Ergänzungen II zur Vorlesung Inverse Probleme Sommersem. 2018

Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

BERND HOFMANN

TU Chemnitz
Fakultät für Mathematik
D-09107 Chemnitz, GERMANY

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Mathematik!

Mai 2018

Email: hofmannb@mathematik.tu-chemnitz.de
Internet: http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/ip/

- DIRK WERNER: **Funktionalanalysis.** Springer-Verlag Berlin etc., 1997 (2. Auflage), Kapitel VII.3, Seite 308ff.

Satz (Spektralsatz, Multiplikationsoperatorversion):

Sei X ein Hilbertraum und $H : D(H) \subseteq X \to X$ ein linearer und selbstadjungierter Operator mit Definitionsbereich $D(H)$. Dann existieren ein (für separables X σ-endlicher) Maßraum (Ω, Σ, μ), eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sowie ein unitärer Operator $U : X \to L^2(\Omega, \mu)$ mit

(a) $x \in D(H) \quad \Longleftrightarrow \quad f \cdot Ux \in L^2(\Omega, \mu)$,

(b) $UHU^* \varphi = f \cdot \varphi$ für $\varphi \in D(M_f)$, wobei $M_f \varphi := f \cdot \varphi$ ein Multiplikationsoperator in $L^2(\Omega, \mu)$ mit Definitionsbereich $D(M_f) = \{\varphi \in L^2(\Omega, \mu) : \; f \cdot \varphi \in L^2(\Omega, \mu)\}$ ist.

Bemerkungen:

Wegen Selbstadjungiertheit hat H ein reelles Spektrum mit

$$\overline{\text{ess range}(f)} \; = \; \text{spectrum}(H) \subseteq \mathbb{R}.$$

Falls die Zahl Null ein Häufungspunkt des Spektrums ist, dann ist $+\infty$ bzw. $-\infty$ Häufungspunkt der Moore-Penrose-Inversen $H^\dagger$ (bzw. von H^{-1} für injektives H). Dann ist $H^\dagger$ ein linearer unbeschränkter Operator, also gilt $R(H) \neq \overline{R(H)}$ und $(*)$ $Hx = y$ ist inkorrekt nach Nashed.

Fall 1: $H : X \to X$ ist ein beschränkter lin. Operator, $D(H) = X$
Fall 2: $H : D(H) \subset X \to X$ ist ein unbeschränkter Operator und $D(H)$ liegt dicht in X.

Wir betrachten für $Ax = y$ Inkorrektheit nach Nashed mit

$$H := A^*A\,, \quad A \in \mathcal{L}(X,Y), \quad R(A) \neq \overline{R(A)}\,.$$

Dann hat der wesentliche Wertebereich von f mit $\mathrm{ess\,range}(f) \subseteq [0, \|A\|^2]$ die Zahl Null als Häufungspunkt.

Null ist Eigenwert von A und ebenso von H genau dann, wenn A und damit H nicht injektiv ist. Die Nullräume $N(A) = N(H)$ sind dann die zum Eigenwert Null gehörigen Eigenunterräume.

Beispiel: Beschränkter **Multiplikationsoperator** in $L^2(0,1)$

$[Ax](t) := m(t)\,x(t) \quad (0 \le t \le 1)$ mit $m \in L^\infty(0,1)$.

$H = A^*A$ ist dann positiv semidefiniter selbstadjungierter linearer Operator in $X = L^2(0,1)$ mit Multiplikatorfunktion

$$f(t) = |m(t)|^2 \quad (0 \le t \le 1).$$

$\Omega = (0,1),\ \Sigma = \mathcal{L}((0,1))$ und Lebesguemaß μ beschreiben Maßraum (Ω, Σ, μ), unitärer Operator U ist Einheitsoperator.

Inkorrektheit nach Nashed genau dann, wenn Funktion f eine wesentliche Nullstelle hat: $f(t) = t^\kappa,\ f(t) = e^{-\frac{1}{t^\kappa}},\ \kappa > 0$.

A und H sind injektiv, wenn $\mu(\{t \in [0,1] : m(t) = 0\}) = 0$ gilt.

Dann ist der inverse Operator $[A^{-1}y](t) = y(t)/m(t)$ unbeschränkt, wenn m wesentliche Nullstelle hat.

Ähnlich kann man den Multiplikationsoperator in $L^2(\mathbb{R}^d)$ $(d = 1, 2, ...)$ betrachten!

Solche **Multiplikationsoperatoren** A bzw. H mit streng monotonen stetigen Funktionen m bzw. f besitzen **rein stetiges Spektrum**, sie sind also keine kompakten Operatoren.

Falls m bzw. f zusätzlich wesentliche Nullstellen besitzen, so liegt **Inkorrektheit nach Nashed vom Typ I** vor.

Falls A bzw. H **kompakte Operatoren** sind, so liegt **Inkorrektheit nach Nashed vom Typ II** vor:

Beispiel:

$H : X \to X$ injektiver **kompakter** linearer Operator, $D(H) = X$,

$H\, u_n = \lambda_n\, u_n$ $(n = 1, 2, ...)$, $\quad \{u_n\}$ vollständiges ONS in X,

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n \geq ... \to 0$ für $n \to \infty$ Eigenwerte von H.

$U : X \to \ell^2 = L^2(\mathbb{N}, \mu)$ unitärer Operator, $\Omega = \mathbb{N},\ \Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, wobei $\mu(\{n\}) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ ein σ-endliches Maß bildet.

Wir können unendliche Zahlenfolgen $\varphi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ als quadratisch integrierbare Funktionen $\varphi_n = \varphi(n)$ auf Ω sehen:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 = \int\limits_{\Omega} \varphi^2(\omega) d\mu < \infty$, also $\varphi \in L^2(\mathbb{N}, \mu)$.

$$Ux := \{< x, u_n >\}_{n=1}^{\infty}, \quad U^*\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n u_n,\ \varphi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2.$$

$$UHU^*\varphi = \{\lambda_n\, \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad [M_f\varphi]_n = f(n) \cdot \varphi(n),\ f(n) = \lambda_n,\ n \in \mathbb{N}$$

Offenbar gilt: $\overline{\mathrm{range}(f)} = \mathrm{spectrum}(H)$.