases}$$

so ist g_n messbar und es gilt $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$. Außerdem setzen wir $g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$

für $x \in X$. Die so definierte Funktion $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist ebenfalls messbar. Satz 6.1 liefert nun

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n - f_1 \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f - f_1 \,\mathrm{d}\mu,$$

und somit die Behauptung (unter Verwendung von Satz 5.5 (ii)). □

Satz 6.5 (Lemma von Fatou)**.** *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen.*

(i) Gilt $f_n \geq 0$ für alle $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\int\limits_E \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

(ii) Gilt $f_n(x) \leq 0$ für alle $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\int\limits_E \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wir zeigen (i). Setzen wir $g_n := \inf_{k\geq n} f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt $g_n(x) \geq 0$ sowie $0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots$ für alle $x \in E$. Es folgt $0 \leq \int_E g_1 \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E g_2 \,\mathrm{d}\mu \leq \ldots$ und damit die Existenz von $\lim_{n\to\infty} \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu \in [0, \infty]$. Außerdem gilt $g_n \leq f_n$, also $\int_E g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$. Wir erhalten hieraus zunächst

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Setzen wir nun $g := \lim_{n\to\infty} g_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$ und wenden Satz 6.1 auf g und g_n an, so erhalten wir außerdem

$$\int\limits_E \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Damit ist (i) gezeigt. Punkt (ii) folgt nun direkt aus (i), da

$$\int\limits_E \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = -\int\limits_E \liminf_{n\to\infty} \underbrace{(-f_n)}_{\geq 0} \,\mathrm{d}\mu \geq -\liminf_{n\to\infty} \int\limits_E -f_n \,\mathrm{d}\mu = \limsup_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu$$

gilt. □

Satz 6.6 (Satz von Lebesgue über dominante Konvergenz)**.** *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen mit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für* *alle $x \in E$. Existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}(E,\mu)$ mit*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in E,$$

so gilt $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt auch $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in E$, sodass aus Satz 5.10 $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$ folgt. Nach Satz 6.5 gilt dann

$$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_E \underbrace{f_n - g}_{\leq 0} \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E \limsup_{n\to\infty} (f_n - g) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f - g \,\mathrm{d}\mu,$$

sowie

$$\int\limits_E (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E \liminf_{n\to\infty} \underbrace{(f_n + g)}_{\geq 0} \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_E f_n + g \,\mathrm{d}\mu.$$

Zusammen liefert dies

$$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu,$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$ existiert und ist gleich $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$. □

Bemerkung. Satz 6.6 liefert eine hinreichende Bedingung für die Summierbarkeit einer messbaren Funktion. Wir wollen zusätzlich eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung formulieren:

Gilt für messbare Funktionen $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ auf einem Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ die Eigenschaft $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ sowie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in E \in \mathcal{M}$, so ist $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$ genau dann erfüllt, wenn eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\int_E f_{n_k} \,\mathrm{d}\mu \leq C < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert, was äquivalent ist zur Bedingung $\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Mit $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$ gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu := C < \infty.$$

Existiert umgekehrt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit der geforderten Eigenschaft für ein $C \geq 0$, so gilt die Eigenschaft aufgrund der Monotonie der Folge (f_n) für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Satz 6.5 folgt nun

$$0 \leq \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq C,$$

d.h. $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$.

Als Gegenbeispiel kann man betrachten

$$\mu(E) = m < \infty, \qquad f_n(x) \equiv n, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n = f \equiv +\infty, \qquad \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu = n\,m < \infty$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = \infty.$$

Es gibt also keine Konstante $C > 0$ mit $\int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu < C \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Wir haben dann zwar $f_n \in \mathcal{L}(E,\mu) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, aber $f \notin \mathcal{L}(E,\mu)$.

7 Vergleich von Lebesgue-Integral und Riemann-Integral

In diesem Kapitel betrachten wir ausschließlich den Lebesgue'schen Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu)$, d.h. μ ist das Lebesgue-Maß auf der Lebesgue'schen σ-Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Weiter betrachten wir messbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. die Urbilder $f^{-1}(B)$ von Borel-Mengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind selbst Borel-Mengen und gehören damit zu $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Im Mittelpunkt stehen in diesem Kapitel Funktionen f, die nur auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ zu definieren sind. Dann kann man sich f als mit Null auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt betrachten. Eine alternative Betrachtungsweise besteht darin, gleich den Maßraum $([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}) \cap [a, b], \mu)$ anzusehen, wobei dann unter $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ die so genannte Spur-σ-Algebra von $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ eingeschränkt auf das Intervall $[a, b]$ zu vestehen ist. Beides führt in der Regel zum gleichen Ergebnis.

Es sollen im Weiteren

$$(\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{bzw.} \qquad (\mathrm{L}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\mu$$

das Riemann- bzw. Lebesgue-Integral von f auf $[a, b]$ bezeichnen. Während der Begriff des Lebesgue-Integrals aus Kapitel 5 hinreichend gut bekannt ist, wollen wir den Begriff des Riemann-Integrals hier noch einmal wiederholen und im Lichte von Treppenfunktionen etwas anders interpretieren.

Dazu betrachten wir eine Folge von Zerlegungen $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des Intervalls $[a, b]$ mit $Z_k = \{x_0^k, x_1^k, \ldots, x_k^k\}$ und $a = x_0^k < x_1^k < \cdots < x_k^k = b$ sowie $\Delta Z_k := \max_{1\le i\le k} |x_i^k - x_{i-1}^k|$. Wir nehmen an, dass aufeinanderfolgende Zerlegungen Z_k und Z_{k+1} durch Einfügung eines zusätzlichen Punktes erfolgen, sodass $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots Z_k \subset Z_{k+1} \subset \ldots$ gilt, und die maximalen Längen von Teilintervallen in der Zerlegung asymptotisch für $k \to \infty$ gegen Null gehen, d.h. $\lim_{k\to\infty} \Delta Z_k = 0$ gilt. Solche Zerlegungsfolgen nennen wir regulär.

Für beschränkte Funktionen f betrachtet man nun die auf ganz $\mathbb{R}$ definierten reellen Unterfunktionen $L(x)$ und Oberfunktionen $U(x)$, die über die Zuordnungen

$$U_k(a) := L_k(a) := f(a), \qquad U_k(x) := L_k(x) := 0 \;\text{ für }\; x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$$

und für $x \in (x_{i-1}^k, x_i^k]$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$

$$U_k(x) := M_i := \sup_{\xi\in(x_{i-1}^k, x_i^k]} f(\xi) \qquad \text{bzw.} \qquad L_k(x) := m_i := \inf_{\xi\in(x_{i-1}^k, x_i^k]} f(\xi)$$

definiert sind. Diese Funktionen sind offenbar messbare Treppenfunktionen, und es gilt

$$(\mathrm{L})\int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i^k - x_{i-1}^k) =: s(Z_k, f)$$

bzw.

$$(\mathrm{L})\int_a^b U_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i^k - x_{i-1}^k) =: S(Z_k, f).$$

Wir haben dabei die Untersummen $s(Z_k, f)$ und die Obersummen $S(Z_k, f)$ der Zerlegung Z_k ins Spiel gebracht. Wegen $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots$ erhalten wir

$$U_1(x) \geq U_2(x) \geq \cdots \geq f(x) \geq \cdots \geq L_2(x) \geq L_1(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Wir setzen

$$U(x) := \lim_{k\to\infty} U_k(x) \qquad \text{und} \qquad L(x) := \lim_{k\to\infty} L_k(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Definition 7.1. Eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion f heißt Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt ist und für jede reguläre Zerlegungsfolge gilt

$$\lim_{k\to\infty} s(Z_k, f) = \lim_{k\to\infty} S(Z_k, f),$$

wobei wir diesen dann von der konkreten Zerlegungsfolge unabhängigen Grenzwert Riemann-Integral von f über $[a, b]$ nennen und mit dem Symbol $(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnen.

Eine äquivalente Definition der Riemann-Integrierbarkeit auf der Basis von dem Riemann-Integral angepassten Treppenfunktionen (wir nennen sie hier (R)-Treppenfunktionen) soll im Folgenden noch erwähnt werden (vgl. ▷ K. D. SCHMIDT: *Maß und Wahrscheinlichkeit*, S.181f). Mit Blick auf das Intervall $[a, b]$ werde dabei eine Treppenfunktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als (R)-Treppenfunktion bezeichnet, wenn sie die spezielle Gestalt $f(x) = c_i$ mit $x_{i-1} < x < x_i$ $(i = 1, 2, ..., k)$ für eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < ... < x_{k-1} < x_k = b$ des Intervalls $[a, b]$ besitzt. Es gilt dann offensichtlich $(\mathrm{L})\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} c_i(x_i - x_{i-1})$.

Definition 7.2. Eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion f heißt Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt ist und die reellen Zahlen

$$s := \sup\left\{(\mathrm{L})\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \;\; \varphi \text{ ist (R)-Treppenfunktion mit } \varphi(x) \leq f(x) \;\; \forall x \in [a, b]\right\}$$

und

$$S := \inf \left\{ (\mathrm{L}) \int\limits_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \quad \varphi \text{ ist (R)-Treppenfunktion mit } f(x) \leq \varphi(x) \;\; \forall x \in [a,b] \right\}$$

übereinstimmen, wobei dann als Riemann-Integral (R) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := s = S$ bezeichnet wird.

Wir werden uns aber auf die erste Version der Definition konzentrieren und können nun auf der Grundlage der oben durchgeführten Überlegungen leicht den folgenden Satz beweisen.

Satz 7.3. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es gelte $-\infty < a < b < +\infty$.*

(i) Ist f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, so gilt $f \in \mathcal{L}([a,b],\mu)$ und

$$(\mathrm{L}) \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, wenn sie auf $[a,b]$ beschränkt und fast überall auf $[a,b]$ stetig ist.

Beweis. Wir beweisen (i). Da f Riemann-integrierbar ist, ist f beschränkt. Aus der Riemann-Integrierbarkeit von f folgt für eine reguläre Zerlegungsfolge

$$\lim_{k\to\infty} s(Z_k, f) = (\mathrm{R}) \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S(Z_k, f).$$

Andererseits folgt aus Satz 6.6 (Satz von Lebesgue über dominante Konvergenz)

$$\lim_{k\to\infty} (\mathrm{L}) \int\limits_a^b U_k(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L}) \int\limits_a^b U(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} (\mathrm{L}) \int\limits_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L}) \int\limits_a^b L(x)\,\mathrm{d}x,$$

zusammen also

$$(\mathrm{L}) \int\limits_a^b L(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L}) \int\limits_a^b U(x)\,\mathrm{d}x.$$

Schließlich folgt mit Satz 5.5 (v) aus $L(x) \leq f(x) \leq U(x)$ für $x \in [a,b]$, d.h. $U(x) - L(x) \geq 0$, und (L) $\int_a^b [U(x) - L(x)]\,\mathrm{d}x = 0$, dass $U(x) = f(x) = L(x)$ für fast alle $x \in [a,b]$ gilt. Somit erhalten wir $f \in \mathcal{L}([a,b],\mu)$ und

$$(\mathrm{L}) \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir beweisen nun noch (ii). Seien die Bezeichnungen wie im Beweis zu (i). Mit $Z := \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ gilt dann $\mu(Z) = 0$ (da Z abzählbar ist). Wir zeigen zunächst als wichtige Hilfsaussage, dass f genau dann stetig in $x_0 \in [a,b] \setminus Z$ ist, wenn $U(x_0) = L(x_0)$ gilt.

Sei f also stetig in $x_0 \in [a,b] \setminus Z$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Wegen $\Delta Z_k \to 0$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\Delta Z_k < \delta$ für alle $k \geq K$. Für $i_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $x_0 \in (x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ gilt folglich

$$U_k(x_0) - L_k(x_0) = M_{i_0} - m_{i_0} = (M_{i_0} - f(x_0)) + (f(x_0) - m_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und aus $\varepsilon \to 0$ folgt somit $U(x_0) = L(x_0)$. Es gelte nun $U(x_0) = L(x_0)$ für $x_0 \in [a,b] \setminus Z$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es wegen $U(x_0) = f(x_0) = L(x_0)$ dann ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$U_K(x_0) - f(x_0) < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad f(x_0) - L_K(x_0) < \varepsilon.$$

Setzen wir $\delta := \min_{x \in Z_k} |x_0 - x|$, so gilt außerdem

$$L_K(x_0) \leq f(x) \leq U_K(x_0) \qquad \text{für alle } x \in [a,b] \setminus Z \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Zusammen erhalten wir $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$, d.h. f ist stetig in x_0. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Ist f nun Riemann-integrierbar, so ist f beschränkt und aus dem Beweis zu (i) folgt, dass $U(x) = f(x) = L(x)$ für fast alle $x \in [a,b]$ und damit auch für fast alle $x \in [a,b] \setminus Z$ gilt. Wegen der Hilfsaussage ist f dann für fast alle $x \in [a,b] \setminus Z$ stetig und folglich fast überall auf $[a,b]$ stetig. Ist umgekehrt f beschränkt und fast überall stetig auf $[a,b]$, so gilt wegen der Hilfsaussage $U(x) = f(x) = L(x)$ fast überall auf $[a,b] \setminus Z$ und damit auch fast überall auf $[a,b]$. Es folgt

$$(\mathrm{L}) \int_a^b U(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L}) \int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x$$

und mit Satz 6.6 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \big(S(Z_k, f) - s(Z_k, f)\big) &= \lim_{k\to\infty} (\mathrm{L}) \int_a^b U_k(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty} (\mathrm{L}) \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (\mathrm{L}) \int_a^b U(x)\,\mathrm{d}x - (\mathrm{L}) \int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}$$

d.h. f ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$. $\square$

Beispiel 7.4. Die Dirichlet-Funktion auf $[0,1]$ aus Beispiel 5.3 ist beschränkt, aber nirgends stetig. Nach Satz 7.3 (ii) ist sie also nicht Riemann-integrierbar.

Beispiel 7.5. Wir ändern die Dirichlet-Funktion auf $[0,1]$ aus Beispiel 5.3 wie folgt:

$$f(x) := \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ x^2, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist messbar und nach Satz 7.3 (i) gilt

$$(\mathrm{L}) \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} f\,\mathrm{d}\mu}_{=0} + \int_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} f\,\mathrm{d}\mu = (\mathrm{L}) \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3},$$

weil wir den Integranden auf einer Menge vom Maß Null beliebig ändern dürfen. Da f in keinem Punkt stetig ist, ist f nicht Riemann-integrierbar auf $[0,1]$, jedoch gibt es eine äquivalente Riemann-integrierbare Funktion, nämlich $x \mapsto x^2$.

Beispiel 7.6. Ein ähnliches, aber doch anders geartetes Beispiel liefert die Thomae-Funktion auf $[0,1]$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \ (m,n \text{ teilerfremd}), \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese ist genau in allen irrationalen Punkten des Intervalls $[0,1]$ stetig und somit nur auf einer Menge vom Maße Null unstetig. Damit ist die Funktion Riemann-integrierbar und das Riemann-Integral stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein, welches offensichtlich den Wert Null besitzt.

Beispiel 7.7. Wir betrachten die durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion. Diese ist auf $[0,T]$ stetig für alle $T > 0$ und damit auf jedem solchen beschränkten Intervall Riemann-integrierbar. Im Sinne eines uneigentlichen Riemann-Integrals gilt

$$(\mathrm{R}) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty} (\mathrm{R}) \int_0^T \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Wegen $\int_{[0,\infty)} |f|\,\mathrm{d}\mu = +\infty$, d.h. $|f| \notin \mathcal{L}([0,\infty),\mu)$, gilt aber $f \notin \mathcal{L}([0,\infty),\mu)$. Wegen der Endlichkeit des uneigentlichen Integrals $(\mathrm{R}) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \infty$ müssen dann aber beide Integrale $\int_{[0,\infty)} f_+\,\mathrm{d}\mu$ und $\int_{[0,\infty)} f_-\,\mathrm{d}\mu$ gleich $+\infty$ sein, denn es können nicht beide gleichzeitig endlich sein und eines davon endlich und das andere $+\infty$ würde dem widersprechen.

Beispiel 7.8. Wir betrachten eine fast überall stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x < 0$, $f(x) \geq 0$ für $x \geq 0$ und (R) $\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ für alle $T > 0$. Setzen wir

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & x \leq n, \\ 0, & x > n, \end{cases}$$

so gilt $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ und

$$\int\limits_{[0,\infty)} f_n\,\mathrm{d}\mu = (\mathrm{L}) \int\limits_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int\limits_0^n f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Wegen $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt aus Satz 6.1

$$\int\limits_{[0,\infty)} f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty)} f_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{R}) \int\limits_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := I.$$

Somit gilt $f \in \mathcal{L}([0,\infty), \mu)$ genau dann, wenn $I < \infty$ gilt.