2 Einführung in die mathematische Statistik

Die Hauptaufgabe der mathematischen Statistik ist es, anhand der Eigenschaften eines Teils einer Menge von Objekten auf die Eigenschaften aller Objekte in dieser Menge zu schließen. Diese Objekte können zum Beispiel Glühlampen sein und wir betrachten deren Lebensdauer. Jeder Glühlampenhersteller möchte natürlich wissen, wie lang seine Glühlampen brennen. Um dies exakt herauszubekommen, müsste man die Lebensdauer jeder Lampe bestimmen. Auf Grund der hohen Anzahl (z.B. Tagesproduktion), aber auch weil die Glühlampen dabei zerstört werden, ist dies nicht möglich. Stattdessen wählt man zufällig einige Glühlampen aus und schließt aus deren Brenndauer mit Hilfe der Methoden der mathematischen Statistik auf die durchschnittliche Lebensdauer. Weiter unten werden wir dieses Beispiel genauer betrachten.

2.1 Grundbegriffe

Grundgesamtheit: Eine Menge von gleichartigen Objekten, die hinsichtlich einer bestimmten Eigenschaft untersucht werden sollen, nennen wir *Grundgesamtheit*. Diese Eigenschaft beschreiben wir dabei durch eine Zufallsgröße X. Die Verteilungsfunktion von X bezeichnen wir mit F_ϑ, d.h. $F_\vartheta(x) = P(X < x)$, wobei ϑ für einen oder mehrere noch zu bestimmende Parameter der Verteilung steht.

Stichprobe: Seien $X_1, \ldots, X_n$ n Realisierungen der Zufallsgröße X, d.h. $X_1, \ldots, X_n$ und X sind unabhängig und weisen identische Verteilungen auf, kurz: sie sind vom Typ i.i.d. Dann bezeichnen wir den Zufalligen Vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ als *Stichprobe vom Umfang n*. Auch ein konkreter Wert $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dieses Vektors wird als (konkrete) Stichprobe bezeichnet.

Stichprobenraum: Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe vom Umfang n. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{X}_n$ die Menge aller möglichen Werte dieses zufälligen Vektors. Diese Menge heißt *Stichprobenraum* und es gilt $\mathcal{X}_n \subset \mathbb{R}^n$.

Parameterraum: Die Menge aller möglichen Parameterwerte ϑ der Verteilungsfunktion F_ϑ der Zufallsgröße X heißt *Parameterraum* und wird mit Θ bezeichnet.

Stichprobenfunktion: Eine Funktion $T_n : \mathcal{X}_n \to \mathbb{R}$ heißt *Stichprobenfunktion*. Es handelt sich also um eine Funktion, die einer konkreten Stichprobe eine reelle Zahl $T_n(x_1, \ldots, x_n)$ zuordnet.

Beispiel. Nachdem wir nun die grundlegenden Begriffe der mathematischen Statistik kennen, wollen wir nochmals auf das obige Beispiel der Glühlampenproduktion eingehen. Als Grundgesamtheit betrachten wir die an einem festen Tag hergestellten Glühlampen. Deren zufällige Lebensdauer bezeichnen wir mit X. Uns interessiert nun, wie die Lebensdauer der Lampen verteilt ist, d.h. wir suchen die Verteilungsfunktion F_ϑ von X. Dazu wählen wir zufällig n Glühlampen aus und bestimmen deren Lebensdauer, wir entnehmen also eine Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ vom

Umfang n. Der Stichprobenraum $\mathcal{X}_n$ umfasst somit alle n-dimensionalen Vektoren mit nicht-negativen Komponenten. Ist die Art der Verteilung bekannt (z.B. $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ und somit $\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), können wir den Parameter mit Hilfe einer konkreten Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ schätzen. Wie dies genau funktioniert, behandeln wir weiter unten.

Beispiel. Als weiteres einführendes Beispiel betrachten wir analog zum obigen Beispiel die Produktion von elektrischen Sicherungen. Als Grundgesamtheit wählen wir die Tagesproduktion und untersuchen die Zufallsgröße

$$X = \begin{cases} 1, & \text{Sicherung defekt} \\ 0, & \text{Sicherung funktioniert} \end{cases},$$

deren Verteilungsfunktion F_ϑ gesucht ist. $X \sim \mathbf{B}(1, p)$ ist eine binomialverteilte Zufallsgröße mit dem Parameter $\vartheta = p \in \Theta = (0, 1)$, wobei p die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt angibt. Es ist also $P(X = 1) = p$ und $P(X = 0) = 1 - p$. Als Stichprobenraum erhalten wir

$$\mathcal{X}_n = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 1 \vee x_i = 0\big\}.$$

Ein Beispiel für eine Stichprobenfunktion ist das arithmetische Mittel $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

Im folgenden Bezeichnen wir mit $\hat{\vartheta}$ den Schätzwert eines Parameters ϑ. Um die Parameter einer Verteilung zu schätzen, gibt es zwei grundlegende Herangehensweisen, die wir in den folgenden Abschnitten behandeln werden:

Punktschätzung: Aus einer Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ wird ein konkreter Wert $\hat{\vartheta}$ für den Parameter ϑ berechnet.

Bereichsschätzung: Aus einer Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ werden zwei Zahlen $U(x_1, \ldots, x_n)$ und $O(x_1, \ldots, x_n)$ berechnet, so dass für ein kleines gegebenes α der wirkliche Parameter ϑ mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ im Intervall $[U(x_1, \ldots, x_n), O(x_1, \ldots, x_n)]$, dem sogenannten Konfidenz- oder Vertrauensintervall, liegt.

2.2 Punktschätzung

Eine Stichprobenfunktionen $T_n : \mathcal{X}_n \to \Theta$ mit Werten im Parameterraum bezeichnen wir als *Schätzfunktion*. Ziel der Punktschätzung ist es, auf Grundlage einer solchen Schätzfunktion für den unbekannten Parameter $\vartheta \in \Theta$ der Grundgesamtheit (genauer: der Verteilungsfunktion der in Zusammenhang mit der Grundgesamtheit betrachteten Zufallsgröße X) einen möglichst guten Schätzwert $\hat{\vartheta} = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ zu bestimmen. Wann eine Schätzung „gut“ ist, müssen wir noch näher untersuchen.

Häufig wird nicht der Parameter ϑ selbst geschätzt, sondern eine Funktion $\tau(\vartheta)$. Für $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ und $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$ können wir zum Beispiel durch getrennte Betrachtung von $\mu = \tau_1(\vartheta)$ und $\sigma^2 = \tau_2(\vartheta)$ die Schätzung in die zwei Schätzprobleme $\hat{\tau_1}(\vartheta)$ und $\hat{\tau_2}(\vartheta)$ zerlegen.

Eine Schätzfunktion T_n für den Parameter ϑ ist als Funktion der einzelnen Komponenten $X_1, \ldots, X_n$ einer Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ selbst wieder eine Zufallsgröße. Somit können wir den Erwartungswert $\mathbf{E}T_n$ und die Varianz $\mathbf{D}^2 T_n$ betrachten.

Definition 2.2.1. Eine Schätzfunktion T_n für eine Funktion $\tau(\vartheta)$ des unbekannten Parameters ϑ heißt *erwartungstreu*, wenn für jeden Parameterwert $\vartheta \in \Theta$ gilt:

$$\mathbf{E}T_n = \tau(\vartheta).$$

Satz 2.2.2. *Existieren in einer Grundgesamtheit X sowohl der Erwartungswert $\mathbf{E}X$ als auch die Varianz $\mathbf{D}^2X$ und ist $(X_1, \dots, X_n)$ eine Stichprobe, so gilt:*

a) Eine erwartungstreue Schätzfunktion für $\tau(\vartheta) = \mathbf{E}X$ ist

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

b) Eine erwartungstreue Schätzfunktion für $\tau(\vartheta) = \mathbf{D}^2X$ ist

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Beweis.

a) Es gilt

$$\mathbf{E}\bar{X}_n = \mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}X_i = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mathbf{E}X = \mathbf{E}X = \tau(\vartheta).$$

b) Für $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_i - \bar{X}_n)^2 &= \mathbf{E}(X_i - \bar{X}_n - (\mathbf{E}X - \mathbf{E}X))^2 = \mathbf{E}(X_i - \bar{X}_n - (\mathbf{E}X_i - \bar{X}_n))^2 \\
&= \mathbf{E}(X_i - \bar{X}_n - \mathbf{E}(X_i - \bar{X}_n))^2 = \mathbf{D}^2(X_i - \bar{X}_n) \\
&= \mathbf{D}^2X_i - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}^2X_k = \mathbf{D}^2X - \frac{n}{n^2}\mathbf{D}^2X = \frac{n-1}{n}\mathbf{D}^2X
\end{aligned}$$

und somit ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}S_n^2 &= \mathbf{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(X_i - \bar{X}_n)^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\cdot n\cdot\frac{n-1}{n}\mathbf{D}^2X = \mathbf{D}^2X = \tau(\vartheta).
\end{aligned}$$

□

Bei der Konstruktion von S_n^2 sind wir davon ausgegangen, dass der Erwartungswert $\mathbf{E}X$ unbekannt ist. Sollte der Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}X$ jedoch bekannt sein, so kann man an Stelle von S_n^2 als Schätzfunktion für $\tau(\vartheta) = \mathbf{D}^2X$ auch

$$V_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

verwenden. V_n^2 ist ebenfalls erwartungstreu (Beweis: Übung!).

Definition 2.2.3. Eine Schätzfunktion T_n für eine Funktion $\tau(\vartheta)$ des unbekannten Parameters ϑ heißt *konsistent*, wenn für alle $\vartheta \in \Theta$ und beliebig kleines reelles $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} = P(|T_n(X_1, \ldots, X_n) - \vartheta| > \varepsilon) = 0.$$

Satz 2.2.4. *Die Schätzfunktion $\bar{X}_n$ für $\tau(\vartheta) = \mathbf{E}X$ ist konsistent. Gilt $\mathbf{E}X^4 < \infty$, so ist auch die Schätzfunktion S_n^2 für $\tau(\vartheta) = \mathbf{D}^2X$ konsistent.*

Bemerkung. Für $\bar{X}_n$ folgt die Behauptung unmittelbar aus dem Gesetz der großen Zahlen. Für normalverteiltes $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ ist $\mathbf{E}X^4 < \infty$ erfüllt.

Definition 2.2.5. Besitzt die erwartungstreue Schätzfunktion T_n unter allen erwartungstreuen Schätzfunktionen für $\tau(\vartheta)$ die kleinste Varianz, so heißt T_n *wirksamste Schätzfunktion.*

Satz 2.2.6. *Ist $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt, so ist $\bar{X}_n$ die wirksamste Schätzfunktion für $\tau(\vartheta) = \mathbf{E}X$.*

2.3 Verteilungen wichtiger Stichprobenfunktionen

Bevor wir einige wichtige Stichprobenfunktionen betrachten, führen wir zunächst neben den schon bekannten stetigen Verteilungen Gleich-, Exponential- und Normalverteilung noch drei weitere stetige Verteilungen und den Begriff des Quantils ein.

2.3.1 Quantile

Definition 2.3.1. Sei X eine stetige Zufallsgröße mit der Dichtefunktion f und $\alpha \in (0, 1)$. Dann heißt die Zahl q_α *α-Quantil* zur Zufallsgröße X, wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{q_\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha.$$

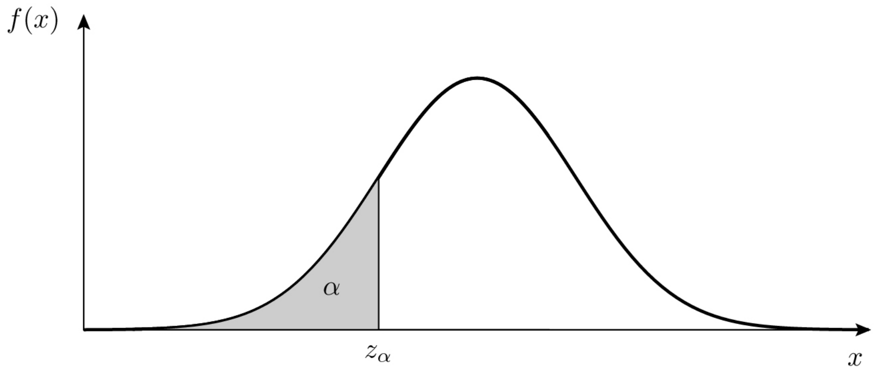
Bemerkung. α-Quantile werden in der Literatur manchmal auch als *α-Fraktile* bezeichnet. Zudem sind in einigen Büchern und Tabellen die Größen q_α und $q_{1-\alpha}$ vertauscht.

Beispiel. Für $\alpha = 0{,}5$ ist das α-Quantil $q_{0,5}$ gleich dem *Median* der Zufallsgröße X, d.h. es gilt

$$P(X < q_{0,5}) = P(X > q_{0,5}).$$

Im Fall einer symmetrischen Verteilung liegt der Median auf der Symmetrieachse.

Bemerkung. Das α-Quantil der Normalverteilung wird mit z_α bezeichnet.



2.3.2 Weitere stetige Verteilungen

2.3.2.1 χ^2-Verteilung

Zur Definition der χ^2-Verteilung (Chi-Quadrat-Verteilung) benötigen wir die *Gammafunktion*

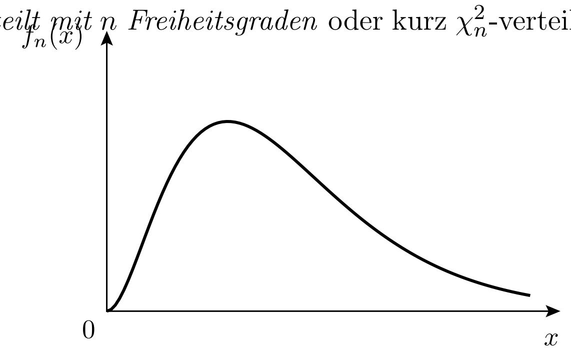
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t.$$

Für $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$.

Definition 2.3.2. Besitzt die stetige Zufallsgröße X die Dichtefunktion

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases},$$

so nennen wir X *χ^2-verteilt mit n Freiheitsgraden* oder kurz χ^2_n-verteilt und schreiben $X \sim \chi^2_n$.



Bemerkung. Die α-Quantile der χ^2-Verteilung werden mit $\chi^2_{n,\alpha}$ bezeichnet.

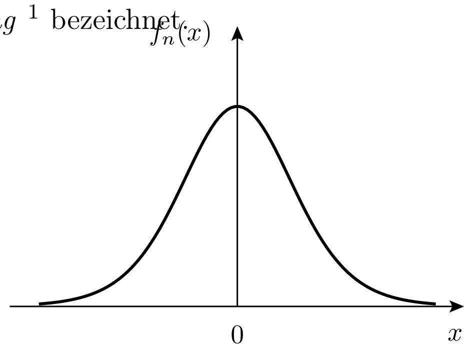
Die χ^2-Verteilung wird später bei der Bestimmung der Varianz einer normalverteilten Zufallsgröße eine wichtige Rolle spielen.

2.3.2.2 t-Verteilung

Definition 2.3.3. Besitzt die stetige Zufallsgröße X die Dichtefunktion

$$f_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

so nennen wir X **t**-*verteilt mit* n *Freiheitsgraden* und schreiben $X \sim \mathbf{t}_n$. Die **t**-Verteilung wird auch als STUDENT-*Verteilung* [1] bezeichnet.



Bemerkung. Die α-Quantile der **t**-Verteilung werden mit $t_{n,\alpha}$ bezeichnet.

Die **t**-Verteilung wird später bei der Bestimmung des Erwartungswertes einer normalverteilten Zufallsgröße eine wichtige Rolle spielen.

2.3.2.3 F-Verteilung

Zur Definition der **F**-Verteilung benötigen wir die *Betafunktion*

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

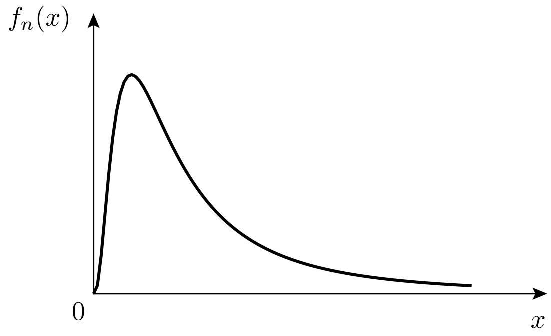
Für $k, l \in \mathbb{N}$ gilt $B(k,l) = \frac{(k-1)!(l-1)!}{(k+l-1)!}$.

Definition 2.3.4. Besitzt die stetige Zufallsgröße X die Dichtefunktion

$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot x^{\frac{m}{2}-1}}{B(\frac{m}{2},\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & x > 0 \end{cases},$$

so nennen wir X **F**-*verteilt* mit den Parametern m und n und schreiben $X \sim \mathbf{F}_{m,n}$. Die **F**-Verteilung wird auch als FISHER*'sche Verteilung* bezeichnet.

[1] Diese Verteilung wurde vom Mathematiker GOSSET unter dem Pseudonym STUDENT veröffentlicht



Bemerkung. Die α-Quantile der **F**-Verteilung werden mit $F_{m,n,\alpha}$ bezeichnet und es gilt

$$F_{m,n,\alpha} = \frac{1}{F_{m,n,1-\alpha}}.$$

2.3.3 Stichprobenfunktionen bei binomialverteilter Grundgesamtheit

Im Folgenden sei $X \sim \mathbf{B}(1,p)$ eine binomialverteilte Grundgesamtheit und $(X_1,\dots,X_n)$ eine Stichprobe. X_i und X sind also Zufallsgrößen vom Typ i.i.d. für $i=1,\dots,n$. Dann gilt

$$T_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathbf{B}(n,p)$$

und für hinreichend großes n ist nach dem Grenzverteilungssatz von Moivre/Laplace $T_n^{(0)} \approx \mathbf{N}(np, np(1-p))$ und somit

$$T_n^{(1)} = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \approx \mathbf{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

Durch Standardisierung von $T_n^{(1)}$ erhalten wir

$$T_n^{(2)} = \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \approx \mathbf{N}(0,1).$$

2.3.4 Stichprobenfunktionen bei normalverteilter Grundgesamtheit

Sei $X \sim \mathbf{N}(\mu,\sigma^2)$ eine normalverteilte Grundgesamtheit und $(X_1,\dots,X_n)$ eine Stichprobe. X_i und X sind also Zufallsgrößen vom Typ i.i.d. für $i=1,\dots,n$. Dann gilt

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathbf{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

und durch Standardisierung erhalten wir

$$T_n^{(3)} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \approx \mathbf{N}(0,1).$$

Weiter gilt

$$T_n^{(4)} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \sim \chi_n^2$$

und

$$T_n^{(5)} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Mit $S_n = \sqrt{S_n^2}$ ist

$$T_n^{(6)} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}}\sqrt{n} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n} \sim \mathbf{t}_{n-1}$$

Allgemein gilt für stochastisch unabhängige Zufallsgrößen $X \sim \mathbf{N}(0,1)$ und $Y \sim \chi_n^2$

$$T_n^{(7)} = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim \mathbf{t}_n.$$

Sind $X \sim \mathbf{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathbf{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ stochastisch unabhängige, normalverteilte Grundgesamtheiten und $(X_1, \ldots, X_{n_1})$ und $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ entsprechende Stichproben, so ist

$$T_{n_1,n_2} = \frac{\sigma_2^2 S_{n_1}^2}{\sigma_1^2 S_{n_2}^2} \sim \mathbf{F}_{n_1-1,n_2-1}.$$

2.4 Bereichsschätzung

Ziel der Bereichsschätzung ist es, mit Hilfe einer Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ zur Grundgesamtheit X mit der Verteilungsfunktion F_ϑ zwei Schätzfunktionen $U : \mathcal{X}_n \to \Theta$ und $O : \mathcal{X}_n \to \Theta$ für den unbekannten Parameter $\vartheta \in \Theta$ der Verteilung von X zu finden, so dass ϑ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1-\alpha$ im Intervall $[U(X_1, \ldots, X_n), O(X_1, \ldots, X_n)]$, dem sogenannten *Konfidenz-* oder *Vertrauensintervall*, liegt. Dabei heißt die Zahl $\alpha \in (0,1)$ *Irrtumswahrscheinlichkeit* und der Wert $1-\alpha$ heißt *Konfidenzniveau*. Als Formel ausgedrückt soll also gelten:

$$P\big(U(X_1, \ldots, X_n) \le \vartheta \le O(X_1, \ldots, X_n)\big) \ge 1 - \alpha.$$

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α ist dabei stets vorzugeben. Typische Werte sind zum Beispiel $\alpha = 0{,}05$ und $\alpha = 0{,}01$.

2.4.1 Konfidenzintervalle bei binomialverteilter Grundgesamtheit

Im Folgenden sei $X \sim \mathbf{B}(1,p)$ eine mit dem Parameter $\vartheta = p = P(X = 1) \in \Theta = (0,1)$ binomialverteilte Grundgesamtheit und $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe. Wir suchen nun die Grenzen eines Konfidenzintervalls für das Konfidenzniveau $1-\alpha$. Dazu nutzen wir die für hinreichend großes n standardnormalverteilte Stichprobenfunktion $T_n^{(2)} \approx \mathbf{N}(0,1)$ aus Abschnitt 2.3.3 und das Quantil $z_{1-\alpha/2}$ der Standardnormalverteilung. Unter Verwendung der Beziehung

$\Phi(z_{a-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ ergibt sich daraus zunächst

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = \Phi(z_{1-\alpha/2}) - \Phi(-z_{1-\alpha/2}) = 2\Phi(z_{1-\alpha/2}) - 1 = 1 - \alpha.$$

Durch Umrechnung in die Form

$$P\big(U(X_1, \ldots, X_n) \leq p \leq O(X_1, \ldots, X_n)\big) = 1 - \alpha$$

erhalten wir für die Grenzen des Konfidenzintervalls:

$$U(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n}{n + z^2_{1-\alpha/2}} \left[\bar{X}_n + \frac{z^2_{1-\alpha/2}}{2n} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{2n}\right)^2}\,\right],$$

$$O(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n}{n + z^2_{1-\alpha/2}} \left[\bar{X}_n + \frac{z^2_{1-\alpha/2}}{2n} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{2n}\right)^2}\,\right].$$

Beispiel. Aus der laufenden Produktion von Sicherungen wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 100$ entnommen und überprüft. Dabei erweisen sich 2 Sicherungen als defekt, also ist $\hat{p} = \bar{X}_n = \frac{2}{100} = 0{,}02$. Gesucht wird ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}95$. Aus einer Tabelle entnehmen wir $z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96$ und somit erhalten wir durch Einsetzen in die beiden Formeln das Intervall $[0{,}0055; 0{,}0700]$. Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 1000$ mit 20 defekten Sicherungen ist $p = \bar{X}_n = 0{,}02$ und für $1 - \alpha = 0{,}95$ ergibt sich das Konfidenzintervall $[0{,}0130; 0{,}0304]$. Wir sehen, dass mit steigendem n die Länge des Intervalls abnimmt, d.h. je größer die Stichprobe, desto genauer die Schätzung.

2.4.2 Konfidenzintervalle bei normalverteilter Grundgesamtheit

Im Folgenden sei $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ eine normalverteilte Grundgesamtheit und $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe. Wir suchen Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ für die beiden Parameter μ und σ^2 der Normalverteilung.

2.4.2.1 Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ^2

Wir verwenden die aus Abschnitt 2.3.4 bekannte Stichprobenfunktion $T_n^{(3)} \sim \mathbf{N}(0,1)$ und das Quantil $z_{1-\alpha/2}$ der Standardnormalverteilung. Aus

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

ergibt sich dann

$$P\big(U(X_1, \ldots, X_n) \leq \mu \leq O(X_1, \ldots, X_n)\big) = 1 - \alpha$$

mit

$$U(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}_n - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad O(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}_n + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

2.4.2.2 Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ^2

Der Parameter σ^2 sei unbekannt und mittels S_n^2 geschätzt. Wir verwenden die aus Abschnitt 2.3.4 bekannte Stichprobenfunktion $T_n^{(6)} \sim t_{n-1}$ und das Quantil $t_{n-1,1-\alpha/2}$ der t-Verteilung. Aus

$$P\left(-t_{n-1,1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n} \leq t_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

ergibt sich dann

$$P\big(U(X_1, \ldots, X_n) \leq \mu \leq O(X_1, \ldots, X_n)\big) = 1 - \alpha$$

mit

$$U(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}_n - t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \qquad O(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}_n + t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

2.4.2.3 Konfidenzintervall für σ^2 bei bekanntem μ

Wir verwenden die aus Abschnitt 2.3.4 bekannte Stichprobenfunktion $T_n^{(4)} \sim \chi_n^2$ und die Quantile $\chi_{n,1-\alpha/2}$ und $\chi_{n,\alpha/2}$ der χ^2-Verteilung. Aus

$$P\left(\chi_{n,\alpha/2} \leq \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \leq \chi_{n,1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

ergibt sich dann

$$P\big(U(X_1, \ldots, X_n) \leq \sigma^2 \leq O(X_1, \ldots, X_n)\big) = 1 - \alpha$$

mit

$$U(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, \qquad O(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{\chi^2_{n,\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$

2.4.2.4 Konfidenzintervall für σ^2 bei unbekanntem μ

Der Parameter μ sei unbekannt und mittels $\bar{X}_n$ geschätzt. Wir verwenden die aus Abschnitt 2.3.4 bekannte Stichprobenfunktion $T_n^{(5)} \sim \chi^2_{n-1}$ und die Quantile $\chi_{n-1,1-\alpha/2}$ und $\chi_{n-1,\alpha/2}$ der χ^2-Verteilung. Aus

$$P\left(\chi_{n-1,\alpha/2} \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

ergibt sich dann

$$P\big(U(X_1, \ldots, X_n) \leq \sigma^2 \leq O(X_1, \ldots, X_n)\big) = 1 - \alpha$$

mit

$$U(X_1, \ldots, X_n) = \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \qquad O(X_1, \ldots, X_n) = \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}.$$

2.4.3 Einseitige Konfidenzintervalle

In manchen Fällen sind nur einseitige Konfidenzintervalle gesucht, d.h. es interessiert die Wahrscheinlichkeit

$$P\big(U(X_1,\dots,X_n) \le \vartheta\big) = 1-\alpha \qquad \text{oder} \qquad P\big(\vartheta \le O(X_1,\dots,X_n)\big) = 1-\alpha.$$

Um solche einseitigen Konfidenzintervalle zu berechnen, nutzt man die Formel für die entsprechende Intervallgrenze mit α statt $\frac{\alpha}{2}$.

2.5 Tests

Wir betrachten eine Grundgesamtheit X mit der uns unbekannten Verteilungsfunktion F_ϑ und eine entsprechende Stichprobe $(X_1,\dots,X_n)$. Sinn und Zweck von Tests ist es nun, anhand der Stichprobe Aussagen über die Art der Verteilung der Grundgesamtheit (*parameterfreie Tests*) oder, bei bekannter Verteilungsart, über den Parameter $\vartheta \in \Theta$ der Verteilung (*Parametertests*) zu überprüfen. Es wird also getestet, ob die aufgestellte Behauptung über die Grundgesamtheit bzw. über deren Verteilungsparameter in signifikanter Weise von den aus der Stichprobe gewonnenen Informationen abweicht oder nicht. Daher heißen solche Tests auch *Signifikanztests*.

2.5.1 Allgemeines Schema für Parametertests

Jeder Parametertest wird nach dem folgenden Schema durchgeführt:

1. Wir formulieren unsere Behauptung über den unbekannten Parameter ϑ der Verteilung der Grundgesamtheit X als sogenannte *Nullhypothese* H_0 und stellen die entsprechende *Alternativhypothese* H_1 auf; diese ist das Komplement der Nullhypothese H_0. Für bekanntes ϑ_0 kommen zum Beispiel die folgenden Hypothesen in Frage:

$$\begin{aligned} H_0 &: \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{und} \quad H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0,\\ H_0 &: \vartheta \le \vartheta_0 \quad \text{und} \quad H_1 : \vartheta > \vartheta_0,\\ H_0 &: \vartheta \ge \vartheta_0 \quad \text{und} \quad H_1 : \vartheta < \vartheta_0. \end{aligned}$$

   Wir möchten nun wissen, ob die Behauptung H_0 mit den in der Stichprobe $(X_1,\dots,X_n)$ enthaltenen Informationen vereinbar ist oder ob wir H_0 ablehnen müssen und somit H_1 für richtig befinden.

2. Wir wählen eine sogenannte *Irrtumswahrscheinlichkeit* α. Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass H_0 auf Grund der Stichprobe abgelehnt wird, obwohl H_0 richtig ist.

3. Wir wählen eine Stichprobenfunktion T_n (*Testfunktion*), deren Verteilung bei Gültigkeit von H_0 bekannt ist. Mit Hilfe dieser Testfunktion erhalten wir in Form einer reellen Zahl Informationen über die Stichprobe. (Im Folgenden werden wir für die Zufallsgröße $T_n(X_1,\dots,X_n)$ und die konkreten Funktionswerte $T_n(x_1,\dots,x_n)$ zur besseren Übersicht kurz T_n schreiben.)

4. Wir wählen einen *kritischen Bereich* K für die Werte der Testfunktion T_n, so dass $P_{H_0}(T_n \in K) \le \alpha$ gilt. D.h. falls die Nullhypothese H_0 richtig ist, soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Testfunktion im kritischen Bereich liegt, kleiner oder gleich der Irrtumswahrscheinlichkeit sein.

5. Sollte für die konkrete, zum Zwecke des Tests entnommene Stichprobe der Funktionswert der Testfunktion T_n in den kritischen Bereich fallen, so müssen wir H_0 ablehnen. Andernfalls spricht die Stichprobe nicht gegen die Hypothese H_0. In Formeln:
   - $T_n \notin K \Rightarrow H_0$ wird angenommen,
   - $T_n \in K \Rightarrow H_0$ wird abgelehmt.

Da das Ergebnis eines Parametertests nur auf Stichproben beruht, können die zwei folgenden Fehler auftreten.

Fehler 1. Art: Die Hypothese H_0 ist richtig, wird aber auf Grund der Stichprobe abgelehnt. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler beträgt α.

Fehler 2. Art: Die Hypothese H_0 ist falsch, wird aber nicht abgelehnt, da die Stichprobe für H_0 spricht. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieses Fehlers ist im Allgemeinen unbekannt.

2.5.2 Parametertests bei binomialverteilter Grundgesamtheit

Sei $X \sim \mathbf{B}(1,p)$ eine mit dem Parameter p binomialverteilte Grundgesamtheit und sei der Wert p_0 gegeben. Als Beispiel für einen Parametertest möchten wir anhand einer Stichprobe $(X_1,\ldots,X_n)$ vom Umfang n die Hypothese

$$H_0 : p \leq p_0$$

überprüfen. Die entsprechende Alternativhypothese ist $H_1 : p > p_0$. α sei die Irrtumswahrscheinlichkeit. Eine geeignete Testfunktion ist die uns bereits bekannte Stichprobenfunktion

$$T_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathbf{B}(n,p).$$

Entscheidend für das Testergebnis ist nun die Wahrscheinlichkeit

$$P_{H_0}(T_n^{(0)} \geq c) = 1 - P_{H_0}(T_n^{(0)} < c) = 1 - \sum_{k=0}^{c-1} P_{H_0}(T_n^{(0)} = k) = 1 - \sum_{k=0}^{c-1} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k}.$$

Ist diese kleiner oder gleich α, so müssen wir H_0 ablehnen; ist sie größer als α, so können wir davon ausgehen, dass H_0 richtig ist.

Beispiel. Wir betrachten nochmals die Produktion von Sicherungen, d.h. $X \sim \mathbf{B}(1,p)$, wobei p die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt angibt. Unsere Hypothese sei $H_0 : p \leq p_0$ mit $p_0 = 0{,}01$. Wir setzen $\alpha = 0{,}05$ und entnehmen eine Stichprobe $(x_1,\ldots,x_{100})$ vom Umfang $n = 100$ mit $c = T_n^{(0)}(x_1,\ldots,x_{100}) = 2$; es sind also zwei Sicherungen defekt in unserer Stichprobe. Sprechen zwei defekte Sicherungen bei 100 überprüften für unsere Hypothese H_0 oder nicht? Durch Einsetzen der gegebenen Werte in obige Gleichung erhalten wir

$$P_{H_0}(T_n^{(0)} \geq 2) = 1 - \binom{100}{0} 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^{100} - \binom{100}{1} 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^{99} = 0{,}264238 > 0{,}05 = \alpha.$$

Somit können wir die Hypothese $p \leq 0{,}01$ als richtig annehmen. Analog können wir die Rechnung für Stichproben mit $c = 3$ oder $c = 4$ usw. durchführen. Ab $c = 4$ müssen wir die Hypothese dann jedoch ablehnen.

Gehen wir nach dem oben beschriebenen allgemeinen Schema für Parametertests vor, so können wir zum Test der drei Hypothesen

$$H_0 : \begin{cases} p = p_0 \\ p \leq p_0 \\ p \geq p_0 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad H_1 : \begin{cases} p \neq p_0 \\ p > p_0 \\ p < p_0 \end{cases}$$

bei hinreichend großem n die Testfunktion

$$T_n^{(2)} = \frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \approx \mathbf{N}(0,1)$$

und den kritischen Bereich

$$K = \begin{cases} |T_n| > z_{1-\alpha/2} \\ T_n > z_{1-\alpha} \\ T_n < -z_{1-\alpha} \end{cases}$$

verwenden.

2.5.3 Parametertests bei normalverteilter Grundgesamtheit

Sei $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ eine normalverteilte Grundgesamtheit und $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe und sei die Irrtumswahrscheinlichkeit α vorgegeben. Wir betrachten im Folgenden Hypothesen über den Erwartungswert μ bei bekannter und unbekannter Varianz σ^2 und über die Varianz bei unbekanntem Erwartungswert. Auf Hypothesen über die Varianz bei bekanntem Erwartungswert gehen wir nicht ein.

2.5.3.1 Hypothesen über μ bei bekanntem σ^2

Sei σ^2 bekannt und der Wert μ_0 vorgegeben. Wir testen drei verschiedene Nullhypothesen H_0 mit der jeweiligen Alternativhypothese H_1:

$$H_0 : \begin{cases} \mu = \mu_0 \\ \mu \leq \mu_0 \\ \mu \geq \mu_0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad H_1 : \begin{cases} \mu \neq \mu_0 \\ \mu > \mu_0 \\ \mu < \mu_0 \end{cases} \quad .$$

Als Testfunktion wählen wir

$$T_n^{(3)}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathbf{N}(0,1).$$

Als kritischer Bereich ergibt sich

$$K = \begin{cases} \{x : |x| > z_{1-\alpha/2}\} \\ \{x : x > z_{1-\alpha}\} \\ \{x : x < -z_{1-\alpha}\} \end{cases},$$

da gilt:

$$P_{H_0}(T_n \in K) = \begin{cases} 1 - P\left(\left|\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| \leq z_{1-\alpha/2}\right) \\ P\left(\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{1-\alpha}\right) \\ P\left(\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} < -z_{1-\alpha}\right) \end{cases} = \begin{cases} 1 - (\Phi(z_{\alpha/2}) - \Phi(-z_{1-\alpha/2})) \\ 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) \\ \Phi(-z_{1-\alpha}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 - 2\Phi(z_{1-\alpha/2}) \\ \alpha \\ 1 - \Phi(z_{1-\alpha}) \end{cases} = \begin{cases} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{cases}.$$

2.5.3.2 Hypothesen über μ bei unbekanntem σ^2

Sei σ^2 unbekannt und durch S_n^2 geschätzt und der Wert μ_0 vorgegeben. Wir testen drei verschiedene Nullhypothesen H_0 mit der jeweiligen Alternativhypothese H_1:

$$H_0 : \begin{cases} \mu = \mu_0 \\ \mu \leq \mu_0 \\ \mu \geq \mu_0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad H_1 : \begin{cases} \mu \neq \mu_0 \\ \mu > \mu_0 \\ \mu < \mu_0 \end{cases}.$$

Als Testfunktion wählen wir

$$T_n^{(6)}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n}\sqrt{n} \sim \mathbf{t}_{n-1}.$$

Als kritischer Bereich ergibt sich

$$K = \begin{cases} \{x : |x| > t_{n-1,1-\alpha/2}\} \\ \{x : x > t_{n-1,1-\alpha}\} \\ \{x : x < -t_{n-1,1-\alpha}\} \end{cases}.$$

Beispiel. Zur Beurteilung der Qualität eines neuen Streckenmessgeräts wird eine 1 km lange Referenzstrecke $n = 10$ mal gemessen. Das Messgerät liefert dabei für $x_1, \ldots, x_n$ die folgenden Werte (in Meter):

998,0; 1001,0; 1003,0; 1000,5; 999,0; 997,5; 1000,0; 999,5; 996,0; 998,5.

Wir nehmen die Zufallsgröße „gemessene Länge" als normalverteilt an. Aus den Messwerten erhalten wir

$$\bar{X}_n = 999{,}3 \text{ m}, \qquad s_n^2 = 3{,}9 \text{ m}^2, \qquad s_n = 1{,}975 \text{ m}.$$

Uns interessiert nun, ob das Gerät im Mittel die korrekte Entfernung liefert, d.h. wir testen die

Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0 = 1000$ m. Die Alternativhypothese ist $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Die Irrtumswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 0{,}05$ und als kritischen Bereich haben wir

$$K = \{x : |x| > t_{9;0,975} = 2{,}262\} = (-\infty; -2{,}262) \cup (2{,}262; \infty).$$

Die Testfunktion liefert

$$T_n^{(6)}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{s_n}\sqrt{n} = \frac{999{,}3 - 1000}{1{,}975}\sqrt{10} = -1{,}12 \notin K.$$

Die Messwerte sprechen also nicht gegen unsere Behauptung. Wir können somit annehmen, dass das Messgerät im Mittel korrekt arbeitet.

2.5.3.3 Hypothesen über σ^2 bei unbekanntem μ

Sei μ unbekannt und durch $\bar{X}_n$ geschätzt und der Wert σ_0^2 vorgegeben. Wir testen drei verschiedene Nullhypothesen H_0 mit der jeweiligen Alternativhypothese H_1:

$$H_0 : \begin{cases} \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad H_1 : \begin{cases} \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \\ \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases} .$$

Als Testfunktion wählen wir

$$T_n^{(5)}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Als kritischer Bereich ergibt sich

$$K = \begin{cases} \{x : x < \chi^2_{n-1,\alpha/2} \vee x > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\} \\ \{x : x > \chi^2_{n-1,1-\alpha}\} \\ \{x : x < \chi_{n-1,\alpha}\} \end{cases} .$$

Beispiel. Wir betrachten nochmals das vorhergehende Beispiel des Streckenmessgeräts. Wir möchten nun weitere Aussagen über die Qualität des Geräts machen, indem wir die Hypothese $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 = 4$ m testen. Dann ist $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ und mit $\alpha = 0{,}05$ und

$$K = \{x : x < \chi^2_{9;0,05} = 3{,}325\} = (0; 3{,}325)$$

liefert die Testfunktion

$$T_n^{(5)}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \frac{9 \cdot 3{,}9}{4} = 8{,}775 \notin K,$$

d.h. die Messwerte sprechen nicht gegen die Hypothese. Aus praktischer Sicht ist die hohe Varianz ein Merkmal für schlechte Messqualität.

2.5.4 Vergleich zweier normalverteilter Grundgesamtheiten

Wir betrachten die zwei normalverteilten Grundgesamtheiten $X^{(1)} \sim \mathbf{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X^{(2)} \sim \mathbf{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Die zufälligen Vektoren $(X_1^{(1)}, \ldots, X_{n_1}^{(1)})$ und $(X_1^{(2)}, \ldots, X_{n_2}^{(2)})$ seien entsprechende Stichproben. Wir gehen davon aus, dass $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gilt und möchten wissen, ob die Erwartungswerte der beiden Grundgesamtheiten übereinstimmen, d.h. wir testen die Hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Die Alternativhypothese ist $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ und α sei die Irrtumswahrscheinlichkeit. Wir verwenden als Testfunktion

$$T_n(X_1^{(1)}, \ldots, X_{n_1}^{(1)}, X_1^{(2)}, \ldots, X_{n_2}^{(2)}) = \frac{\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2}}{\sqrt{\frac{(n_2-1)S_{n_1}^2 + (n_2-1)S_{n_2}^2}{n_1+n_2-2}}} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \sim \mathbf{t}_{n_1+n_2-2}$$

und als kritischen Bereich

$$K = \{x : |x| > t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\}.$$

Beispiel. Ein TV-Gerätehersteller bezieht Transistoren von zwei verschiedenen Lieferanten. Die gelieferten Transistoren sollen einen Stromverstärkungsfaktor von 100 haben. Uns interessiert nun, ob die Mittelwerte μ_1 und μ_2 der Stromverstärkungsfaktoren bei beiden Lieferanten übereinstimmen, wenn wir davon ausgehen, dass $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gilt. Es sei $\alpha = 0{,}05$ und die beiden Stichproben liefern

$$\begin{array}{lll} n_1 = 36, & \bar{x}_{n_1} = 108{,}1, & s_{n_1}^2 = 13{,}6, \\ n_2 = 28, & \bar{x}_{n_2} = 99{,}8, & s_{n_2}^2 = 16{,}7. \end{array}$$

Der kritische Bereich ist

$$K = \{x : |x| > t_{62;0{,}975} = 1{,}999\} = (-\infty; \text{-}1{,}999) \cup (1{,}999; \infty)$$

und aus der Testfunktion erhalten wir

$$T_n = 8{,}519 \in K.$$

Somit wird die Hypothese abgeleht, d.h. die Erwartungswerte der Stromverstärkungsfaktoren beider Lieferanten stimmen nicht überein.

Beim Test der Erwartungswerte der beiden Grundgesamtheiten auf Gleichheit haben wir die Gleichheit der beiden Streuungen vorausgesetzt. Auch dies können wir als Hypothese verwenden, d.h. wir testen $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ mit der entsprechenden Alternativhypothese $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Als Testfunktion nutzen wir

$$T_n(X_1^{(1)}, \ldots, X_{n_1}^{(1)}, X_1^{(2)}, \ldots, X_{n_2}^{(2)}) = \frac{S_{n_1}^2}{S_{n_2}^2} \sim \mathbf{F}_{n_1-1,n_2-1}$$

und als kritischen Bereich

$$K = \{x : x < F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2} \vee x > F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}\}.$$

Beispiel. Für das vorhergehende Beispiel erhalten wir beim Test auf Streuungsgleichheit mit $\alpha = 0{,}1$

$$K = \{x : x < F_{35;27;0{,}05} \vee x > F_{35;27;0{,}95}\} = (0; 0{,}553) \cup (1{,}857; \infty)$$

und

$$T_n = 0{,}814 \notin K.$$

Wir können somit davon ausgehen, dass die Streuungen bei beiden Lieferanten gleich sind. Für $\alpha = 0{,}05$ erhält man $K = (0; 0{,}493) \cup (2{,}097; \infty)$.

2.5.5 χ^2-Test

Beim χ^2-Test (Chi-Quadrat-Test) handelt es sich um einen parameterfreien Test, d.h. wir testen anhand einer Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$, ob die Verteilungsfunktion F einer Grundgesamtheit X mit einer vorgegebenen Verteilungsfunktion F_0 übereinstimmt. Das Testschema für Parametertests kann mit geringen Anpassungen auch für parameterfreie Tests verwendet werden. Als Nullhypothese haben wir $H_0 : F(x) = F_0(x)$ mit der Alternativhypothese $H_1 : F(x) \neq F_0(x)$. Hauptproblem bei parameterfreien Tests ist das Finden einer geeigneten Testfunktion.

Vorgehensweise. Als ersten Schritt unterteilen wir die reellen Zahlen in r paarweise disjunkte Intervalle $I_1, \ldots, I_r$:

$$\mathbb{R} = I_1 \cup \cdots \cup I_r = (-\infty, a_1) \cup [a_1, a_2) \cup \cdots \cup [a_{r-2}, a_{r-1}) \cup [a_{r-1}, \infty).$$

Dann bestimmen wir für jedes Intervall die Anzahl y_i der Stichprobenelemente im Intervall I_i (es gilt $\sum_{i=1}^r y_i = n$) und die „ideale“ Anzahl y_i^0 von Stichprobenelementen im Intervall I_i, d.h. die der vorgegebenen Verteilung F_0 entsprechende Anzahl. Unter der Annahme, dass H_0 richtig ist, gilt also $y_i^0 = n \cdot P_{H_0}(X \in I_i)$. Als Testfunktion verwenden wir

$$T = \sum_{i=1}^{r} \frac{(y_i - y_i^0)^2}{y_i^0} \sim \chi^2_{r-1-m},$$

wobei m die Anzahl der unbekannten und somit zu schätzenden Parameter der angenommenen Verteilung ist. Bezeichnen wir mit α die Irrtumswahrscheinlichkeit, so erhalten wir als kritischen Bereich

$$K = \{x : x > \chi^2_{r-1-m,1-\alpha}\}.$$

Bemerkung. Um den bei dieser Vorgehensweise gemachten Fehler gering zu halten, sollte die Faustregel $y_i^0 \geq 5$ beachtet werden.

Beispiel. Beim maschinellen Zuschnitt von Holzleisten wird anhand einer Stichprobe die Abweichung der tatsächlichen Länge vom Nennmaß untersucht. Wir vermuten, dass es sich bei der Zufallsgröße „Betrag der Abweichung vom Nennmaß“ um eine normalverteilte Zufallsgröße handelt. Die Nullhypothese ist also

$$H_0 : F(x) = \Phi\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)$$

und wir haben $m = 2$ (die Parameter μ und σ^2 sind unbekannt und müssen geschätzt werden). Aus der Stichprobe erhalten wir die folgenden Daten:

$$n = 150, \qquad \mu \approx \bar{x}_n = 40{,}48, \qquad \sigma \approx s_n = 5{,}71.$$

Wir wählen als Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}1$ und zerlegen die reellen Zahlen in $r = 8$ Intervalle wie in der Tabelle angegeben:

i	I_i	y_i	y_i^0
1	0 – 30,5	5	6,03
2	30,5 – 33,5	13	10,59
3	33,5 – 36,5	23	19,81
4	36,5 – 39,5	22	28,35
5	39,5 – 42,5	29	30,94
6	42,5 – 45,5	29	25,81
7	45,5 – 48,5	16	16,44
8	48,5 – ∞	13	12,01

Der kritische Bereich ist

$$K = \{x : x > \chi^2_{r-1-m,1-\alpha} = \chi^2_{5;0,9} = 9{,}27\} = (9{,}27; \infty)$$

und die Testfunktion liefert

$$T = \sum_{i=1}^{8} \frac{(y_i - y_i^0)^2}{y_i^0} = 3{,}27 \notin K.$$

Wir können also davon ausgehen, dass die betragsmäßige Abweichung vom Nennwert normalverteilt ist.

2.6 Spezielle Schätzverfahren

2.6.1 Maximum-Likelihood-Methode

Im Folgenden sei X eine Grundgesamtheit mit der Verteilungsfunktion F_ϑ und $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe. Der Parameter $\vartheta \in \Theta$ der Verteilung der Grundgesamtheit ist unbekannt und soll geschätzt werden. Ziel der Maximum-Likelihood-Schätzung (kurz: MLS) ist es, den Schätzwert $\hat{\vartheta}_{ML}$ für ϑ so zu wählen, dass die zur Schätzung verwendete Stichprobe unter allen denkbaren Stichproben die höchste Wahrscheinlichkeit aufweist.

Dazu drückt man die Wahrscheinlichkeit der Stichprobe als Funktion von ϑ aus und sucht das Maximum. Eine solche Funktion heißt *Likelihood-Funktion* und wird mit $like(\vartheta)$ bezeichnet. Meist ist es einfacher, das Maximum der Funktion $L(\vartheta) := \ln like(\vartheta)$ zu bestimmen. Da die Logarithmusfunktion streng monoton wachsend ist, ändert sie nichts an den Extremwerten. Die Maximierung erfolgt wie üblich durch Nullsetzen der ersten Ableitung $L'(\vartheta)$.

Eigenschaften der Maximum-Likelihood-Schätzung

- Alle MLS sind konsistent.
- Existiert eine wirksamste Schätzfunktion, so erhält man diese durch die MLS.
- MLS sind assymptotisch normalverteilt mit dem Erwartungswert ϑ.