

# **MATHEMATIK**

**FÜR INGENIEURE UND NATURWISSENSCHAFTLER**

Bernd Hofmann

## **Mathematik inverser Probleme**



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig

# Mathematik inverser Probleme

Von Prof. Dr. Bernd Hofmann



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig 1999

Das Lehrwerk wurde 1972 begründet und wird herausgegeben von:

Prof. Dr. Otfried Beyer, Prof. Dr. Horst Erfurth,  
Prof. Dr. Christian Großmann, Prof. Dr. Horst Kadner,  
Prof. Dr. Karl Manteuffel, Prof. Dr. Manfred Schneider,  
Prof. Dr. Günter Zeidler

Verantwortlicher Herausgeber dieses Bandes:

Prof. Dr. Christian Großmann

Autor:

Prof. Dr. Bernd Hofmann  
Technische Universität Chemnitz

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem Papier.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

**Hofmann, Bernd:**

Mathematik inverser Probleme / von Bernd Hofmann.

[Verantw. Hrsg. dieses Bd.: Christian Großmann]. –

Stuttgart ; Leipzig : Teubner, 1999

(Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler)

ISBN 3-519-00254-X

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© 1999 B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig

Printed in Germany

Druck und Bindung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

Umschlaggestaltung: E. Kretschmer, Leipzig



# Vorwort

Es ist ein natürlicher Wunsch des Menschen und vielfach auch eine Notwendigkeit, **inverse Probleme** zu lösen, d.h. nach Ursachen von Zuständen, Entwicklungen und Phänomenen zu forschen, die man in der Natur, in Wirtschaft und Gesellschaft oder im täglichen Leben beobachten kann. Gelingt es, aus den erlebten Wirkungen die dafür entscheidenden Ursachen zu identifizieren, so bestehen gute Aussichten, daß bisher unbekannte Zusammenhänge erkannt, notwendige Entscheidungen getroffen und zukünftige Entwicklungen vorhergesagt werden können.

Mit dem vorliegenden Buch wird einem möglichst großen Interessentenkreis die Gelegenheit geboten, die Formulierung inverser Aufgaben mit mathematischen Mitteln an überschaubaren Beispielen kennenzulernen. Darüber hinaus zeigt das Buch dem Leser, welche Werkzeuge die Mathematik bereithält, um inverse Probleme mathematisch einheitlich zu beschreiben, zu klassifizieren und zu analysieren sowie näherungsweise stabil zu lösen. Dem mit mathematischen Grundkenntnissen ausgestatteten Leser wird es wenig Mühe bereiten, die kleine Zahl von vorgestellten Bausteinen der Funktionalanalysis kennenzulernen, die nötig sind, um inverse Probleme effizient beschreiben zu können. Insofern wendet sich das Buch gleichermaßen an Studierende mathematisch-naturwissenschaftlicher, technischer und wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen als auch an Absolventen, Naturwissenschaftler und Ingenieure, Forscher und Manager, die in ihrem Aufgabenkreis auf inverse Probleme stoßen und diese mathematisch handhaben wollen.

Bei der mathematischen Modellierung von Prozessen in Natur, Wirtschaft und Technik mit Hilfe von algebraischen Gleichungen, linearen oder nichtlinearen Gleichungssystemen, Integral- und Differentialgleichungen bestehen inverse Probleme vielfach darin, skalare bzw. vektorielle Parameter oder Parameterfunktionen in den Modellgleichungen, aber auch in Anfangszuständen oder Randbedingungen zu bestimmen, die man nicht direkt messen kann, deren Wirkung uns aber bei der Beobachtung von Prozeßzuständen entgegentritt. Ursachenforschung besteht dann in der Identifikation von Parametern auf der Grundlage der Interpretation indirekter Messungen, wobei aus den beobachteten Wirkungen ein Höchstmaß an Information über die zu bestimmenden Ursachen gewonnen werden soll. Zu den inversen Problemen zählen auch alle Diagnoseaufgaben, die in der Medizin sowie in der Technik auftreten und das Ziel haben, aus Meßdaten die entscheidenden biophysikalischen Zustände im menschlichen Körper oder wichtige technische Parameter von Geräten und Bauteilen rekonstruieren

zu können. An einigen Stellen werden wir zusätzlich solche inversen Probleme in die Betrachtungen einbeziehen, bei denen die gesuchten Parameter optimal so gesteuert werden sollen, daß sie gewünschte Wirkungen hervorbringen.

In allen geschilderten Anwendungssituationen erweisen sich die betrachteten inversen Probleme in der Regel als inkorrekt, d.h., ihre Lösungen, wenn solche denn existieren, sind nicht immer eindeutig bestimmt und hängen vor allen Dingen nicht stabil von den gegebenen Eingangsdaten ab. Der Untersuchung dieses sehr nachteiligen Phänomens der **Inkorrektheit** inverser Probleme und seiner Überwindung durch Nutzung von Regularisierungsmethoden ist ein Großteil des Buches gewidmet. **Regularisierung** bedeutet ganz allgemein den Einsatz von objektiven oder subjektiven Zusatzinformationen über die gesuchten Parameter sowie über den Vorgang der Datengewinnung bei der Konstruktion von Näherungslösungen. Dabei spielen die Kenntnisse und Erfahrungen von Spezialisten unterschiedlichster Fachrichtungen, welche die Mathematik zur Lösung ihrer Probleme einsetzen wollen, eine entscheidende Rolle bei der Formulierung solcher Zusatzinformationen. In diesem Sinne wird eine praktisch erfolgreiche Lösung inverser Probleme meist durch interdisziplinäre Zusammenarbeit erreicht. Diese setzt jedoch bei allen Beteiligten Grundkenntnisse der Mathematik inverser Probleme voraus. Das Studium des vorliegenden Buches kann zu deren Erwerb gewiß einiges beitragen.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Christian Großmann (Dresden) sehr für die wertvollen Hinweise bei der Vollendung des Buches. Mein besonderer Dank gilt auch Herrn Diplom-Mathematiker Gunter Fleischer (Chemnitz) für die mit großer Sorgfalt vorgenommene Prüfung und Korrektur des Manuskripts in allen Phasen seiner Entstehung sowie die interessanten inhaltlichen Anregungen und die Beratung in Softwarefragen. Auch spreche ich dem Verlag B. G. Teubner, insbesondere Herrn J. Weiß, meinen Dank für die verständnisvolle und gute Zusammenarbeit aus.

Chemnitz, im Januar 1999

Bernd Hofmann

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Direkte und inverse Probleme</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische Beschreibung</b>	<b>21</b>
2.1	Operatorformulierung inverser Aufgaben . . . . .	22
2.1.1	Wichtige Eigenschaften zugrundeliegender Räume . . . . .	23
2.1.2	Der Operator der direkten Aufgabe . . . . .	27
2.1.3	Operatorgleichungen und Extremalprobleme . . . . .	29
2.2	Das Phänomen der Inkorrektheit . . . . .	31
2.2.1	Die Hadamardsche Korrektheitsdefinition . . . . .	32
2.2.2	Die Korrektheit von Extremalproblemen . . . . .	39
2.2.3	Korrektheit und Inkorrektheit bei linearen Operatorgleichungen in Banachräumen . . . . .	41
2.2.4	Lokale Inkorrektheit bei nichtlinearen Operatorgleichungen	54
2.3	Was nützen Zusatzinformationen? . . . . .	61
2.3.1	Objektive und subjektive Apriori-Informationen . . . . .	61
2.3.2	Der Satz von Tichonov und die Korrektheit inverser Aufgaben auf kompakten Mengen . . . . .	65
2.3.3	Spezielle kompakte Mengen in Funktionenräumen . . . . .	70
	Aufgaben . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Identifikationsprobleme in Hilberträumen</b>	<b>79</b>
3.1	Lineare Operatorgleichungen in Hilberträumen . . . . .	79
3.1.1	Einige Grundbegriffe der Hilbertraumtheorie . . . . .	80
3.1.2	Einige Eigenschaften beschränkter linearer Operatoren in Hilberträumen . . . . .	82
3.1.3	Die Nashedsche Korrektheitsdefinition . . . . .	83
3.1.4	Die Moore-Penrose-Inverse, Stabilitätsbetrachtungen und Beispiele . . . . .	84
3.1.5	Singulärwertzerlegung vollstetiger Operatoren . . . . .	95
3.1.6	Der Grad der Inkorrektheit linearer Operatorgleichungen	103
3.2	Nichtlineare Operatorgleichungen . . . . .	115
3.2.1	Einige weitere Begriffe zu nichtlinearen Operatoren . . . . .	116
3.2.2	Hinreichende Bedingungen für lokale Inkorrektheit und lokale Korrektheit . . . . .	118
3.2.3	Der lokale Grad der Inkorrektheit . . . . .	122
	Aufgaben . . . . .	125

<b>4</b>	<b>Regularisierungsmethoden</b>	<b>126</b>
4.1	Regularisierung linearer Operatorgleichungen mit vollstetigen Operatoren . . . . .	128
4.1.1	Ein allgemeines Regularisierungsschema . . . . .	129
4.1.2	Die Methode der Tichonov-Regularisierung . . . . .	134
4.1.3	Alternative Regularisierungsmethoden . . . . .	148
4.1.4	Regularisierung durch endlichdimensionale Approximation	153
4.1.5	Probleme in $L^2(-\infty, \infty)$ . . . . .	156
4.1.6	Regularisierung bei der Interpretation periodischer Daten	163
4.2	Regularisierung schlechtkonditionierter linearer Gleichungssysteme . . . . .	171
4.3	Die Anwendung der Tichonov-Regularisierung auf nichtlineare Operatorgleichungen . . . . .	183
	Aufgaben . . . . .	190
	<b>Lösungen der Aufgaben</b> . . . . .	<b>191</b>
	<b>Literatur</b> . . . . .	<b>197</b>
	<b>Sachregister</b> . . . . .	<b>203</b>



# 1 Direkte und inverse Probleme

In der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wuchs mit der schnellen Entwicklung verschiedenster Zweige der modernen Mathematik, aber auch mit der explosionsartigen Entwicklung der Rechentechnik und mit der breiten Verfügbarkeit immer schneller werdender Computer das Interesse an der Simulation realer Prozesse in Natur und Technik auf der Grundlage mathematischer Modelle. Komplexe Prozesse, die sich in Raum und Zeit vollziehen, lassen sich heute in ihren fundamentalen Zusammenhängen mathematisch umfassend modellieren. Solche Modelle müssen dann aus der Sicht der Mathematik detailliert analysiert werden, um grundlegende Eigenschaften und Verhaltensweisen der den Modellen zugrundeliegenden Komponenten charakterisieren zu können. Dies erst bildet die Grundlage für ein mathematisch fundiertes numerisches Nachvollziehen bzw. Vorwegnehmen der Prozeßentwicklung auf leistungsfähigen Computern, eine Arbeitsrichtung, die heute unter dem Begriff Scientific Computing zusammengefaßt wird. So gelingt die Simulation von Luftströmungen in der Erdatmosphäre. Die Ausbreitung von eingeleiteten Schadstoffen in ein Gewässer oder die Aufheizung des Wärmeschutzschildes eines Weltraumshuttles bei der Landung können modelliert und bei Vorhandensein geeigneter Daten in ihrer örtlichen und zeitlichen Entwicklung berechnet werden. Solche mathematischen Modelle ermöglichen auch das zeitlich verkürzte Durchspielen länger dauernder Vorgänge und damit verbunden die Vorhersage von Werten physikalischer Größen wie Temperatur, Luftfeuchtigkeit oder Druck. Diese Größen spielen bei der heutigen Wettervorhersage eine wichtige Rolle. Darüber hinaus bietet ein solches mathematisches Modellexperiment oft die einzige Gelegenheit, quantitative Aussagen über technische Größen zu bekommen, die wegen großer Hitze oder einer aggressiven Umgebung mit üblichen Meßvorgängen nicht beschafft werden können. Hinzu tritt noch der positive wirtschaftliche Effekt des Nachvollziehens oder des Vorwegnehmens von Vorgängen mittels mathematischer Modelle im Vergleich zur traditionellen technisch-experimentellen Arbeitsweise. Auch wenn die Aufstellung und Analyse der Modelle Zeit und Geld kosten und der Computer als letztes Element in der langen Kette des Modellierungs- und Lösungsprozesses beträchtliche Ressourcen wie Rechenzeit und Speicherplatz benötigt, so sind diese Kosten doch meist gering im Verhältnis zu dem erforderlichen Aufwand einer realen mechanischen Nachgestaltung der Vorgänge, sofern ein solches Laborexperiment überhaupt realisierbar ist.

Obwohl die heute üblichen Farbbilder oder Farbfilme zur Präsentation von Ergebnissen der Computersimulation realer Prozesse und die damit zusammenhängende Hardware und Software meist das vordergründige Interesse des Betrachters genießen, sollte man das Geschehen im Hintergrund, nämlich das ma-

thematische Modell und seine seriöse Analyse, nicht vergessen. Diese ermöglichen erst das Aufstellen eines geeigneten Lösungsalgorithmus und gewährleisten nicht zuletzt die Richtigkeit des sichtbaren Simulationsergebnisses. Immer eingedenk der Tatsache, daß auf modernen Computern auch Simulationen mit unzureichenden Eingangsinformationen sowie dem Problem nicht angepaßten Algorithmen schön aussehende, aber leider in Wirklichkeit unbrauchbare Ergebnisbilder liefern können, widmet sich das Buch eben diesem Geschehen im Hintergrund. Von entscheidender Bedeutung ist dabei der Einsatz leistungsfähiger und in den Resultaten mit der Realität gut übereinstimmender mathematischer Modelle der nachzugestaltenden Prozesse. In solchen Modellen wird mit Hilfe von mathematischen Formeln, algebraischen Gleichungen, Gleichungssystemen, Integralgleichungen und Differentialgleichungen die Koppelung aller physikalischen Größen so beschrieben, daß die interessierenden Zustandsgrößen, seien sie nun statischer oder dynamischer Natur, näherungsweise berechnet werden können.

Leistungsfähige mathematische Modelle wurden insbesondere möglich durch eine zunehmende interdisziplinäre Zusammenarbeit zwischen Vertretern der Angewandten Mathematik, der Naturwissenschaften und der Ingenieurwissenschaften. Fortschritte gab es dabei speziell durch die wechselseitige Beeinflussung von Modell und Experiment. Von seiten der Mathematik flossen in den letzten Jahren moderne Entwicklungen der Analysis, Algebra, der numerischen Mathematik, mathematischen Optimierung und Stochastik in diese Modellierungsvorgänge ein. Darüber hinaus gab es Fortschritte durch Einbeziehung von Gebieten, die mathematische Denkweisen nutzen, wie z.B. der Systemtheorie oder des Konzepts der Fuzzy-Set-Methoden.

In jedem Falle bestehen mathematische Modelle aus Kopplungskomponenten, die man in einem sehr allgemeinen Sinne als Gleichungen auffassen kann. In diesen Gleichungen kommen neben den Größen, welche Zustände beschreiben und die den Charakter von reellen Zahlen, Vektoren oder Funktionen besitzen können, auch Parameter oder Parameterfunktionen vor, die das Verhalten von Materialien charakterisieren oder typische Verhaltensweisen der betrachteten Vorgänge ausdrücken. Solche Parameter sind wichtige Bestandteile des mathematischen Modells. Auf ihre Bedeutung werden wir noch zurückkommen. Vielfach beschreiben die Gleichungen allein den Prozeß nicht vollständig. Es müssen noch zusätzliche Bedingungen vorgegeben werden. Dies geschieht in der Regel mit Hilfe von Anfangsbedingungen bzw. von Randbedingungen. Anfangsbedingungen charakterisieren den Anfangszustand eines in der Zeit verlaufenden Prozesses, während Randbedingungen Informationen über wichtige physikalische Größen am Rand des für den Prozeß interessierenden Ortsgebiets sammeln. In solchen Bedingungen können ebenfalls wieder Parameter enthalten

sein, deren Kenntnis erst eine Anfangs- oder Randbedingung komplettiert.

Es sei vermerkt, daß in bestimmten Situationen die Notwendigkeit zur Einbeziehung zufälliger (stochastischer) Komponenten in das Modell besteht. Denken wir nur an zufällige Schwankungen von Meßwerten oder das zufällige Streuen von auf eine Fläche gerichteten Strahlen um einen gedachten Zielpunkt herum. Bei der Abschätzung des Einflusses stochastischer Fehler in solchen Modellen treten wiederum Parameter auf, deren Kenntnis die Problemlösung entscheidend beeinflusst. So kommt es bei Verwendung der Normalverteilung oder Gauß-Verteilung  $N(\mu, \sigma^2)$  mit ihrer wohlbekanntenen Glockenkurve als Dichtefunktion sowohl auf die Lage, als auch auf die Form der Kurve an. Diese Eigenschaften werden mit Hilfe des Lageparameters Mittelwert  $\mu$  und des Formparameters Streuung  $\sigma^2$  in eindeutiger Weise zum Ausdruck gebracht.

Wir wollen uns nun der Begriffswelt der **direkten** und **inversen Probleme** nähern, die in engem Zusammenhang mit der eingangs erwähnten Simulation realer Vorgänge mittels mathematischer Modelle steht. Diese Begriffswelt ist eigentlich keine mathematische, sondern eine physikalische oder technische. Es handelt sich bei direkten und inversen Problemen um Aufgabenstellungen und Probleme, die bei der Betrachtung eines modellierten und damit meist ein wenig vereinfacht und überschaubarer dargestellten realen Vorgangs oder Zusammenhangs als praktische Fragestellungen auftreten. Im allgemeinen läßt sich das jeweils betrachtete Modell in einen **Kausalzusammenhang** von **Ursache** und **Wirkung** einbetten. Will man beispielsweise ausgehend von einem aktuellen Zeitpunkt  $t = 0$  das zukünftige Verhalten eines physikalischen Systems vorher-sagen, so kann man die Gesamtheit der Werte der einbezogenen physikalischen Größen zum Zeitpunkt  $t = 0$  als Ursachen auffassen. Die daraus resultierenden Werte dieser Größen zum späteren Zeitpunkt  $t = T > 0$  haben dann den Charakter von Wirkungen. Wir bezeichnen als Ursache-Wirkungs-Abbildung die Zuordnung der Wirkungen zu den entsprechenden Ursachen. Diese Abbildung ist nur dann vollständig nachvollziehbar, wenn auch die Umstände, unter denen der betrachtete Kausalzusammenhang besteht, vollständig bekannt sind. Die Gesamtheit dieser Umstände bezeichnen wir als **Bedingungsgefüge**. Für die eben erwähnte Vorhersage physikalischer Wirkungsgrößen anhand ihrer Ursachen wird das Bedingungsgefüge entscheidend durch die relevanten physikalischen Gesetze bestimmt, die den Kausalzusammenhang beschreiben und die im mathematischen Modell vielfach durch gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen ausgedrückt werden. Aber auch geometrische Gegebenheiten und Randbedingungen können zum Bedingungsgefüge gehören.

Nun spielen, wie bereits erwähnt, Parameter in mathematischen Modellen eine große Rolle. Ob es sich um die Wärmeleitfähigkeit von Körpern, die Lichtdurchlässigkeit von optischen Materialien oder die Viskosität von Flüssigkeiten

handelt, in jedem Fall beeinflussen solche die Eigenschaften des Materials kennzeichnenden Parameter einen physikalischen Vorgang und den damit verbundenen Kausalzusammenhang entscheidend. Parameter sind dabei in der Regel als Komponenten des Bedingungsgefüges anzusehen. In einem solchen Fall treten sie zum Beispiel als Parameter in Gleichungen auf, wie die Wärmeleitfähigkeit in der Wärmeleitungsgleichung. Ebenso können sie aber in Randbedingungen eingehen. Dies ist bei der Wärmeübergangszahl der Fall, die als Proportionalitätsfaktor den Wärmefluß über den Rand eines Körpers hinweg zu beschreiben hilft. Parameter können aber auch als Komponenten in den Ursachen selbst verborgen sein, zum Beispiel als Parameter in den Anfangsbedingungen eines zeitabhängigen Modells.

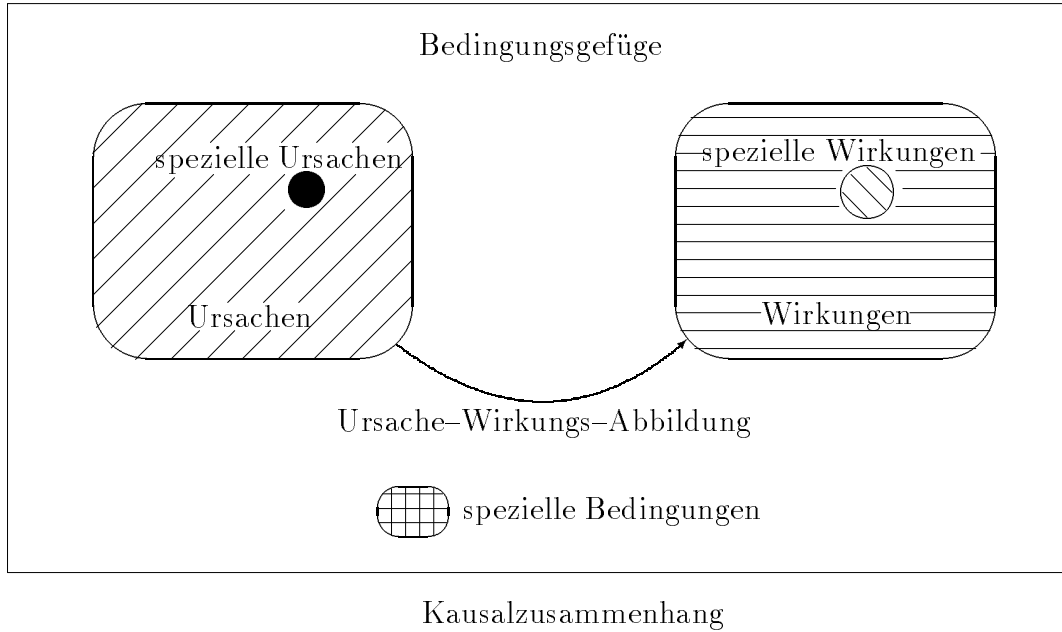
Das **direkte Problem** ist im Rahmen eines festen Kausalzusammenhangs eindeutig bestimmt. Es besteht darin, die Ursache-Wirkungs-Abbildung nachzuvollziehen. Bei vollständig gegebenem Bedingungsgefüge und vollständig gegebenen Ursachen werden die daraus resultierenden Wirkungen gesucht. Dabei ist klar, daß alle Parameter in Bedingungsgefüge und Ursachen als bekannt vorausgesetzt werden müssen. Neben der Tatsache, daß es unter den genannten Umständen genau ein direktes Problem gibt, sind direkte Probleme durch weitere gutartige Eigenschaften ausgezeichnet. Wenn es möglich ist, den Kausalzusammenhang richtig und vollständig zu beschreiben, so ergibt sich zu eindeutiger Ursache auch eine eindeutige Wirkung. Wenn man einmal von chaotischen Prozessen absieht, sind Wirkungen in der Regel stabil, d.h., kleine Änderungen in den Parametern der Ursachen oder des Bedingungsgefüges ziehen auch nur kleine Veränderungen in den Wirkungen nach sich. Diese für die mathematische Simulation von realen Prozessen hochwichtige Eigenschaft werden wir später unter dem Begriff der **Korrektheit** in den mathematischen Modellen weiter verfolgen.

Zielt nun eine Problemstellung darauf ab, die Ursache-Wirkungs-Abbildung in irgendeiner Weise umzukehren, so handelt es sich dabei um ein **inverses Problem**. Es gibt sehr viele verschiedene Möglichkeiten, solche Umkehrprobleme zu formulieren. Allen inversen Problemen gemeinsam ist die Suche nach geeigneten Parametern, wobei diese als spezielle Ursachen oder aber als spezielle Bedingungen im Rahmen des Bedingungsgefüges auftreten können. Die restlichen Ursachen und die restlichen Teile des Bedingungsgefüges werden dabei als bekannt angenommen. Diese Parametersuche setzt voraus, daß man über einige Informationen bezüglich der erzielten Wirkungen verfügt.

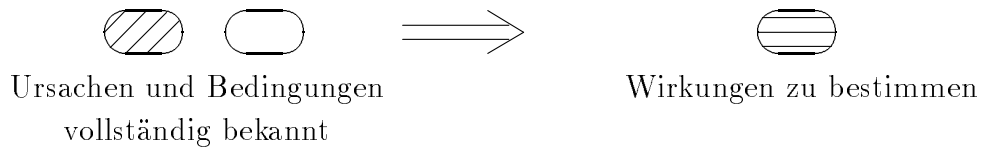
In der Praxis treten zwei typische Situationen auf: Die erste Situation ist in der Regel verbunden mit Problemen der **Interpretation indirekter Messungen** in Naturwissenschaft und Technik. Da die gesuchten Parameter selbst nicht direkt beobachtbar bzw. meßbar sind, werden spezielle Wirkungen derselben

beobachtet und mit den zu identifizierenden Parametern abgeglichen. Solche indirekten Messungen bilden die Datengrundlage dieser ersten Klasse inverser Probleme, die wir **Identifikationsprobleme** nennen wollen. Den Identifikationsproblemen liegen im Normalfall eindeutig bestimmte reale Parameter als gesuchte Lösungen zugrunde. Das für den Datenabgleich benutzte mathematische Modell des inversen Problems kann aber sehr wohl zu **mehrdeutigen Lösungen** führen. Im Rahmen des Modells ergeben dann eben verschiedene Ursachen die gleiche Wirkung. Aber nur eine der Ursachen entspricht der Realität. Dies ist ein erstes unangenehmes Phänomen bei der praktischen Lösung inverser Aufgaben. Ein zweites, mindestens genauso unangenehmes Phänomen von Identifikationsproblemen, die **Instabilität**, resultiert aus dem Fakt, daß die Ursache-Wirkungs-Abbildung in der Regel **glättend** wirkt, d.h., sehr unterschiedliche Werte eines Parameters lösen vielfach nahezu die gleiche Wirkung aus. Solche benachbarten Wirkungen sind aber kaum unterscheidbar, zumal ihre Beobachtung meist mit einem Meßfehler überlagert ist. Kleine Störungen in den Beobachtungsdaten ziehen dann beim Parameterabgleich gegebenenfalls große Störungen in den identifizierten Parametern nach sich. Diese unangenehmen Phänomene werden wir unter dem Sammelbegriff **Inkorrektheit** als charakteristische Eigenschaft inverser Probleme erfassen.

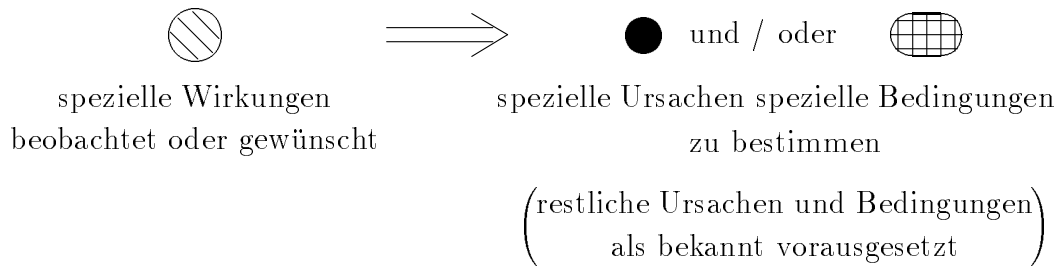
Es möge nicht unerwähnt bleiben, daß zu den Identifikationsproblemen auch die große Klasse von Diagnoseproblemen gehört. Das können zum einen medizinische **Diagnoseprobleme** sein, bei denen aus der Beobachtung quantifizierbarer Krankheitssymptome auf deren Ursachen, also den Charakter, Art und Umfang einer bestimmten Krankheit geschlossen werden soll. Ursache und Wirkung müssen dabei, damit mathematische Modelle zum Einsatz kommen können, durch biophysikalische Größen darstellbar sein. Eine wichtige Klasse von Identifikationsaufgaben der medizinischen Diagnostik besteht in der nichtinvasiven Beschaffung von Informationen über das Körperinnere durch äußere Messung von Strahlungsintensitäten oder Magnetfeldern, z.B. die Rekonstruktion von Dichteverteilungen im Kopf oder Bauchraum eines Menschen zur Feststellung von Tumoren. Die gesuchten Parameter sind dann vorzugsweise Funktionen zweier reeller Veränderlicher (Querschnittsbilder). Als Methoden zum Erhalt solcher Bilder kennt man u.a. die Röntgentomographie und die wesentlich schonendere Magnetresonanztomographie. Diese heute in Röntgenpraxen routinemäßig eingesetzten Diagnoseverfahren beruhen in jedem Falle auf einer stabilen und effektiven numerischen Lösung der damit verbundenen inversen Probleme. Zu Einzelheiten und offenen Fragen dieses Problemkreises sei auf den Artikel [ANG97] von G. Anger verwiesen. Diagnoseprobleme treten aber auch im technischen Anwendungsbereich auf, wie z.B. bei der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung durch Tomographieverfahren.



**Ein direktes Problem:**



**Viele inverse Probleme:**



**Bild 1.1** Direkte und inverse Probleme

Eine zweite Klasse inverser Probleme bilden die **Steueraufgaben**. Wir wollen darunter Aufgaben verstehen, bei denen auch Parameter gesucht werden, aber solche, die eine gewünschte Wirkung hervorbringen. Hierbei ist es kein Nachteil, wenn mehrere Parameterkonstellationen zu dieser gewünschten Wirkung führen. Entscheidend ist, daß man solche geeigneten bzw. optimalen Parameter finden kann. In technischen Prozessen werden die Parameter dann so eingestellt bzw. gesteuert, daß sie die gewünschte Wirkung erreichen. Zu dieser Aufgabenklasse gehören auch Optimal-Design-Probleme, z. B. die optimale Kombination von Konstruktionselementen zu einem Gerät mit gewünschter Funktion. Auch Steueraufgaben können inkorrekt sein. Dies ist unter anderem der Fall, wenn gar keine optimalen Parameter existieren oder wenn die Parameter, die zu benachbarten Wirkungen führen, sich stark unterscheiden.

In Bild 1.1 sind einige Zusammenhänge schematisch dargestellt. Im folgenden wollen wir die eingeführten Begriffe der direkten Aufgabe und der damit zusammenhängenden inversen Aufgaben an einem konkreten Beispiel deutlich machen.

**Beispiel 1.1** Wir betrachten einen technischen Ofen, in dessen Innenraum zum Zeitpunkt  $t = 0$  ein langer gerader Metallstab mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius  $R$  eingebracht wird. Unter der Voraussetzung, daß Gasbrenner im Ofen zu allen betrachteten Zeiten  $t$  eine einheitliche Lufttemperatur  $\psi(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) erzeugen können, werde der Stab im Zeitintervall  $t \in [0, T]$  aufgeheizt. Dies wird durch die Wahl einer monoton wachsenden Funktion  $\psi$  erreicht.

Technischer Ofen

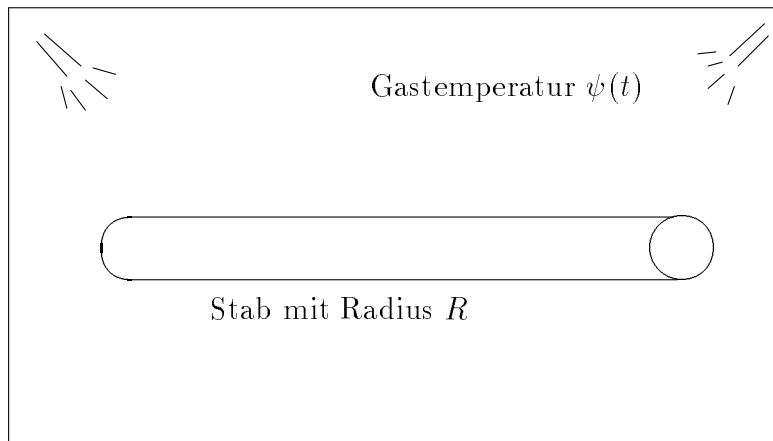


Bild 1.2

Das radialsymmetrische Profil des Stabes läßt die Annahme vernünftig erscheinen, daß die von Ort und Zeit abhängige Temperatur  $u(r, t)$  ( $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq t \leq T$ ) im Stab bezüglich des Ortes nur vom Abstand  $r$  der jeweiligen Stabpunkte von der Symmetrieachse bestimmt wird. Dabei bezeichnen  $r = 0$  einen Punkt auf der Symmetrieachse und  $r = R$  einen Punkt auf der Oberfläche des Stabes. Die Anfangstemperatur  $u_0(r)$  ( $0 \leq r \leq R$ ) des Stabes zum Zeitpunkt  $t = 0$  weise ebenfalls dieses rotationssymmetrische Verhalten auf. Unter diesen Umständen genügt die Temperaturfunktion  $u$  der in Polarkoordinaten geschriebenen Wärmeleitungsgleichung

$$\rho c(u) \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(u) \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right) \quad (0 < r < R, 0 < t \leq T). \quad (1.1)$$

Dies ist eine **quasilineare parabolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung**, welche die Parameter bzw. Parameterfunktionen  $\rho$  (Dichte des Stabes),  $c(u)$  (spezifische Wärme als Funktion der Temperatur) und  $\lambda(u)$  (Wärmeleitfähigkeit als Funktion der Temperatur) enthält. Die Situation zur Zeit  $t = 0$  läßt sich durch die **Anfangsbedingung**

$$u(r, 0) = u_0(r) \quad (0 \leq r \leq R) \quad (1.2)$$

beschreiben. Hier tritt die Anfangsfunktion  $u_0$  als Parameterfunktion auf. Wegen der radialsymmetrischen Struktur des Problems ergeben sich zwei **Randbedingungen**. Die erste Randbedingung

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial r} = 0 \quad (0 < t \leq T) \quad (1.3)$$

bringt die Tatsache zum Ausdruck, daß aus Symmetriegründen kein Wärmefluß über die Symmetrieachse des Stabes hinweg auftritt, während in der zweiten Randbedingung

$$-\lambda(u) \frac{\partial u(R, t)}{\partial r} = \mu(u) (u(R, t) - \psi(t)) \quad (0 < t \leq T) \quad (1.4)$$

der Wärmefluß über den äußeren Rand des Stabes als proportional zur Differenz zwischen Oberflächentemperatur  $u(R, t)$  des Stabes und Lufttemperatur  $\psi(t)$  um den Stab herum erklärt wird. Als Proportionalitätsfaktor tritt  $\mu(u)$  (Wärmeübergangszahl als Funktion der Temperatur) auf. Neben  $\mu(u)$  enthält diese Randbedingung auch die in der Differentialgleichung auftretende Funktion  $\lambda(u)$  als Parameterfunktion. Vorausgesetzt, daß die Werte aller Parameter und Parameterfunktionen bekannt sind, besteht in unserem Beispiel die **direkte Aufgabe** in der **Bestimmung des Temperaturfeldes**

$$u(r, t) \quad (0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq T) \quad (1.5)$$



im Stab als Funktion von Ort  $r$  und Zeit  $t$ . Zu diesem Zweck ist das Anfangs-Randwertproblem (1.1) – (1.4) zur Wärmeleitungsgleichung zu lösen. Während Differentialgleichung, Anfangs- und Randbedingungen Ursache und Bedingungen umfassen, beschreibt das komplette Temperaturfeld (1.5) die sich ergebenden Wirkungen. Als spezielle Wirkungen kann man dabei zum Beispiel die Temperaturen

$$u(r_i, t) \quad (i = 1, 2, \dots, k, 0 \leq t \leq T) \quad (1.6)$$

zu allen Zeiten  $0 \leq t \leq T$  an  $k$  Punkten des Stabes mit Abständen  $0 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq R$  von der Symmetrieachse betrachten. Die Daten (1.6) lassen sich mit Hilfe von  $k$  durch Bohrungen im Stab an entsprechenden Stellen angebrachten Temperatursonden gewinnen. Ein praktisch interessantes **inverses Problem** auf der Grundlage der indirekten Messungen von (1.6) stellt dann die **Bestimmung der Wärmeübergangsfunktion**

$$\mu(u) \quad (u_{min} \leq u \leq u_{max})$$

dar, wenn  $\rho, \lambda(u), \psi(t)$  und  $u_0(r)$  als bekannt angenommen werden können. Das Temperaturintervall  $[u_{min}, u_{max}]$  muß natürlich so gewählt werden, daß die gemessenen Temperaturen diesen Bereich in jedem Falle umfassen. Ein anderes inverses Problem ist die **Bestimmung des Anfangstemperaturprofils**  $u_0(r)$  mit Hilfe von Temperaturdaten

$$u(r, T) \quad (0 \leq r \leq R) \quad (1.7)$$

zur Endzeit  $T$ , wenn alle weiteren Parameter verfügbar sind. Eine solche manchmal als History-Match-Problem bezeichnete Aufgabe entspricht praktisch der Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit umgekehrter Zeit. Beide erwähnten inversen Probleme sind Identifikationsprobleme. Für die Beispielsituation sind aber ebenso Steueraufgaben formulierbar. Dazu gehört die **Bestimmung einer optimalen Gastemperatursteuerung**

$$\psi(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

im Zeitintervall  $[0, T]$ , so daß zur Endzeit  $T$  das resultierende radiale Temperaturprofil (1.7) möglichst gut mit einem gewünschten Temperaturprofil  $u_T(r)$  übereinstimmt. Dabei müssen die restlichen Parameter und Parameterfunktionen natürlich auch wieder mit einer akzeptablen Genauigkeit bekannt sein.  $\square$

Im Prinzip ist die Suche nach jedem Parameter, jeder Parameterfunktion und jeder Kombination von Parametern als Identifikationsproblem formulierbar. Um eine reale Chance der Rekonstruktion der gesuchten Größen zu erhalten, sollte

aber beachtet werden, daß ein genügend großer Bereich von Wirkungen einbezogen wird, so daß die Beobachtungsdaten tatsächlich ausreichend Informationen über die zu bestimmenden Parameter enthalten. Ohne die Feinstruktur des Problems analysieren zu müssen, kann man diese Voraussetzung grob durch Vergleich der Qualität von gesuchten Parametern und Daten überprüfen. Strebt man für das inverse Problem die eindeutige Lösbarkeit an, so dürfen nicht mehr Parameter gesucht werden, als Daten vorhanden sind. Diese Erkenntnis ist z.B. bei der Lösung von Gleichungssystemen jedem stets gegenwärtig, denn von unterbestimmten Gleichungssystemen kann man keine wohlbestimmten Lösungen erwarten. Da aber in der Regel von fehlerbehafteten Daten ausgegangen werden muß, sollte der Datenumfang sogar größer sein als der Umfang der gesuchten Parameter. Solche überbestimmten Systeme bieten die Möglichkeit, den Einfluß von Datenfehlern auf die Lösung zurückzudrängen. In der Stochastik wird diese Vorgehensweise mit dem Prinzip der Regression beschrieben. Will man im Rahmen einer inversen Aufgabe nicht endlich viele Parameter, sondern unendlich viele Werte in Gestalt einer Parameterfunktion von  $k$  reellen Veränderlichen identifizieren, so scheint es ein erlaubter Analogieschluß der eben gemachten Überlegungen zu sein, daß dann auch die Daten in Gestalt einer Funktion von wenigstens  $k$  reellen Veränderlichen vorliegen müssen.

Um mit Hilfe eines Computers gesuchte Parameter oder Parameterfunktionen im Rahmen eines inversen Problems an beobachtete oder gewünschte Wirkungen anpassen zu können, muß man die direkte Aufgabe auf dem Computer für alle in Frage kommenden Parameterkonstellationen mit hinreichender Genauigkeit lösen können. So müssen etwa in Beispiel 1.1 für alle denkbaren Materialparameter die auftretenden Anfangs-Randwertprobleme für die Wärmeleitungsgleichung (1.1) auf dem Computer näherungsweise lösbar zu sein, um die Temperaturwerte  $u$  zu erhalten, die mit den Daten abgeglichen werden sollen. Dies erfordert im konkreten Beispiel Kenntnisse über die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen (s. [GRRO92]) bis hin zur Nutzung geeigneter Algorithmen und Software für solche Probleme. Welchen Lösungszugang man auch immer für ein inverses Problem wählt, stets ist die mehrfache Lösung der entsprechenden direkten Aufgaben damit verbunden. In der Praxis müssen oft einige Tausend direkte Aufgaben mit unterschiedlichen Parametern gelöst werden, um eine befriedigende Näherungslösung für ein inverses Problem zu erhalten.

Während sich die Mathematik lange vorwiegend mit der Formulierung und Behandlung direkter Probleme beschäftigte, entwickelte sich in den letzten Jahrzehnten die Untersuchung inverser Probleme aus Naturwissenschaften und Technik zu einem wichtigen Teilgebiet der Angewandten Mathematik. Dies hatte seine Ursachen natürlich auch im Wunsch nach immer genauerer Lösung direkter

Aufgaben, welche aber nur zu erreichen ist, wenn die auftretenden Parameter hinreichend genau bekannt sind. In der Folge ergaben sich immer mehr Forderungen nach der Bestimmung der fehlenden Parameter im Rahmen der Lösung inverser Probleme. Die allerdings meist englischsprachige Literatur zu konkreten inversen Problemen aus den unterschiedlichsten Anwendungsgebieten ist allein im letzten Jahrzehnt kaum noch zu überschauen. Eine schöne und leicht verständliche Beispielsammlung solcher angewandter inverser Probleme findet der interessierte Leser im Buch von C. W. Groetsch (s. [GRO93]). Wir werden in den folgenden Kapiteln vielfach konkrete Beispiele zur Illustration der Mathematik inverser Probleme in den Text einflechten.

Inverse Problemstellungen traten auch schon vereinzelt im 19. Jahrhundert bei der Formulierung verschiedenartiger Fragestellungen der Mechanik und Potentialtheorie auf, so bei N. H. Abel 1823 und G. G. Stokes 1867. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts war die Geophysik Auslöser zahlreicher inverser Fragestellungen. Inverse Probleme der Seismik (H. Benndorf 1905), der Gravimetrie (C. Neumann 1906) und der Geoelektrik bzw. Magneto-Tellurik (R. E. Langer 1933) fanden allgemeines Interesse. Seit den Untersuchungen von H. A. Lorentz 1906 und J. Radon 1917 war das inverse Problem der Bestimmung von Funktionen aus der Kenntnis ihrer Integralwerte auf Linien Gegenstand mathematischer Untersuchungen, welches uns unter dem Begriff Tomographie begegnet. Die heute als bildgebendes Verfahren aus der medizinischen Diagnostik nicht mehr wegzudenkende Computertomographie (zum mathematischen Hintergrund s. F. Natterer [NAT85] und [NAT86]) entwickelte sich aber erst nach Arbeiten von A. M. Cormack 1963 und ausgehend von den nunmehr zur Verfügung stehenden rechen-technischen Möglichkeiten. Ebenso gehörten inverse Spektralprobleme und inverse Streuprobleme zu Aufgabenklassen, die Anfang des 20. Jahrhundert speziell aus physikalischer Sicht Interesse fanden. Die genannten Namen stehen nur exemplarisch für die Wissenschaftler, die sich als Pioniere der inversen Theorie verdient gemacht haben (s. ausführlicher bei L. v. Wolfersdorf [WOL94]). In der 2. Hälfte des 20. Jahrhunderts entwickelten sich Theorie und Praxis inverser Probleme sehr rasch. Neue Anwendungsbereiche kamen hinzu, von denen hier als Beispiel nur die inversen Wärmeleit- und Diffusionsprobleme genannt werden sollen. Insbesondere wurden aber unter dem Begriff der **Regularisierung** analytische und numerische Zugänge zur stabilen Lösung inverser Probleme systematisch entwickelt und erprobt. Eine umfassende Übersicht über diese Entwicklungen, die mit Arbeiten von A. N. Tikhonov 1963 ihren Anfang nahmen, bis hinein in die 90er Jahre gibt H. W. Engl in [ENG93]. Bezüglich einer kurzen Einführung in die Numerik des inversen Problems sei andererseits auf die Übersichtsarbeit [LOU90] von A. K. Louis verwiesen.

Während die Behandlung von **linearen inversen Aufgaben**, bei denen zwischen den zu bestimmenden Größen und ihren Wirkungen ein linearer Zusammenhang besteht, heute im wesentlichen auf der Grundlage einer abgeschlossenen Theorie erfolgen kann, sind Untersuchungen zu **nichtlinearen inversen Problemen** ein aktueller Gegenstand der Forschung auf dem Gebiet der Angewandten Mathematik. Grundlegende Ergebnisse der Mathematik linearer und nichtlinearer inverser Aufgaben sollen in diesem Buch ihren Niederschlag finden. Für den Leser, der sich darüber hinaus noch tiefer in die Mathematik inverser Probleme und ihre Anwendungen einarbeiten und dabei vielleicht auch die Beweise weiterer wichtiger Sätze kennenlernen möchte, können die Lehrbücher und Monographien [BAU87], [ENG97], [EHN96], [HAN98], [HOF86], [KIR96], [KRE89] und [LOU89] eine Hilfe sein. Weitere ausgewählte Bücher, Sammelbände und Artikel findet man im Literaturverzeichnis. Bei der Auswahl von Titeln für ein weiterführendes Studium leistet auch die kommentierte Referenzliste am Schluß von [GRO93] gute Dienste.

## 2 Mathematische Beschreibung von Identifikationsproblemen und Steueraufgaben

Im vorausgegangenen Kapitel haben wir den Unterschied zwischen direkten und inversen Problemen kennengelernt und uns einen ersten Eindruck von der Vielfalt möglicher inverser Aufgaben bei einem mathematischen Modell aus den Naturwissenschaften oder der Technik verschafft. Es wurde erwähnt, daß es dabei sinnvoll ist, zwei klar getrennte Zielstellungen inverser Art zu unterscheiden. Auf der einen Seite stehen die **Identifikationsprobleme**. Bei diesen ist eine fest umrissene und damit in eindeutiger Weise existierende physikalische Größe  $x$  nicht direkt beobachtbar oder meßbar, sondern muß aus Wirkungen der gesuchten Größe auf andere tatsächlich beobachtbare physikalische Größen  $y$  rekonstruiert werden. Das Ziel einer solchen inversen Aufgabe besteht in der Identifikation von  $x$  durch mathematische Interpretation indirekter Messungen. Dabei kann  $x$  beispielsweise ein einzelner Materialparameter, aber auch eine Zusammenfassung von endlich vielen solchen Parametern zu einem Parametervektor sein. Häufig wird die gesuchte Größe  $x$  eine reelle Funktion einer oder mehrerer reeller Veränderlicher darstellen. In diesem Falle muß man eigentlich sogar überabzählbar unendlich viele Werte identifizieren, etwa eine Funktion auf einem Intervall. Wie wir später sehen werden, bleibt uns aber im numerischen Prozeß der näherungsweise Lösung nichts anderes übrig, als die Anzahl der Unbekannten wieder auf eine endliche Zahl zu reduzieren. Nur auf diese Weise können wir moderne numerische Algorithmen auf leistungsfähigen Computern zur Lösung derartiger Aufgaben einsetzen.

Die zweite Klasse inverser Aufgaben ist so beschaffen, daß physikalische Größen  $x$  gesucht werden, die gewisse gewünschte Wirkungen  $y$  in optimaler Weise hervorbringen. Solche Aufgaben nennen wir hier **Steueraufgaben**. Die Auswahl der Größe  $x$  soll nämlich so gesteuert oder eingestellt werden, daß die damit erzielte Wirkung bestmöglich zur vorgegebenen bzw. erwarteten Wirkung  $y$  paßt. Zu dieser Klasse zählen praktische Aufgabenstellungen, die mit Mitteln der mathematischen Optimierung behandelt werden können. Eine wichtige Rolle spielen auch die Probleme der optimalen Steuerung. Optimierung und optimale Steuerung bilden heute eigenständige Teilgebiete der Angewandten Mathematik, die in diesem Buch jedoch nur kurz gestreift werden.

Wie wir an den zahlreichen Beispielen sehen können, die in allen Kapiteln des Buches zur Illustration der abstrakten Theorie eingestreut sind, erfolgt die mathematische Beschreibung der verschiedenartigen Identifikationsprobleme in Abhängigkeit von der Natur der zugehörigen spezifischen direkten Aufgaben in sehr unterschiedlicher Weise. So finden lineare und nichtlineare Gleichungen und Gleichungssysteme, Integralgleichungen sowie gewöhnliche und parti-

elle Differentialgleichungen gleichermaßen Anwendung. Ebenso vielfältig sind die Möglichkeiten der Beschreibung von Steueraufgaben.

Unser Ziel soll es in diesem Kapitel sein, eine **einheitliche mathematische Beschreibung** von Identifikationsproblemen einzuführen, die für alle derartigen Aufgaben Gültigkeit hat. Ebenso wird eine einheitliche mathematische Beschreibung der Steueraufgaben erwähnt. Wir nutzen dazu, soweit dies erforderlich ist, elementare Begriffe und Zusammenhänge der **Funktionalanalysis**, die der Leser entweder unmittelbar im Text erklärt findet oder aber in den übersichtlich gestalteten Nachschlagewerken [GORI94] bzw. [TTB95, Kap. 11] des Teubner-Verlages zur Funktionalanalysis nachlesen kann. Unsere Probleme formulieren wir mit Hilfe von Operatoren, also von Abbildungen, welche in Vektor- oder Funktionenräumen wirken. Im Kapitel 2 sind die dazu betrachteten Räume allgemein Banachräume, in denen zu jedem Element des Raumes eine Norm existiert, mit Hilfe derer man auch Abstände zwischen verschiedenen Elementen messen kann. Dagegen konzentrieren wir uns im Kapitel 3 auf Hilberträume als spezielle Banachräume, die mit einem Skalarprodukt ausgestattet sind. Dies erlaubt eine Verallgemeinerung des aus der analytischen Geometrie bekannten Begriffes der Orthogonalität auch auf Funktionenräume und macht so weitergehende Untersuchungen möglich. Die im folgenden dargestellte mathematische Beschreibung der Identifikationsprobleme in Form von **Operatorgleichungen** bzw. der Steueraufgaben mit Hilfe von **Extremalproblemen** erscheint auf den ersten Blick ein wenig kompliziert. Wenn man sich jedoch die Mühe macht, die wenigen verwendeten Bausteine der Funktionalanalysis etwas näher kennenzulernen, so staunt man über die kurze und prägnante Art, Probleme zu beschreiben, die sich daraus ergibt. Der entscheidende Vorteil besteht aber wohl darin, daß wir in den meisten Fällen aufgrund der einheitlichen Beschreibung der Probleme auch **einheitliche Lösungszugänge** formulieren können. Nicht jedes inverse Problem benötigt also einen speziellen Lösungsansatz. Wir werden uns auf dieser Grundlage im Kapitel 4 ausführlich mit der Beschreibung der stabilen näherungsweise Lösung von Identifikationsproblemen befassen. Viele Ansätze sind dabei auch auf Steueraufgaben übertragbar. Wir wollen diese zweite Klasse inverser Aufgaben jedoch im einzelnen nicht weiter verfolgen und verweisen den Leser auf die einschlägige Literatur zu diesem eigenständigen Gebiet (s. z.B. [IOTI79], [VAS81], [KATI94] und [LEX86]).

## 2.1 Operatorformulierung inverser Aufgaben

In diesem Abschnitt werden wir zur mathematischen Beschreibung der inversen Probleme Operatorgleichungen bzw. von diesen abgeleitete Extremalprobleme benutzen. Nun sieht man es einer solchen Operatorgleichung erst einmal nicht

immer an, ob sie eine direkte oder eine inverse Aufgabe beschreibt. Das heißt, auch direkte Aufgaben lassen sich als Operatorgleichungen schreiben. Der entscheidende Unterschied besteht in den Lösungseigenschaften solcher Gleichungen. Während Operatorgleichungen für direkte Aufgaben in der Regel korrekt sind, erweisen sich, wie schon in Kapitel 1 angedeutet, die hier ausschließlich betrachteten Operatorgleichungen für die inversen Aufgaben als inkorrekt. Bei den inkorrekten Operatorgleichungen gibt es Schwierigkeiten mit der Lösbarkeit, mit der Eindeutigkeit von Lösungen und vor allem mit der Stabilität der Lösungen in bezug auf Störungen in den Eingangsdaten. Der Abschnitt 2.2 wird sich ganz ausführlich mit dem Phänomen der Inkorrektheit befassen.

### 2.1.1 Wichtige Eigenschaften zugrundeliegender Räume

Die Grundlage unserer weiteren Betrachtungen bilden **reelle normierte Räume**  $Z$ . Das sind spezielle **lineare Räume** (s. [TTB95, S.361]) über dem Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , bei denen jedem Element  $z$  des Raumes  $Z$  eine nichtnegative Zahl  $\|z\|_Z$  als Norm des Elements zugeordnet wird. Dabei gelten die Normaxiome

$$\begin{aligned} \|z\|_Z = 0 &\Leftrightarrow z = \mathbf{0}, \\ \|\lambda z\|_Z &= |\lambda| \|z\|_Z \end{aligned}$$

sowie als drittes Normaxiom die **Dreiecksungleichung**

$$\|z_1 + z_2\|_Z \leq \|z_1\|_Z + \|z_2\|_Z$$

für alle  $z, z_1, z_2 \in Z$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Um eine inverse Aufgabe mit Hilfe von Operatoren formulieren zu können, wählt man zuerst zwei geeignete normierte Räume  $X$  und  $Y$  mit zugehörigen Normen  $\|\cdot\|_X$  und  $\|\cdot\|_Y$ . Die Elemente dieser Räume werden in der Regel durch reellwertige Vektoren oder durch reelle Funktionen einer oder mehrerer reeller Veränderlicher gebildet. Aus dem normierten Raum  $X$  kommen die gesuchten Lösungen  $x$  der Aufgabe, während mögliche Eingangsdaten  $y$  sich als Elemente von  $Y$  betrachten lassen. Eingangsdaten sind dabei sowohl die beobachtbaren Größen bei den indirekten Meßproblemen bzw. Identifikationsproblemen als auch die Größen gewünschter Wirkungen bei den Steueraufgaben.

Ein wichtiger Begriff in normierten Räumen ist der Begriff der **starken Konvergenz** oder **Normkonvergenz** einer unendlichen Folge  $\{x_n\} \subset X$  von Elementen aus  $X$  gegen ein Grenzelement  $x_0 \in X$ . Darunter versteht man die Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$ , die bedeutet, daß es für eine beliebig kleine Zahl  $\varepsilon > 0$  einen Index  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  gibt mit

$$\|x_n - x_0\|_X < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Als Schreibweisen werden auch  $x_n \rightarrow x_0$  in  $X$  bzw.  $x_n \xrightarrow{X} x_0$  für  $n \rightarrow \infty$  oder  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  verwendet. Wenn wir der Einfachheit halber im weiteren nur von konvergenten Folgen in normierten Räumen sprechen, werden wir stets die starke Konvergenz meinen. Zur Schreibweise von Elementefolgen sei allgemein noch bemerkt, daß wir unter dem Symbol  $\{x_n\}$  stets eine unendliche Folge  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  verstehen wollen, deren Index  $n$  alle positiven natürlichen Zahlen durchläuft. Jede konvergente Folge  $\{x_n\}$  in einem normierten Raum  $X$  ist auch eine **Cauchyfolge**. Das heißt, für eine beliebig kleine Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt es einen Index  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ , so daß gilt

$$\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon, \quad \text{sobald } n, m \geq n_0. \quad (2.1)$$

Ist andererseits in  $X$  jede Cauchyfolge eine konvergente Folge, so ist der normierte Raum  $X$  **vollständig**, und wir nennen ihn **Banachraum** (s. [GORI94, S.39]).

Die beiden normierten Räume  $X$  und  $Y$  sollen in unseren Betrachtungen immer Banachräume sein. Dabei ist auch die Tatsache wichtig, daß Banachräume spezielle **metrische Räume** (s. [GORI94, S.7]) sind. Man kann nämlich im Banachraum  $X$  mittels der Beziehung  $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_X$  mit  $x_1, x_2 \in X$  einen Abstand  $d(\cdot, \cdot)$  zwischen zwei Elementen des Raumes festlegen und so eine Metrik einführen. Wenn es das Problem zuläßt, wählt man für  $X$  und  $Y$  **Hilberträume** (s. [GORI94, S.9 und 57]). Das sind Banachräume  $X$  bzw.  $Y$ , die zusätzlich mit einem **Skalarprodukt**  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  bzw.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$  ausgestattet sind. In solchen Hilberträumen  $X$ , welche für  $x \in X$  Norm und Skalarprodukt über die Beziehung  $\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle_X}$  verbinden, lassen sich zahlreiche mathematische Sachverhalte einfacher formulieren und bequemer behandeln als in allgemeinen normierten Räumen (s. Kapitel 3).

Die Elemente  $z_1, z_2, \dots, z_k$  eines linearen Raumes  $Z$  heißen linear unabhängig, wenn aus

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_k z_k = \mathbf{0} \quad (\mathbf{0} - \text{Nullelement von } Z; \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R})$$

stets  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$  folgt. Die **Dimension**  $\dim(Z)$  eines linearen Raumes  $Z$  ist dann die Maximalanzahl von linear unabhängigen Elementen in  $Z$ . Falls diese Zahl endlich ist, so heißt der Raum  $Z$  **endlichdimensional**. Existieren  $k$  in  $Z$  linear unabhängige Elemente  $z_1, \dots, z_k$  für jede natürliche Zahl  $k$ , so ist  $\dim(Z) = \infty$ , und der Raum  $Z$  wird **unendlichdimensional** genannt.

Besteht die inverse Aufgabe von vornherein darin, einen Vektor  $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)^T$  aus  $\mathbb{R}^n$  mit  $n$  reellen Komponenten  $\underline{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) auf der Grundlage von Eingangsdaten in Form eines Vektors  $\underline{y} = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_m)^T \in \mathbb{R}^m$  mit  $m$  reellen Komponenten  $\underline{y}_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) zu bestimmen, so werden die Räume  $X = \mathbb{R}^n$



bzw.  $Y = \mathbb{R}^m$  der  $n$ - bzw.  $m$ -elementigen reellwertigen Spaltenvektoren mit geeigneten Vektornormen (s. Formel (2.36) in Abschn. 2.2.3) als Banachräume gewählt. Das Symbol  $(\cdot)^T$  bezeichnet im weiteren stets transponierte Vektoren und Matrizen. Unter  $\mathbb{R}^{m \times n}$  wollen wir den Raum der Matrizen  $\underline{A} = (\underline{a}_{ji})$  mit  $m$  Zeilen,  $n$  Spalten und den Einträgen  $\underline{a}_{ji}$  ( $j = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$ ) verstehen. Wir werden in diesem Buch Vektoren und Matrizen sowie deren Komponenten bzw. Einträge stets durch Unterstreichung ihrer Symbole charakterisieren. Die Zahlen  $n$ ,  $m$  und  $m \times n$  geben auch die Dimensionen der endlichdimensionalen Räume  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^m$  und  $\mathbb{R}^{m \times n}$  an. Unendlichdimensionale Räume  $X$  und  $Y$  treten in der Regel auf, wenn inverse Probleme in der Bestimmung von Funktionen  $x$  bestehen, wobei dann sinnvollerweise auch die Eingangsdaten  $y$  Funktionen sein sollten. Wir werden eines der Symbole  $x$  oder  $x(\cdot)$  benutzen, wenn wir die Funktion als Element eines Funktionenraumes beschreiben wollen. Hingegen bezeichne das Symbol  $x(t)$  den Wert der Funktion  $x$  zum Argument  $t$ .

Für eine inverse Aufgabe mit realem Hintergrund muß die Wahl der Räume  $X$  und  $Y$  so erfolgen, daß die entsprechenden Normen auf sinnvolle Abstandsbegriffe bezüglich der Lösung und bezüglich der Eingangsdaten führen. Wollen wir etwa eine auf dem endlichen abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  definierte reelle stetige Funktion  $x(t)$  ausgehend von Meßdaten einer auf dem gleichen Intervall definierten reellen Funktion  $y(s)$  bestimmen, so macht es häufig Sinn, das Raumpaar  $X := C[a, b]$  der auf  $[a, b]$  stetigen Funktionen und  $Y := L^2(a, b)$  der auf demselben Intervall quadratisch integrierbaren Funktionen zur Modellierung zu verwenden. Beide linearen Räume  $X$  und  $Y$  sind unendlichdimensional. Sie werden zu Banachräumen durch Einführung entsprechender Normen. Um die Genauigkeit von Lösungen zu charakterisieren, mißt man den Abstand zweier Elemente  $x$  und  $\hat{x}$  aus dem Raum  $C[a, b]$  mit der Maximumnorm

$$\|x - \hat{x}\|_{C[a,b]} := \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - \hat{x}(t)|, \quad (2.2)$$

während für die Eingangsdaten der auf einer quadratischen Mittelbildung beruhende  $L^2$ -Abstand zweier Elemente  $y$  und  $\hat{y}$

$$\|y - \hat{y}\|_{L^2(a,b)} := \sqrt{\int_a^b (y(s) - \hat{y}(s))^2 ds} \quad (2.3)$$

zugrundegelegt wird.

Wenn wir in einem linearen Raum  $Z$  zwei Normen  $\|\cdot\|_Z$  und  $\|\cdot\|_{\tilde{Z}}$  betrachten, so heißen die Normen **äquivalent**, wenn es Konstanten  $0 < \underline{K} \leq \overline{K} < \infty$  gibt mit

$$\underline{K} \|z\|_Z \leq \|z\|_{\tilde{Z}} \leq \overline{K} \|z\|_Z \quad \text{für alle } z \in Z. \quad (2.4)$$

Die Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z_0\|_Z = 0$  einer Folge  $\{z_n\} \subset Z$  in der Norm  $\|\cdot\|_Z$  zieht dann die Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z_0\|_{\tilde{Z}} = 0$  in der Norm  $\|\cdot\|_{\tilde{Z}}$  nach sich und umgekehrt. Man kann sagen, daß dann keine der beiden Normen stärker ist als die andere. Alle Vektornormen  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$  im  $n$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^n$  sind äquivalent. Im unendlichdimensionalen Raum  $Z$  kann es jedoch sein, daß zwar

$$\|z\|_{\tilde{Z}} \leq \overline{K} \|z\|_Z \quad \text{für alle } z \in Z, \quad (2.5)$$

jedoch keine Beziehung der Gestalt (2.4) gilt. Dann ist die Norm  $\|\cdot\|_Z$  **stärker** als die Norm  $\|\cdot\|_{\tilde{Z}}$ .

Vergleicht man unter diesem Aspekt für den linearen Raum der auf  $[a, b]$  definierten stetigen reellen Funktionen die Normen

$$\|z\|_Z := \|z\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq t \leq b} |z(t)| \quad (2.6)$$

und

$$\|z\|_{\tilde{Z}} := \|z\|_{L^2(a,b)} = \sqrt{\int_a^b z^2(t) dt}, \quad (2.7)$$

so findet man eine Ungleichung (2.5) mit der Konstanten  $\overline{K} = \sqrt{b-a}$ , wohingegen eine Konstante  $\underline{K} > 0$  im Sinne von Ungleichung (2.4) nicht existiert. Geht also eine Fehlergröße in der Norm  $\|\cdot\|_{C[a,b]}$  gegen Null, so strebt sie ebenfalls in der Norm  $\|\cdot\|_{L^2(a,b)}$  gegen Null. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht. Es sei vermerkt, daß der lineare Raum  $C[a, b]$  der stetigen Funktionen mit der Norm (2.6) einen Banachraum bildet. Währenddessen bilden die stetigen Funktionen mit der schwächeren Norm (2.7) nur einen (nicht vollständigen) normierten Raum, dessen Vervollständigung auf den schon erwähnten Banachraum  $L^2(a, b)$  der quadratisch integrierbaren Funktionen über  $[a, b]$  führt. Am Rande soll hier erwähnt werden, daß unter der Integrierbarkeit dabei die Existenz endlicher Lebesgue-Integrale (s. [FLO81, §8]) verstanden wird. In diesem Sinne identifiziert man zwei reelle Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  über dem Intervall  $[a, b]$  als zum gleichen Element des Raumes  $L^2(a, b)$  gehörig, wenn sich ihre Funktionswerte nur auf einer Menge von Argumentwerten  $t$  vom Lebesguemaß Null unterscheiden. Man kann also beispielsweise die Funktionswerte einer Funktion aus  $L^2(a, b)$  in endlich oder abzählbar vielen Punkten des Intervalls  $[a, b]$  abändern, ohne daß sich deswegen ein anderes Element des Raumes  $L^2(a, b)$  ergibt.

Man sieht leicht ein, daß die Maximumnorm bei der Bewertung von Abständen stärker ist als die im Mittel ausgleichende  $L^2$ -Norm. Um mit einer vorgegebenen kleinen reellen Zahl  $\varepsilon > 0$  als Maß für den erlaubten Fehler die Forderung

$\|x - \hat{x}\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon$  zu erfüllen, dürfen für alle  $t \in [a, b]$  die Abweichungen  $|x(t) - \hat{x}(t)|$  nicht größer als  $\varepsilon$  sein. Diese  $C[a, b]$ -Norm orientiert also auf einen kleinen Fehler gleichmäßig für alle  $t$ . Andererseits genügt es bei Vorgabe einer kleinen Zahl  $\varepsilon > 0$  für die Erfüllung der Ungleichung  $\|x - \hat{x}\|_{L^2(a,b)} \leq \varepsilon$ , daß im Intervall  $[a, b]$  die Fläche zwischen der  $t$ -Achse und dem Graphen der Funktion  $f(t) := (x(t) - \hat{x}(t))^2$  nicht größer als  $\varepsilon^2$  ist. Größere Abweichungen  $|x(t) - \hat{x}(t)|$  in gewissen Teilbereichen von  $[a, b]$  können durch sehr kleine Abweichungen in anderen Teilbereichen wieder ein wenig kompensiert werden. Die  $L^2(a, b)$ -Norm charakterisiert in diesem Sinne bis auf einen Proportionalitätsfaktor, der die Intervalllänge zum Ausdruck bringt, einen über das gesamte Intervall  $[a, b]$  genommenen quadratischen Mittelwert von Abweichungen.

Die Entscheidung, ob das oben gewählte Raumpaars  $X$  und  $Y$  praktischen Erfordernissen standhält, ist in der Regel nicht allein vom mathematischen Standpunkt aus zu treffen, sondern erfordert die Kenntnis des physikalisch-technischen Problemhintergrunds. Die Mathematik stellt für diesen Zweck allerdings eine breite Palette von Banachräumen mit unterschiedlichen Normen zur Verfügung. So könnte es etwa sein, daß man die Genauigkeit von Lösungen gar nicht in der starken  $C$ -Norm bewerten will. Dann kann z.B. auch für  $X$  der Raum  $L^2(a, b)$  betrachtet werden, welcher im Gegensatz zu  $C[a, b]$  sogar einen Hilbertraum bildet. Ebenso ist es häufig der Fall, daß nicht nur die Werte  $x(t)$  einer gesuchten Funktion, sondern auch die Werte  $x'(t)$  ihrer Ableitung von Interesse sind und in die Bewertung von Abständen einbezogen werden müssen. Dann wäre die Wahl des Raumes  $C^1[a, b]$  der auf  $[a, b]$  stetig differenzierbaren Funktionen mit der gegenüber der einfachen Maximumnorm in  $C[a, b]$  noch weiter verstärkten Norm

$$\|x - \hat{x}\|_{C^1[a,b]} := \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - \hat{x}(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t) - \hat{x}'(t)| \quad (2.8)$$

angemessen. Eine solche Variabilität der Raumwahl hat man auch in bezug auf den Raum  $Y$ , wobei aber die Beschaffenheit und das Format der Eingangsdaten diese Möglichkeiten stark eingrenzen können.

### 2.1.2 Der Operator der direkten Aufgabe

Neben der Raumwahl spielt bei der Formulierung inverser Aufgaben auch die Wahl eines geeigneten Definitionsbereichs  $D \subseteq X$  eine wichtige Rolle. Alle Elemente  $x$  dieser Menge  $D$  kommen als Lösungen des inversen Problems in Frage. Die Menge  $D$  darf natürlich nur solche Parameter  $x$  enthalten, für welche die zugehörige direkte Aufgabe überhaupt lösbar ist.

Die eingangs erwähnten Ursache-Wirkungs-Beziehungen werden allgemein mit Hilfe einer Abbildung  $x \mapsto y$  zwischen Banachräumen oder mit anderen Wor-

ten durch einen Operator  $F : D \subseteq X \longrightarrow Y$  charakterisiert. Jedem Element  $x \in D$  (Urbild), das eine Ursache oder eine Komponente des Bedingungsgefüges beschreibt, wird mittels  $F$  in eindeutiger Weise eine Wirkung  $y \in Y$  (Bild des Operators) zugeordnet. Diese Richtung des Kausalzusammenhangs ist gerade die der direkten Aufgabe. Den Operator  $F$  nennt man daher auch **Operator der direkten Aufgabe**. Es kann durchaus sein, daß sich die Bildelemente  $y = F(x)$  nicht mit Hilfe einer expliziten Formel unter Verwendung der Urbildelemente  $x$  ausdrücken lassen. Bei inversen Problemen, deren beobachtbare Wirkungsgrößen physikalische Zustände  $u$  sind, genügen diese Zustände in der Regel einer gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichung oder einem System derselben. In diesem Zusammenhang kann man etwa als Element  $x$  die Parameterfunktion  $\lambda$  in Beispiel 1.1 betrachten. Die Zustände  $u$ , aus denen sich das Wirkungselement  $y$  ergibt, sind hier Temperaturen, die der Wärmeleitungsgleichung (1.1) mit entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen genügen. Um bei Vorgabe des Parameterelements  $x$  das Bild  $y = F(x)$  des Operators der direkten Aufgabe bestimmen zu können, muß in solchen Fällen erst ein Differentialgleichungsproblem gelöst werden, in Beispiel 1.1 das Problem (1.1) – (1.4). Das Bild  $F(x)$  ist dann bei Vorgabe von  $x$  nur implizit über die Lösung  $u$  dieses Differentialgleichungsproblems gegeben.

Abgesehen von sehr speziellen Situationen, zum Beispiel von Prozessen, bei denen chaotische Verhaltensweisen dominieren, geht man von folgendem Zusammenhang aus: Eine kleine Störung im Element  $x$ , also z.B. eine leicht veränderte Ursache, ruft wiederum nur eine kleine Störung in  $y$  hervor, zieht also auch nur eine leicht veränderte Wirkung nach sich. Mathematisch drückt man dies durch die Annahme eines stetigen Operators  $F$  aus. Wir werden im weiteren immer die in der folgenden Definition eingeführte **Stetigkeit des Operators  $F$**  der direkten Aufgabe auf dem gesamten Definitionsbereich  $D$  voraussetzen.

**Definition 2.1** *Ein Operator  $F : D \subseteq X \longrightarrow Y$  heißt stetig im Punkt  $x_0 \in D$ , wenn für jede gegen  $x_0$  konvergierende Folge  $\{x_n\} \subset D$  von Urbildern, d.h.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_X = 0,$$

*auch die zugehörige Bildfolge  $\{F(x_n)\} \subset Y$  gegen  $F(x_0)$  konvergiert, d.h., es gilt dann*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - F(x_0)\|_Y = 0.$$

*Der Operator  $F$  heißt stetig auf  $D$ , wenn er in allen Punkten  $x_0 \in D$  stetig ist.*

Eine besondere Rolle spielt unter den stetigen Operatoren  $F$  der direkten Aufgabe die Klasse der **beschränkten linearen Operatoren**  $A$ .

**Definition 2.2** Ein Operator  $A : X \rightarrow Y$  heißt *linear*, wenn für alle  $x_1, x_2 \in X$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$$

gilt. Gibt es zusätzlich eine Konstante  $K \geq 0$ , so daß für alle  $x \in X$

$$\|Ax\|_Y \leq K \|x\|_X$$

erfüllt ist, so heißt der lineare Operator  $A$  *beschränkt*.

Beschränkte lineare Operatoren  $A$  zwischen  $X$  und  $Y$  bilden selbst einen Banachraum, den wir mit  $\mathcal{L}(X, Y)$  bezeichnen. Die Norm

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

in diesem Raum entspricht der kleinstmöglichen Konstante  $K$  in Definition 2.2. Falls der stetige Operator  $F$  nicht die Gestalt eines beschränkten linearen Operators besitzt, so sprechen wir von einem **nichtlinearen Operator** der direkten Aufgabe.

### 2.1.3 Operatorgleichungen und Extremalprobleme

Jede inverse Aufgabe besteht unter den beschriebenen Bedingungen in einer Rekonstruktion geeigneter Urbilder  $x \in D \subseteq X$  bei Vorgabe von Bildern  $y \in Y$  des Operators  $F$  der direkten Aufgabe. Die Lösung der inversen Aufgabe entspricht also der Realisierung der Umkehrabbildung  $y \mapsto x$  des Operators der direkten Aufgabe. In Abhängigkeit davon, ob es sich um ein Identifikationsproblem oder um eine Steueraufgabe handelt, ist diese Umkehrung aber in besonderer Weise zu verstehen. Ebenso spielen für die Charakterisierung inverser Aufgaben Eigenschaften des Operators  $F$  der direkten Aufgabe und des Definitionsbereichs  $D$  eine entscheidende Rolle.

Jedes der betrachteten Identifikationsprobleme läßt sich in Form einer **Operatorgleichung**

$$F(x) = y, \quad x \in D \subseteq X, \quad y \in Y \quad (2.9)$$

darstellen. Die Eingangsdaten  $y$  bilden dabei die rechte Seite der Operatorgleichung (2.9). Das gesuchte Element  $x$  aus dem Definitionsbereich  $D$

charakterisiert die Lösung dieser Gleichung. Sofern  $F$  ein nichtlinearer Operator ist, liegt ein nichtlineares Identifikationsproblem vor, und wir erhalten eine **nichtlineare Operatorgleichung** (2.9). Für den Fall linearer Identifikationsprobleme ergibt sich entsprechend als Spezialfall eine **lineare Operatorgleichung**

$$Ax = y, \quad x \in D \subseteq X, \quad y \in Y, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y) \quad (2.10)$$

zur Darstellung des Problems.

Bei den Identifikationsproblemen sind die Operatorgleichungen (2.9) und (2.10) aber als idealisierte Schreibweisen aufzufassen, da die Elemente  $y$  eigentlich exakte Bilder  $y = F(x)$  bzw.  $y = Ax$  des gesuchten Parameterelements  $x$  bei Anwendung des Operators  $F$  der direkten Aufgabe repräsentieren. In der Realität werden die Eingangsdaten diese Idealsituation niemals erfüllen, da aufgrund unvermeidlicher Modell- und Beobachtungsfehler von gegenüber  $y$  gestörten Daten  $y_\delta$  auszugehen ist. Wir werden dann stets die Abschätzung

$$\|y_\delta - y\|_Y \leq \delta \quad (2.11)$$

bei Vorgabe eines Datenfehlerniveaus  $\delta > 0$  zugrundelegen.

Für Steueraufgaben ist diese Art der Modellierung auf der Grundlage von Operatorgleichungen wenig sachgerecht. Die vorgegebenen gewünschten Wirkungen  $y$ , zu denen ein möglichst gut passendes Element  $x$  gesucht wird, werden im Regelfall nicht exakte Bilder von  $F$  sein. Ebenso ist das Abstandsniveau  $\delta$  der gewünschten Elemente  $y$  von solchen exakten Bildern  $F(x)$  kaum quantitativ zu fassen. Deshalb ist den Steueraufgaben eine Formulierung als **Extremalproblem**

$$J(x) := \|F(x) - y\|_Y = \min!, \quad x \in D \subseteq X \quad (2.12)$$

angemessen. Das Defektnormfunktional  $J(x)$  wird dabei minimiert bezüglich aller zulässigen Elemente  $x \in D$ , wobei es Minimalelemente  $x_{min}$  als Lösungen von (2.12) nicht unbedingt geben muß. Da aber Normen nichtnegative Werte liefern, haben wir wenigstens ein Infimum  $\inf_{x \in D} J(x) = \inf_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y \geq 0$  als untere Grenze aller zulässigen Defektnormen. Somit existieren zu vorgegebenen Zahlen  $\eta > 0$  stets Elemente  $x_{min}^\eta$ , die der Beziehung

$$J(x_{min}^\eta) \leq \inf_{x \in D} J(x) + \eta \quad (2.13)$$

genügen.

Für beide Klassen inverser Probleme kann man die Sondersituation  $D = X$  hervorheben. Wir haben es in diesem Fall mit **unrestringierten inversen Problemen** zu tun. Speziell für lineare Identifikationsprobleme in der Darstellung

als lineare Operatorgleichungen (2.10) spielt dieser Fall eine wichtige Rolle, da hierfür eine geschlossene mathematische Theorie existiert, deren Grundlagen wir in den Abschnitten 2.2.3 für allgemeine Banachräume und 3.1 für Hilberträume kennenlernen werden. Ist der Definitionsbereich  $D$  eine echte Teilmenge des Banachraums  $X$ , so sprechen wir von **restringierten inversen Problemen**. Von Interesse sind dabei für  $D$  Teilmengen im Banachraum  $X$  mit besonderen Eigenschaften. Mit Hilfe von **Kugeln**

$$D = \{x \in X : \|x\|_X \leq K\} \quad (2.14)$$

ist es beispielsweise möglich, Lösungen inverser Aufgaben in der Norm des Raumes  $X$  durch eine vorgegebene Konstante  $K > 0$  zu beschränken. Ebenso können Lösungsfunktionen, z.B.  $x \in C[a, b]$ , entsprechend ihrem Anwendungshintergrund a priori als **nichtnegativ**,

$$D = \{x \in C[a, b] : x(t) \geq 0 \quad (a \leq t \leq b)\}, \quad (2.15)$$

als **monoton nichtfallend**,

$$D = \{x \in C[a, b] : x(t_1) \leq x(t_2) \quad (a \leq t_1 < t_2 \leq b)\}, \quad (2.16)$$

oder als **konvex**,

$$D = \left\{ x \in C[a, b] : x\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{x(t_1) + x(t_2)}{2} \quad (a \leq t_1 < t_2 \leq b) \right\}, \quad (2.17)$$

vorausgesetzt werden. Eine weitere wichtige Klasse von Restriktionen wird in den Abschnitten 2.3.2 und 2.3.3 ausführlich betrachtet. Zum einen machen Restriktionen die praktische Behandlung der Operatorgleichungen und Extremalprobleme schwieriger, da spezielle auf Restriktionen zugeschnittene numerische Lösungszugänge entwickelt und eingesetzt werden müssen. Zum anderen steigen mit den Restriktionen aber die Chancen einer realistischen Lösung der inversen Aufgaben, da gegenüber den unrestringierten Problemen zusätzliche Informationen über die erwartete Lösung in die Problemstellung einfließen.

## 2.2 Das Phänomen der Inkorrektheit

Leider sind wichtige positive Eigenschaften direkter Aufgaben nicht auf inverse Aufgaben übertragbar. So ist die Tatsache, daß bei direkten Aufgaben kleine Störungen in den Ursachen auch nur kleine Störungen in den Wirkungen nach sich ziehen, nicht umkehrbar. Ebenso kann aus der eindeutigen Bestimmtheit einer resultierenden Wirkung bei vorgegebener Ursache nicht geschlossen

werden, daß zu jeder vorgegebenen Wirkung eine eindeutig bestimmte Ursache gehört. Diese nachteiligen Verhaltensweisen inverser Aufgaben finden ihren allgemeinen Ausdruck in der **Inkorrektheit** oder **Schlechtgestelltheit** (englisch: ill-posedness) solcher Aufgaben. Mit diesem Phänomen und seinen Auswirkungen auf die näherungsweise Lösung inverser Aufgaben werden sich die folgenden Betrachtungen beschäftigen. Auch wenn wir dabei nur die Inkorrektheit der mathematischen Modelle (2.9) bzw. (2.12) von Identifikationsproblemen bzw. Steueraufgaben diskutieren werden, sei an dieser Stelle unterstrichen, daß Inkorrektheit eine Eigenschaft des inversen Problems selbst ist und nicht etwa die Folge einer unsachgemäßen Modellierung desselben.

### 2.2.1 Die Hadamardsche Korrektheitsdefinition

Bereits Anfang dieses Jahrhunderts formulierte der französische Mathematiker J. Hadamard (s. [HAD23]) bei Betrachtungen von Cauchyproblemen zu partiellen Differentialgleichungen den Begriff der **Korrektheit** einer Aufgabe. Wir wenden diese Definition im folgenden sinngemäß auf die ein Identifikationsproblem beschreibende Operatorgleichung (2.9) an:

**Definition 2.3** Die Operatorgleichung (2.9) heißt *k o r r e k t* nach Hadamard, wenn gilt:

- i. Zu jedem  $y \in Y$  gibt es eine Lösung  $x \in D$  von  $F(x) = y$  (Existenzbedingung).
- ii. Die aus  $F(x) = y$  erhaltene Lösung  $x$  ist in  $D$  eindeutig bestimmt (Eindeutigkeitsbedingung).
- iii. Die Lösung  $x$  hängt stetig von der rechten Seite  $y$  ab (Stabilitätsbedingung).

Ist wenigstens eine der drei Bedingungen verletzt, so heißt die Operatorgleichung *i n k o r r e k t* nach Hadamard.

- Wenn der Operator  $F : D \subseteq X \rightarrow Y$  der direkten Aufgabe die **Existenzbedingung** in der Hadamardschen Korrektheitsdefinition erfüllt, so nennen wir ihn **surjektiv**. Die Bildmenge

$$F(D) := \{y \in Y : y = F(x), x \in D\}$$

des Operators füllt dann den ganzen Raum  $Y$  aus. Ist dagegen die Existenzbedingung verletzt, so ist es möglich, daß zwar für die exakte rechte Seite  $y \in F(D)$  eine Lösung der Operatorgleichung (2.9) existiert, nicht



jedoch für gestörte Eingangsdaten  $y_\delta \notin F(D)$ , obwohl die Abweichung  $\delta$  (s. (2.11)) sehr klein sein kann. **Die Verletzung der Existenzbedingung ist ein erstes Phänomen der Inkorrektheit.**

Im Lösungsprozeß der Operatorgleichung kann die Tatsache, daß nicht zu allen rechten Seiten Lösungen existieren, dadurch überwunden werden, daß man verallgemeinerte Lösungen von (2.9) akzeptiert. Eine wichtige Rolle spielen dabei Elemente  $x \in D$ , welche die Defektnorm  $\|F(x) - y\|_Y$  bzw. das in Hilberträumen meist verwendete Defektnormquadrat  $\|F(x) - y\|_Y^2$  der Operatorgleichung minimieren, sofern solche überhaupt existieren. Bei einer Verwendung der **Euklidischen Norm**

$$\|\underline{y}\|_{\mathbb{R}^n} := \sqrt{\sum_{i=1}^n \underline{y}_i^2} \quad (\underline{y} = (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n)^T \in \mathbb{R}^n) \quad (2.18)$$

im  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $Y = \mathbb{R}^n$  oder bei Verwendung der Norm aus Formel (2.3) im Raum  $Y = L^2(a, b)$  bzw. allgemein im Hilbertraum spricht man dabei von **Kleinste-Quadrate-Lösungen** nach der auf C. F. Gauß zurückgehenden Methode der kleinsten Quadrate.

- Die Operatorgleichung (2.9) erfüllt die **Eindeutigkeitsbedingung** der Hadamardschen Korrektheitsdefinition, wenn für alle  $y \in F(D)$ , also für alle rechten Seiten  $y$ , zu denen überhaupt Lösungen in  $D$  existieren, aus  $F(x_1) = F(x_2) = y$  mit  $x_1, x_2 \in D$  die Gleichheit  $x_1 = x_2$  folgt. Wir nennen den Operator  $F$  dann **injektiv** auf dem Definitionsbereich  $D$ . Folglich existiert der **inverse Operator** oder Umkehroperator

$$F^{-1} : F(D) \subseteq Y \rightarrow D \subseteq X$$

mit  $F^{-1}(z) = x$  für  $z = F(x)$ . Die Lösung  $x$  des Identifikationsproblems kann man dann in expliziter Weise in der Form

$$x = F^{-1}(y) \quad (2.19)$$

aus den Eingangsdaten  $y$  herleiten. Der Operator  $F^{-1}$  ist der Lösungsoperator des entsprechenden inversen Problems. Gilt neben der Eindeutigkeitsbedingung auch noch die Existenzbedingung, so ist  $F(D) = Y$ , und der Umkehroperator  $F^{-1}$  des Operators der direkten Aufgabe ist auf dem ganzen Raum  $Y$  definiert. Bei Verletzung der Eindeutigkeitsbedingung ist selbst bei exakt gegebener rechter Seite  $y$  keine eindeutige Identifikation des gesuchten Parameterelements  $x$  möglich. Die beobachteten Wirkungen enthalten dann zu wenig Informationen über das zu identifizierende Objekt, um es unzweifelhaft zu charakterisieren. **Mehrdeutigkeit der Lösung ist ein zweites Phänomen der Inkorrektheit.**

Bei der praktischen Lösung von mehrdeutigen Operatorgleichungen macht es manchmal Sinn, nach speziell ausgezeichneten Lösungen zu suchen. In günstigen Fällen wird dadurch der Lösungsprozeß im Sinne dieser verallgemeinerten Lösungen sogar eindeutig gestaltet. Häufig sucht man nach  **$x^*$ -Minimum-Norm-Lösungen**, die unter allen Elementen  $x \in D$  mit minimaler Defektnorm den kleinsten Abstand zu einem vorgegebenen Referenzelement  $x^* \in X$  haben.

**Definition 2.4** Ein Element  $x_{mn} \in D$  heißt  $x^*$ -Minimum-Norm-Lösung der Operatorgleichung (2.9) zu einer gegebenen rechten Seite  $y \in Y$  und einem gegebenen Referenzelement  $x^* \in X$ , wenn gilt

$$\|F(x_{mn}) - y\|_Y = \min_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y$$

und

$$\|x_{mn} - x^*\|_X = \min \left\{ \|\hat{x} - x^*\|_X : \|F(\hat{x}) - y\|_Y = \min_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y, \hat{x} \in D \right\}.$$

Wenn  $x^* = \mathbf{0}$  gesetzt wird, so werden als  $x^*$ -Minimum-Norm-Lösungen die normkleinsten Elemente mit minimaler Defektnorm gesucht. Man spricht dann nur von **Minimum-Norm-Lösungen**.

- Bei erfüllter Eindeutigkeitsbedingung bedeutet in der Hadamardschen Korrektheitsdefinition die **Stabilitätsbedingung**, daß aus der Konvergenz  $y_n \rightarrow y_0$  in  $Y$  die Konvergenz der Bilder des inversen Operators  $F^{-1}(y_n) \rightarrow F^{-1}(y_0)$  in  $X$  folgt. Die Stabilitätsbedingung ist in diesem Falle gleichwertig mit der Stetigkeit des Umkehroperators  $F^{-1}$  im Sinne von Definition 2.1. Leider wird aber selbst bei erfüllter Eindeutigkeitsbedingung die Stabilitätsbedingung bei Problemen der Identifikation von Funktionen einer oder mehrerer Veränderlicher in der Regel verletzt. Die Banachräume  $X$  und  $Y$  sind in solchen Fällen unendlichdimensionale Funktionenräume, wie etwa die erwähnten Räume  $C[a, b]$  und  $L^2(a, b)$ . Die Tatsache, daß dann  $F^{-1}$  **unstetig** wird und beliebig kleine Störungen in  $y$  zu beliebig großen Störungen in  $x$  führen können, erschwert die Lösung von Identifikationsproblemen außerordentlich. **Instabilität ist als drittes Phänomen der Inkorrektheit für den Lösungsprozeß das gravierendste.**

Wird die Eindeutigkeitsbedingung nicht befriedigt, so wollen wir unter der Erfüllung der Stabilitätsbedingung in der Hadamardschen Korrektheitsdefinition verstehen, daß zu einer in  $Y$  gegen  $y_0 \in F(D)$  konvergenten unendlichen

Folge  $\{y_n\} \subset F(D)$  die zugehörige Folge der Urbildmengen

$$U(y_n) := \{x \in D : F(x) = y_n\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

von Elementen  $x \in D$ , deren Bild  $y_n$  ergibt, gegen die Urbildmenge

$$U(y_0) := \{x \in D : F(x) = y_0\}$$

von  $y_0$  konvergiert. Die Konvergenz ist dabei im Sinne der Konvergenz des **Quasiabstandes** gegen Null wie folgt zu verstehen:

$$\text{qdist}(U(y_n), U(y_0)) := \sup_{x_n \in U(y_n)} \inf_{x_0 \in U(y_0)} \|x_n - x_0\|_X \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Kleine Störungen in der rechten Seite der Operatorgleichung (2.9) liefern im Stabilitätsfall Lösungen, die auch nur kleine Abstände von der Lösungsmenge zu (2.9) bei exakter rechter Seite aufweisen. Die Störungen in der Lösungsmenge müssen aber bei Verletzung der Eindeutigkeitsbedingung auf der Grundlage des nichtsymmetrischen Quasiabstandes einer Menge  $M_1 \subseteq X$  von einer Menge  $M_2 \subseteq X$  bewertet werden. Wenn man für jeden Punkt  $x_1 \in M_1$  der ersten Menge den gewöhnlichen Abstand  $\text{dist}(x_1, M_2) := \inf_{x_2 \in M_2} \|x_1 - x_2\|_X$  von der Menge  $M_2$  (Punkt-Mengen-Abstand) betrachtet, so charakterisiert der Quasiabstand (Mengen-Mengen-Abstand)  $\text{qdist}(M_1, M_2) := \sup_{x_1 \in M_1} \text{dist}(x_1, M_2)$  die kleinste obere Schranke dieser über alle Elemente von  $M_1$  genommenen Punkt-Mengen-Abstände zu  $M_2$ .

Die Instabilität als gravierendste Komponente der Inkorrektheit kann überwunden werden, wenn anstelle der instabilen Aufgaben selbst **stabile Ersatzaufgaben** zur näherungsweise Lösung eingesetzt werden. Um eine akzeptable Genauigkeit der Näherungslösungen zu gewährleisten, müssen die Ersatzaufgaben aber die Ausgangsprobleme genügend gut approximieren. Im Prinzip ist dabei ein gesunder **Kompromiß zwischen Stabilität und Approximation** zu finden. Diese Vorgehensweise wird bei der Lösung inverser Aufgaben durch den Begriff der **Regularisierung** verkörpert. Methoden, die in sehr unterschiedlicher Weise einen solchen Kompromiß realisieren, heißen **Regularisierungsmethoden** und werden in speziellen Varianten in Abschnitt 2.3 und umfassend im Kapitel 4 dieses Buches vorgestellt.

Als Ursache für die Inkorrektheit, speziell auch für die Instabilität von Identifikationsproblemen, ist die Tatsache zu nennen, daß die meisten Operatoren  $F$  der direkten Aufgabe **glättend** wirken. Die Bilder  $F(x)$  haben dann in der Regel eine höhere Glattheit als die Urbilder  $x$ . So können unstetige Funktionen  $x$  in stetige Funktionen  $F(x)$  transformiert werden oder stetige, aber nicht

überall differenzierbare Funktionen  $x$  in Funktionen  $F(x)$  überführt werden, die überall eine stetige erste Ableitung oder sogar höhere Ableitungen besitzen. Glättung kann hier aber auch bedeuten, daß stark oszillierende Funktionen  $x$  in kaum schwingende Funktionen  $F(x)$  übergehen. Ebenso ist es möglich, daß zwei Elemente  $x_1$  und  $x_2$  mit großem Abstand  $\|x_1 - x_2\|_X$  in Bilder  $F(x_1)$  und  $F(x_2)$  mit sehr kleinem Abstand  $\|F(x_1) - F(x_2)\|_Y$  übergehen oder aber daß zwar die Abstände  $\|x_1 - x_2\|_X$  und  $\|F(x_1) - F(x_2)\|_Y$  die gleiche Größenordnung haben, jedoch die verwendete Norm in  $Y$  viel stärker ist als die Norm in  $X$ . Die Umkehroperatoren  $F^{-1}$  glättender Operatoren  $F$ , also die Lösungsoperatoren des inversen Problems, sind dann in der Folge **aufrauhend**. Das bedeutet für die Lösung des Identifikationsproblems zum Beispiel, daß man Amplitude und Frequenz einer stark schwingenden Funktion  $x$  rekonstruieren soll, obwohl die Datenfunktion  $F(x)$  erstens kaum Schwingungen aufweist und zweitens in der Praxis auch noch mit einem Datenfehler überlagert ist. Dieser Vorgang des Aufrauhsens ist stets problematisch und fehleranfällig. Die damit verbundenen Operatoren  $F^{-1}$  sind im allgemeinen nicht stetig. Folglich ist die Stabilitätsbedingung verletzt, und das inverse Problem ist inkorrekt. Das folgende Beispiel illustriert diesen Zusammenhang.

**Beispiel 2.1** Für einen auf einer geraden Straße fahrenden PKW wird im Zeitraum  $0 \leq t \leq T$  mittels eines Meßgeräts die Geschwindigkeit  $y(t)$  als Funktion der Zeit  $t$  aufgezeichnet. Daraus sind die den Geschwindigkeiten zugrundeliegenden zeitabhängigen Beschleunigungen

$$x(t) = y'(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2.21)$$

des Wagens zu identifizieren. Wir haben es mit einem inversen Problem zu tun, welches auf die **Bestimmung der ersten Ableitung einer Funktion aus den Werten der Funktion selbst** führt. Geht man davon aus, daß der PKW zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhe ist, so wird der Zusammenhang zwischen den Funktionen  $x$  und  $y$  durch die **Integralgleichung**

$$[F(x)](t) := \int_0^t x(\tau) d\tau = y(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2.22)$$

beschrieben, welche hier die konkrete Form der Operatorgleichung (2.9) darstellt. Der Operator  $F$  der direkten Aufgabe ist ein „glättender“ Integraloperator, genauer ein linearer Volterrascher Integraloperator, während der Lösungsoperator  $F^{-1}$  der inversen Aufgabe mit  $x = F^{-1}(y) = \frac{d}{dt}y$  ein „aufrauhen-der“ Differentialoperator ist. Betrachten wir den Operator  $F$  nun im Raum  $X = Y = C[0, T]$  stetiger Funktionen, d.h. messen wir alle Abweichungen

in der Maximumnorm (s. (2.2)), dann ist  $F$  ein stetiger Operator, denn die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|F(x_n) - F(x_0)\|_{C[0,T]} &= \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (x_n(\tau) - x_0(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^t |x_n(\tau) - x_0(\tau)| d\tau \leq T \max_{0 \leq t \leq T} |x_n(t) - x_0(t)| \leq T \|x_n - x_0\|_{C[0,T]} \end{aligned}$$

besagt, daß für  $n \rightarrow \infty$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  auch  $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$  in  $C[0, T]$  gilt (s. Definition 2.1).

Stören wir andererseits eine Lösung  $x_0$  von Gleichung (2.22) mit  $F(x_0) = y_0$  in der Art

$$x_n(t) = x_0(t) + \cos nt \quad (0 \leq t \leq T; n = 1, 2, \dots), \quad (2.23)$$

so gilt

$$\|x_n - x_0\|_{C[0,T]} = \max_{0 \leq t \leq T} |\cos nt| = 1,$$

aber wir haben

$$y_n(t) = y_0(t) + \frac{1}{n} \sin nt \quad (0 \leq t \leq T; n = 1, 2, \dots) \quad (2.24)$$

mit

$$\|y_n - y_0\|_{C[0,T]} \leq \frac{1}{n},$$

wobei  $y_n = F(x_n)$  ist. Folglich gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_0\|_{C[0,T]} = 0, \quad \text{aber} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|F^{-1}(y_n) - F^{-1}(y_0)\|_{C[0,T]} = 1 \neq 0.$$

Der Differentialoperator  $F^{-1}$  ist somit in  $C[0, T]$  **unstetig**. Die Operatorgleichung (2.22) verletzt die Stabilitätsbedingung der Hadamardschen Korrektheitsdefinition und ist somit **inkorrekt**. Vergleicht man die Formeln (2.23) und (2.24), so wird deutlich, daß beim Übergang von  $x$  zu  $y$  für sehr hochfrequente Störungen die Amplitude der Störungen beliebig stark gedämpft werden kann. Dies illustriert den glättenden bzw. aufrauenden Charakter der Operatoren  $F$  bzw.  $F^{-1}$  in diesem Beispiel. Mit einer Modifikation des hier betrachteten Beispiels in Richtung des Zusammenhangs zwischen zeitabhängiger Beschleunigung und zurückgelegtem Weg des Fahrzeugs beschäftigt sich Aufgabe 2.1.  $\square$

Um nach Definition 2.3 zu überprüfen, ob eine Operatorgleichung (2.9) korrekt oder inkorrekt ist, müssen alle Bestandteile der Operatorgleichung, die Banachräume  $X, Y$ , die Menge  $D$  und der Operator  $F$  herangezogen werden.

Manchmal läßt sich die eindeutige Lösbarkeit von (2.9) erreichen, indem man den Definitionsbereich  $D$  geeignet einschränkt, so daß aus mehreren Lösungszweigen ein spezieller ausgewählt wird. Für die Stabilitätsbedingung dagegen spielt die Wahl der Räume  $X$  und  $Y$  und ihrer Normen eine große Rolle. Wählt man etwa in Beispiel 2.1 für die Betrachtung der Integralgleichung (2.22) wieder  $X = C[0, T]$  mit der Maximumnorm der Funktionswerte der Lösungsfunktionen, aber nun  $Y = C^1[0, T]$ , wobei Abweichungen in der rechten Seite von (2.22) nach Formel (2.8) bewertet werden, so gilt für eine Folge  $\{x_n\} \subset X$  stets

$$\|F(x_n) - F(x_0)\|_{C^1[0, T]} = \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (x_n(\tau) - x_0(\tau)) d\tau \right| + \max_{0 \leq t \leq T} |x_n(t) - x_0(t)|$$

und folglich eine Ungleichung

$$\|F(x_n) - F(x_0)\|_{C^1[0, T]} \geq \|x_n - x_0\|_{C[0, T]},$$

welche die Stabilität des inversen Problems sicherstellt. In diesem Raumpaar ist die Stabilitätsbedingung nun plötzlich erfüllt. Der Lösungsoperator der Integralgleichung  $F^{-1} : C^1[0, T] \rightarrow C[0, T]$  ist hier ein stetiger Operator. Stabilität oder Instabilität einer Operatorgleichung hängen also wesentlich von der **Wahl der „Topologie“ der Funktionenräume** ab, die in Banachräumen durch die Auswahl der betrachteten Normen festgelegt wird. Eine Verstärkung der Norm in  $Y$ , wie hier beim Übergang von  $C[0, T]$  zu  $C^1[0, T]$ , oder als Alternative eine Abschwächung der Norm in  $X$  kann dazu führen, daß aus einer instabilen Aufgabe eine stabile wird. Dieser **mathematische Trick** ist aber **kaum von praktischer Bedeutung**, da für die mathematische Modellierung inverser Probleme die Normen im allgemeinen durch den Problemhintergrund festgelegt sind und nicht frei gewählt werden können. So würde in Beispiel 2.1 die Wahl einer  $C^1$ -Norm für  $Y$  bedeuten, daß zu allen betrachteten Zeiten nicht nur die Geschwindigkeiten  $y(t)$ , sondern auch ihre Ableitungen  $y'(t)$  mit einer vorgegebenen Genauigkeit  $\delta$  gemessen werden können. Dies wird ein Geschwindigkeitsmeßgerät aber kaum leisten. Die Ableitungswerte sollen im Rahmen des inversen Problems ja gerade bestimmt werden.

Die Integralgleichung (2.22) wurde in Beispiel 2.1 als Spezialfall einer Operatorgleichung (2.9) betrachtet. Da der auftretende Integraloperator aber beschränkt und linear ist, gehört sie sogar in die Klasse (2.10) von linearen Operatorgleichungen. Die Korrektheit bzw. Inkorrektheit nach Hadamard dieser Aufgabenklasse für den unrestringierten Fall  $D = X$  werden wir ausführlich im Abschnitt 2.2.3 diskutieren. Bei dieser Klasse stehen Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität von Lösungen in einem engen Zusammenhang. Für restringierte

Probleme mit  $D \subset X$  (echte Teilmenge) andererseits und Aufgaben mit einem nichtlinearen Operator  $F$  wird die Hadamardsche Existenzbedingung aber häufig verletzt sein, denn  $F(D)$  stellt dann normalerweise eine echte Teilmenge von  $Y$  dar. In diesem Fall ergeben sich daraus keine Schlußfolgerungen für die Eindeutigkeit und die Stabilität der Lösung.

### 2.2.2 Die Korrektheit von Extremalproblemen

Da für Steueraufgaben nicht Operatorgleichungen, sondern Extremalprobleme (2.12) zur mathematischen Darstellung geeignet sind, ist die Korrektheit solcher Probleme auch nicht aus der Hadamardschen Definition zu erschließen. Man muß sich dazu mit dem Korrektheitsbegriff bei einem allgemeinen Extremalproblem

$$J(x) = \min!, \quad x \in D \subseteq X \quad (2.25)$$

für ein reelles Funktional  $J : D \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$  befassen. Ausgehend von [VAS81] formulieren wir im folgenden eine solche dafür passende Korrektheitsdefinition:

**Definition 2.5** Das Extremalproblem (2.25) heißt *k o r r e k t*, wenn gilt:

iv. Die Lösungsmenge  $L_{min} = \left\{ x_{min} \in D : J(x_{min}) = \inf_{x \in D} J(x) \right\}$  von Problem (2.25) ist nichtleer, wobei  $\inf_{x \in D} J(x) > -\infty$  vorausgesetzt wird (Existenzbedingung).

v. Für eine minimierende Folge  $\{x_n\} \subset D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = \inf_{x \in D} J(x)$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, L_{min}) = 0$ , wobei  $\text{dist}(x_n, L_{min}) = \inf_{x \in L_{min}} \|x_n - x\|_X$  einen Punkt-Mengen-Abstand beschreibt (Stabilitätsbedingung).

Ist eine Bedingung verletzt, so heißt das Extremalproblem *i n k o r r e k t*.

Um eine Vorstellung von inkorrekten Extremalproblemen (2.25) zu erhalten, genügt es, mit  $D = X = \mathbb{R}$  den Raum der reellen Zahlen zu betrachten. Als Norm in  $X$  wird der Absolutbetrag  $\|x\|_X = |x|$  einer reellen Zahl  $x \in \mathbb{R}$  benutzt. Dann ist zum Beispiel für das Extremalproblem

$$J(x) := \frac{1}{x^2 + 1} = \min!, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.26)$$

die Existenzbedingung der obigen Definition verletzt, da zwar  $\inf_{x \in \mathbb{R}} J(x) = 0 > -\infty$  gilt, das Funktional  $J(x)$  im Bereich der reellen Zahlen aber kein Minimum besitzt, die Lösungsmenge  $L_{min}$  von (2.26) also leer ist. Betrachtet man dagegen

das Extremalproblem

$$J(x) := \frac{x^2}{x^4 + 1} = \min!, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.27)$$

so ist die Existenzbedingung erfüllt, denn  $x_{min} = 0$  ist Lösung von (2.27) und  $L_{min} = \{0\}$  nichtleer. Jedoch bildet  $x_n = n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) eine minimierende Folge, für die zwar  $\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = 0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} J(x)$  gilt, aber auch

$$\text{dist}(x_n, L_{min}) = n \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Die Stabilitätsbedingung ist offensichtlich verletzt. Die Extremalprobleme (2.26) und (2.27) sind beide inkorrekt.

Für ein Steuerproblem in der Formulierung (2.12) bedeutet die Existenzbedingung in der Korrektheitsdefinition, daß dann zu vorgegebenem  $y \in Y$  Elemente  $x_{min} \in D$  mit minimalem Defekt  $\|F(x) - y\|_Y$  existieren. Betrachtet man eine defektminimierende Folge  $\{x_n\} \subset D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - y\|_Y = \inf_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y$ , so sind die Folgeelemente bei erfüllter Stabilitätsbedingung für große  $n$  beliebig gute Näherungen für Elemente  $x_{min}$  mit minimalem Defekt. Derartige Folgen  $\{x_n\}$  entstehen z.B. bei der unvollständigen Minimierung des Defekts, wenn für eine Folge positiver Zahlen  $\{\eta_n\}$  mit  $\eta_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  die Ungleichungen

$$\|F(x_n) - y\|_Y \leq \inf_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y + \eta_n$$

erzeugt werden.

Eine Forderung nach der Existenz eines eindeutig bestimmten Elements  $x_{min}$  mit minimalem Defekt findet man in Definition 2.5 wohlweislich nicht. Für Steueraufgaben ist es nämlich nicht von Nachteil, wenn mehrere Lösungen existieren. Setzen wir für (2.12) aber voraus, daß sowohl die Existenzbedingung als auch die Stabilitätsbedingung im Sinne von Definition 2.5 erfüllt sind, so können wir auch die Frage beantworten, wie es mit der Stabilität der Lösung von (2.12) in bezug auf Störungen in  $y$  aussieht. Bezeichne  $\{y_n\} \subset Y$  eine Folge von Näherungselementen der exakten Eingangsdaten  $y_0 \in Y$ , für die  $\|y_n - y_0\|_Y \leq \delta_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  gelte, und  $\{x_n\} \subset D$  eine durch unvollständige Minimierung von  $\|F(x) - y_n\|_Y$  erhaltene Folge mit

$$\|F(x_n) - y_n\|_Y \leq \inf_{x \in D} \|F(x) - y_n\|_Y + \eta_n \quad (2.28)$$

und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$ . Dann folgt aus der Dreiecksungleichung für Normen

$$\|F(x_n) - y_0\|_Y \leq \|F(x_n) - y_n\|_Y + \|y_n - y_0\|_Y. \quad (2.29)$$



Aus den Ungleichungen (2.28) und (2.29) erhält man

$$\|F(x_n) - y_0\|_Y \leq \inf_{x \in D} \|F(x) - y_n\|_Y + \eta_n + \delta_n \leq \|F(x_{min}) - y_n\|_Y + \eta_n + \delta_n.$$

Wendet man nochmals die Dreiecksungleichung an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \|F(x_n) - y_0\|_Y &\leq \|F(x_{min}) - y_0\|_Y + \|y_0 - y_n\|_Y + \eta_n + \delta_n \\ &\leq \|F(x_{min}) - y_0\|_Y + \eta_n + 2\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in D} \|F(x) - y_0\|_Y. \end{aligned}$$

Das heißt,  $\{x_n\}$  ist eine minimierende Folge für das Defektfunktional  $\|F(x) - y_0\|_Y$  zu den exakten Eingangsdaten  $y_0$ . In diesem Sinne ist das Extremalproblem (2.12) stabil bezüglich kleiner Störungen in den Daten.

Wenngleich wir in diesem Buch Steueraufgaben nicht tiefergehend betrachten wollen, ist die Definition 2.5 der Korrektheit eines Extremalproblems trotzdem weiter von Interesse. Vielfach wird es nämlich nützlich sein, Extremalprobleme als Ersatzaufgaben zur näherungsweise Lösung inkorrektur Operatorgleichungen (2.9) zu formulieren. Die Korrektheit dieser Ersatzaufgaben ist dann die Voraussetzung, um auf diese Weise eine stabile näherungsweise Lösung der Ausgangsgleichung zu sichern.

### 2.2.3 Korrektheit und Inkorrektheit bei linearen Operatorgleichungen in Banachräumen

Wir betrachten nun die **lineare Operatorgleichung**

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y) \quad (2.30)$$

als mathematisches Modell eines unrestringierten linearen Identifikationsproblems. Der beschränkte lineare Operator  $A$  der direkten Aufgabe ist dabei auf dem ganzen Banachraum  $X$  definiert und nimmt Werte im Banachraum  $Y$  an. An dieser Stelle wollen wir spezielle Teilmengen  $T \subseteq X$  des Banachraums  $X$  einführen, die in den weiteren Betrachtungen Verwendung finden werden. Wir nennen  $T \subseteq X$  einen **Teilraum** von  $X$ , wenn  $T$  selbst wieder einen linearen Raum bildet, in dem die gleiche Norm wie in  $X$  eingeführt wird. Für beliebige  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  gilt dann mit  $x_1, x_2 \in T$  auch  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in T$ , jede Linearkombination zweier Elemente aus  $T$  ist also wieder ein Element des Teilraums  $T$ . Eine Teilmenge  $T$  von  $X$  heißt **abgeschlossen**, wenn sie mit ihrer Abschließung  $\overline{T}$  übereinstimmt, also  $T = \overline{T}$  gilt. Dabei enthält die **Abschließung**  $\overline{T}$  alle Elemente von  $T$  sowie sämtliche Elemente in  $X$ , die Grenzelemente einer konvergenten Folge aus  $T$  sind. Weiter heißt eine Teilmenge  $T$  von  $X$  **offen**, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht, d.h.,  $T = \text{int}(T)$  gilt, wobei  $\text{int}(T)$

die Menge der inneren Punkte von  $T$  bezeichnet. Ein Element  $x_0 \in T$  heißt **innerer Punkt** von  $T$ , wenn es eine positive Zahl  $r > 0$  gibt, so daß die **offene Kugel**

$$B_r(x_0) := \{x \in X : \|x - x_0\|_X < r\}$$

um  $x_0$  mit Radius  $r$  vollständig in  $T$  liegt. Man überlegt sich leicht, daß der Banachraum  $X$  selbst sowohl eine offene als auch eine abgeschlossene Menge bildet. Andererseits gibt es auch Mengen in  $X$ , die weder offen noch abgeschlossen sind.

Wir bezeichnen mit

$$N(A) = \{x \in X : Ax = \mathbf{0}\}$$

den **Nullraum** des Operators  $A$ . Dieser enthält alle Elemente des Raumes  $X$ , welche mittels  $A$  in das Nullelement von  $X$  abgebildet werden. Wegen der Stetigkeit von  $A$  haben wir für ein Element  $x_0 \in X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$  und  $\{x_n\} \subset N(A)$  auch  $Ax_0 = \mathbf{0}$ . Daher ist der Nullraum  $N(A)$  ein abgeschlossener Teilraum von  $X$ . Weiter bezeichnen wir mit

$$R(A) = \{y \in Y : y = Ax, x \in X\}$$

den **Bildraum** des Operators  $A$ . Der Bildraum  $R(A)$  ist wieder ein Teilraum des Banachraums  $Y$ , der aber nicht in jedem Fall abgeschlossen zu sein braucht. Die Frage der Abgeschlossenheit des Bildraums von  $A$  ist, wie wir sehen werden, eng mit der Frage nach der Korrektheit der linearen Operatorgleichung (2.30) verknüpft.

Wenden wir nun auf die lineare Operatorgleichung (2.30) die Hadamardsche Korrektheitsdefinition (s. Definition 2.3) an. Dann ist die **Existenzbedingung** genau dann erfüllt, wenn  $A$  **surjektiv** ist, d.h.  $R(A) = Y$  gilt. Andererseits erfüllt (2.30) die **Eindeutigkeitsbedingung** genau dann, wenn  $A$  **injektiv** ist. Dies ist gleichwertig mit der Tatsache, daß  $N(A) = \{\mathbf{0}\}$  gilt, der Nullraum von  $A$  also nur aus dem Nullelement des Banachraumes  $X$  besteht. Wären nämlich für  $N(A) = \{\mathbf{0}\}$  die Elemente  $x_1, x_2 \in X$  zwei Lösungen von (2.30) mit  $x_\Delta = x_2 - x_1$ , so würde aus  $Ax_1 = Ax_2$  wegen der Linearität des Operators  $A$  folgen, daß  $Ax_\Delta = \mathbf{0}$  ist. Dies hat  $x_\Delta = \mathbf{0}$ , somit  $x_1 = x_2$  und die Injektivität von  $A$  zur Folge. Umgekehrt ergäbe sich für injektives  $A$  aus der Existenz eines Elements  $x_\Delta \neq \mathbf{0}$  mit  $x_\Delta \in N(A)$ , daß neben  $x_1$  auch  $x_2 = x_1 + x_\Delta \neq x_1$  Lösung von (2.30) wäre, was einen Widerspruch zur Injektivität von  $A$  darstellen würde. Bei erfüllter Eindeutigkeitsbedingung existiert der **inverse Operator**  $A^{-1} : R(A) \subseteq Y \rightarrow X$  und ist wieder ein linearer Operator. Für lineare Operatoren, die auf einem linearen normierten Raum definiert sind und wieder in einen solchen abbilden, ist die Stetigkeit im Sinne von Definition 2.1 in allen Punkten des normierten Raumes gleichbedeutend mit der Beschränktheit des

linearen Operators im Sinne von Definition 2.2. Das bedeutet für den inversen Operator  $A^{-1}$ , daß er genau dann **stetig** ist, die Operatorgleichung (2.30) also der **Stabilitätsbedingung** genügt, wenn mit einer positiven Konstanten  $K$

$$\|A^{-1}y\|_X \leq K \|y\|_Y \quad \text{für alle } y \in R(A)$$

oder anders geschrieben

$$\|x\|_X \leq K \|Ax\|_Y \quad \text{für alle } x \in X \quad (2.31)$$

erfüllt wird. Interessant ist nun, daß die Stabilitätsbedingung der Hadamardschen Korrektheitsdefinition immer erfüllt ist, wenn sowohl Existenzbedingung wie auch Eindeutigkeitsbedingung erfüllt sind. Diesen Zusammenhang stellt das **Open Mapping Theorem** her, das wir im folgenden als Hilfssatz formulieren wollen.

**Hilfssatz 2.1** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  ein surjektiver beschränkter linearer Operator, der den Banachraum  $X$  auf den Banachraum  $Y$  abbildet, d.h., es gilt  $R(A) = Y$ . Dann ist für jede offene Teilmenge  $T$  von  $X$  auch die Bildmenge  $AT := \{y \in Y : y = Ax, x \in T\}$  eine offene Teilmenge von  $Y$ .*

Da ein Operator genau dann stetig ist, wenn die Urbilder offener Mengen wieder offene Mengen sind, ergibt sich aus dem Hilfssatz 2.1 eine wichtige Folgerung.

**Folgerung 2.1** *Ist der lineare Operator  $A$  aus Hilfssatz 2.1 zusätzlich injektiv, d.h. gilt  $N(A) = \{0\}$ , dann haben wir einen beschränkten linearen inversen Operator  $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ .*

Wir setzen in den weiteren Betrachtungen dieses Abschnitts den Operator  $A$  stets als injektiv und damit die Eindeutigkeitsbedingung als erfüllt voraus. Zuerst betrachten wir den Fall

$$R(A) = \overline{R(A)}. \quad (2.32)$$

Als abgeschlossener Teilraum von  $Y$  ist der Bildraum  $\tilde{Y} := \overline{R(A)}$  selbst wieder ein Banachraum mit derselben Norm wie in  $Y$ . Der Operator  $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X, \tilde{Y})$  mit  $\tilde{A}x := Ax$  für alle  $x \in X$  ist dann surjektiv, und es lassen sich Hilfssatz 2.1 sowie Folgerung 2.1 anwenden. Der damit stetige inverse Operator  $\tilde{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{Y}, X)$  sichert die Erfüllung der Stabilitätsbedingung der Hadamardschen Korrektheitsdefinition. So ergibt sich der folgende Satz:

**Satz 2.1** *Der Operator  $A$  in der linearen Operatorgleichung (2.30) sei injektiv und habe einen abgeschlossenen Bildraum, d.h., es gelte (2.32). Dann ist die Stabilitätsbedingung in Definition 2.3 erfüllt.*

Da  $Y$  als Banachraum abgeschlossen ist, folgt aus der Existenzbedingung von Definition 2.3 die Abgeschlossenheit des Bildraums (2.32). Aus Satz 2.1 erhält man somit:

**Folgerung 2.2** *Genügt die lineare Operatorgleichung (2.30) sowohl der Existenzbedingung als auch der Eindeutigkeitsbedingung von Definition 2.3, so genügt sie auch der Stabilitätsbedingung, und (2.30) ist korrekt nach Hadamard.*

Nunmehr betrachten wir die alternative Situation, daß der lineare Operator  $A$  zwar injektiv ist, aber keinen abgeschlossenen Bildraum besitzt, d.h., wir haben

$$R(A) \neq \overline{R(A)}. \quad (2.33)$$

Dann ist der inverse Operator  $A^{-1} : R(A) \subset Y \rightarrow X$  nicht beschränkt, somit nicht stetig und die Stabilitätsbedingung von (2.30) verletzt. Wäre nämlich mit (2.33) auch eine Ungleichung (2.31) erfüllt, so müßte für eine Folge

$$y_n \xrightarrow{Y} y_0 \notin R(A) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \text{mit } y_n = Ax_n \in R(A) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

die Abschätzung

$$\|x_n - x_m\|_X \leq K \|y_n - y_m\|_Y \quad (n, m = 1, 2, \dots) \quad (2.34)$$

gelten. Da  $\{y_n\}$  als konvergente Folge auch eine Cauchyfolge ist (s. Beziehung (2.1)), ergibt sich aus (2.34), daß auch  $\{x_n\}$  eine Cauchyfolge ist. Dann existiert im Banachraum  $X$  aber ein Grenzelement  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Wegen der Stetigkeit von  $A$  folgt daraus  $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax_0 = y_0$ . Dies schließlich widerspricht der Annahme  $y_0 \notin R(A)$ .

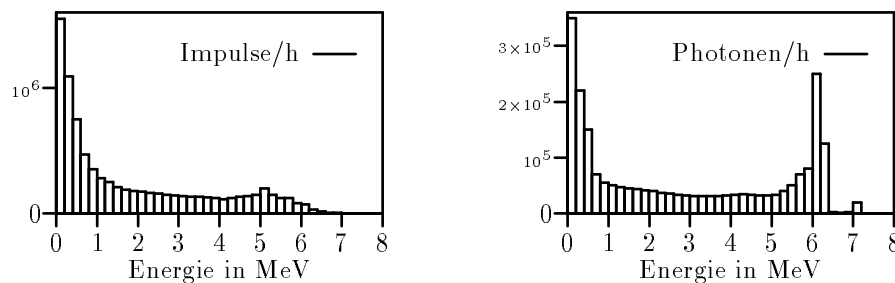
**Satz 2.2** *Der Operator  $A$  in der linearen Operatorgleichung (2.30) sei injektiv und habe keinen abgeschlossenen Bildraum, d.h., es gilt (2.33). Dann ist die Stabilitätsbedingung in Definition 2.3 verletzt und (2.30) inkorrekt nach Hadamard.*

Wir befassen uns nun mit typischen Beispielen, anhand derer stabile Situationen (2.32) und instabile Situationen (2.33) erläutert werden sollen.

**Beispiel 2.2** Ein inverses Problem aus dem Bereich des Strahlenschutzes besteht in der **Identifikation von Gammaspektren** (Photonenspektren) auf der Grundlage von gemessenen Impulsspektren zum Zwecke der Berechnung der Strahlendosis, die ein entsprechendes Objekt in einer betrachteten Zeit trifft. Typisch für solche Aufgaben ist die Tatsache, daß das zu identifizierende Spektrum nicht direkt beobachtbar ist, jedoch Wirkungen davon sehr wohl beobachtet (gemessen) werden können. Wir sprechen dann von indirekten Messungen, deren mathematische Interpretation die gewünschte Identifikation möglich machen soll. Teilt man den interessierenden Energiebereich  $[0, E_{max}]$  der Spektren in  $n$  gleichgroße Teilintervalle  $I_i = \left[ \frac{i-1}{n} E_{max}, \frac{i}{n} E_{max} \right]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ein, so wird der Vektor  $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)^T$  gesucht, dessen Komponenten  $\underline{x}_i$  den in einer festgelegten Meßzeit auf das Objekt treffenden Quantenfluß von Teilchen aus dem Energieintervall  $I_i$  charakterisieren. Mit Hilfe eines Detektors werden als Wirkungen des Quantenflusses für jedes Energieintervall elektrische Impulse  $\underline{y}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) gemessen und zu einem Vektor  $\underline{y} = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)^T \in \mathbb{R}^n$  zusammengefaßt. Der Vektor  $\underline{y}$  (Impulsspektrum) kann als eine Verfälschung der Originalinformation  $\underline{x}$  (Photonenspektrum) aufgefaßt werden, wobei sich die Verfälschungsmatrix

$$\underline{A} = (\underline{a}_{ji}) = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} & \cdots & \underline{a}_{1n} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} & \cdots & \underline{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{a}_{n1} & \underline{a}_{n2} & \cdots & \underline{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

aus Standardspektren zusammenstellen läßt. Bild 2.1 zeigt in Form von Streifendiagrammen mit  $n = 40$  Energieintervallen ein Beispiel eines solchen Spektrypaares.



**Bild 2.1** Gegenüberstellung von Impulsspektrum und Photonenspektrum

Das lineare Identifikationsproblem erhält als Spezialfall der Operatorgleichung (2.30) die Gestalt eines **linearen Gleichungssystems**

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{y} \quad (2.35)$$

mit  $n$  linearen Gleichungen in  $n$  Unbekannten. Die **quadratische Matrix**  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  repräsentiert hier den linearen Operator  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  aus Gleichung (2.30). Als Banachräume werden  $X = Y = \mathbb{R}^n$  mit einer speziellen **Vektornorm**  $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$  gewählt. Die Vektornormen  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$  kommen dabei aus der Familie der **p-Normen**

$$\|\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n} = \|\underline{x}\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |\underline{x}_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty), \quad (2.36)$$

deren wichtigster Vertreter, die Euklidische Norm mit  $p = 2$ , bereits in Formel (2.18) erwähnt wurde. Als Grenzfall für  $p = \infty$  tritt die **Maximumnorm**

$$\|\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n} = \|\underline{x}\|_{\infty} := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (2.37)$$

hinzu. Jeder dieser Vektornormen ist mittels

$$\|\underline{A}\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} := \sup_{\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|\underline{A}\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n}}$$

eine endliche **Matrixnorm** zugeordnet. Der durch die Matrix  $\underline{A}$  vertretene Operator  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist dann linear und beschränkt im Sinne von Definition 2.2, wobei die Operatornorm hier der Matrixnorm

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} = \|\underline{A}\|_{\mathbb{R}^{n \times n}}$$

entspricht. □

Wir betrachten nun die Frage nach der Korrektheit eines quadratischen linearen Gleichungssystems (2.35), wie es in Beispiel 2.2 auftritt. Dazu nutzen wir den folgenden Hilfssatz:

**Hilfssatz 2.2** *Jeder Teilraum des endlichdimensionalen Raumes  $\mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen.*

Folglich ist der zur Matrix  $\underline{A}$  gehörende Bildraum

$$R(\underline{A}) = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^n : \underline{y} = \underline{A}\underline{x}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

eine abgeschlossene Menge in  $\mathbb{R}^n$ , und wir haben die auf Stabilität führende Situation (2.32). Für eine **reguläre** Matrix mit von Null verschiedener Determinante

$$\det(\underline{A}) \neq 0 \quad (\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}) \quad (2.38)$$

liegt der Fall eines injektiven linearen Operators mit trivialem Nullraum

$$N(\underline{A}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{A}\underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{0}\}$$

und ebenfalls regulärer inverser Matrix  $\underline{A}^{-1}$  vor. Für jede rechte Seite  $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$  gibt es mit (2.38) eine eindeutig bestimmte Lösung

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{y} \quad (2.39)$$

von (2.35). Wegen Satz 2.1 erhält man:

**Folgerung 2.3** *Genügt das lineare Gleichungssystem (2.35) der Bedingung (2.38), so ist es korrekt nach Hadamard.*

Unter Verwendung von Vektor- und Matrixnormen kann man die wegen Folgerung 2.3 gesicherte Stabilität der Lösung des Gleichungssystems (2.35) sogar quantifizieren. Es sei  $\underline{y}_\delta$  eine Näherung für den Vektor  $\underline{y}$ , dann gilt mit  $\underline{x}_\delta = \underline{A}^{-1} \underline{y}_\delta$  die Abschätzung

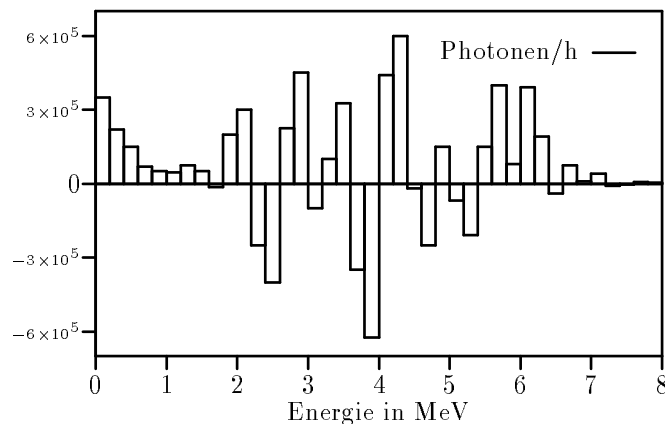
$$\|\underline{x} - \underline{x}_\delta\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\underline{A}^{-1}\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \|\underline{y} - \underline{y}_\delta\|_{\mathbb{R}^n} \quad (2.40)$$

für den absoluten Fehler der Lösung. Aus  $\|\underline{y}\|_{\mathbb{R}^n} = \|\underline{A}\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\underline{A}\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \|\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n}$  folgt für  $\underline{y} \neq \underline{0}$  die Beziehung  $\frac{1}{\|\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n}} \leq \|\underline{A}\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{1}{\|\underline{y}\|_{\mathbb{R}^n}}$  und nach Multiplikation mit (2.40) die Abschätzung

$$\frac{\|\underline{x} - \underline{x}_\delta\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n}} \leq \|\underline{A}\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \|\underline{A}^{-1}\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\|\underline{y} - \underline{y}_\delta\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\underline{y}\|_{\mathbb{R}^n}} = \text{cond}(A) \frac{\|\underline{y} - \underline{y}_\delta\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\underline{y}\|_{\mathbb{R}^n}}. \quad (2.41)$$

Die **Konditionszahl**  $\text{cond}(A) := \|\underline{A}\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \|\underline{A}^{-1}\|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \geq 1$  gibt an, um welchen Faktor der relative Fehler der Lösung höchstens größer ist als der relative Fehler der Eingangsdaten. Ein lineares Gleichungssystem (2.35) heißt **gutkonditioniert**, wenn die Konditionszahl  $\text{cond}(A)$  klein bleibt, ansonsten **schlechtkonditioniert**. Für lineare Operatorgleichungen in endlichdimensionalen Räumen, welche wegen Folgerung 2.3 die Stabilitätsbedingung erfüllen, kann man die Konditionszahl als Stabilitätsmaß verwenden. Von schlechtkonditionierten Systemen sprechen wir, wenn die Konditionszahl sehr große Werte annimmt, wobei die Grenze für diese Werte von der verwendeten Arithmetik abhängt und bis zu einem gewissen Grade subjektiv gewählt ist. Insofern kann man sich streiten, ob schlechtkonditionierte Aufgaben bei Konditionszahlen von  $10^6$  beginnen oder erst bei  $10^{10}$ . Im Falle schlechter Kondition ist zwar die Hadamardsche Stabilitätsbedingung für (2.35) erfüllt, die Lösung reagiert aber trotzdem sehr

sensibel auf Störungen in den Daten. Versucht man etwa in Beispiel 2.2 das in Bild 2.1 rechts dargestellte Photonenspektrum  $\underline{x}$  aus dem links dargestellten Impulsspektrum  $\underline{y}$  durch direkte Auswertung eines entsprechenden linearen Gleichungssystems (2.35) mit 40 Gleichungen in 40 Unbekannten über die Formel (2.39) zu erhalten, so ergeben sich aufgrund schlechter Kondition der Matrix  $\underline{A}$  **stark oszillierende Lösungen**, wie als Streifendiagramm in Bild 2.2 dargestellt.



**Bild 2.2** Stark oszillierende Lösung bei schlechter Kondition

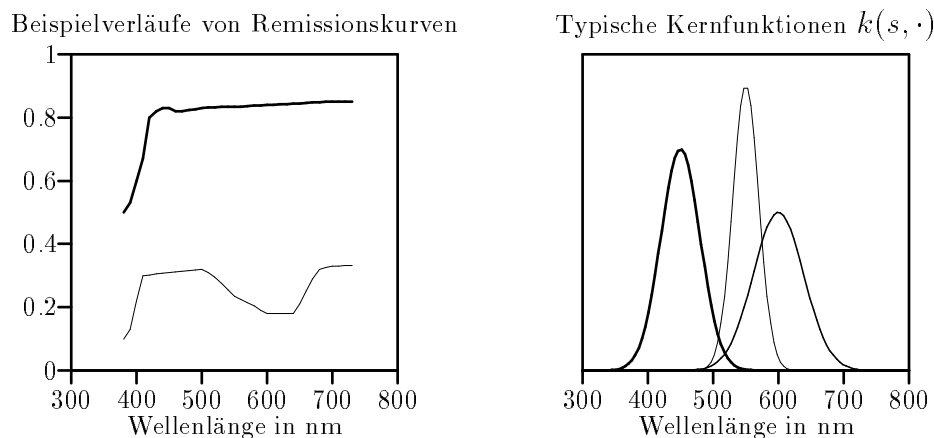
Für von vornherein positive Lösungskomponenten, wie hier die Photonenzahl, werden teilweise sehr große negative Werte angeboten. Solche Lösungen sind gänzlich unbrauchbar und werden bei physikalischer Interpretation sofort verworfen. Sollen praktische nützliche Näherungslösungen von derartigen schlecht-konditionierten Systemen im  $\mathbb{R}^n$  gefunden werden, so erfordert dies genau wie im Falle der Lösung von Problemen im unendlichdimensionalen Raum, welche die Hadamardsche Stabilitätsbedingung verletzen, den Einsatz von stabilisierenden Verfahren (Regularisierungsmethoden).

Im übrigen entstehen schlecht-konditionierte Gleichungssysteme im  $\mathbb{R}^n$  in natürlicher Weise, wenn in unendlichdimensionalen Räumen formulierte instabile Aufgaben auf der Basis einer  $n$ -dimensionalen Diskretisierung von Bild und Urbild durch endlichdimensionale Probleme angenähert werden und man dabei die Raumdimension  $n$  groß genug wählt.

Bei Verletzung der Bedingung (2.38) ist (2.35) inkorrekt nach Hadamard, denn Existenz- und Eindeutigkeitsbedingung sind beide verletzt. Wir werden aber in Kapitel 3 sehen, daß für lineare Operatorgleichungen im endlichdimensionalen Raum wenigstens die Stabilitätsbedingung (2.20) immer erfüllt ist.



**Beispiel 2.3** Bei der **Farbanalyse** von Objektproben tritt als inverses Problem die **Identifikation von Remissionskurven** auf der Grundlage der Messung von Integralen über diese Kurven auf. Die zu bestimmenden stetigen Remissionskurven  $x(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ), welche die Reflexionscharakteristik eines betrachteten Objekts beschreiben, stellen Materialfunktionen dar, die im Zusammenspiel mit dem Spektrum des verwendeten Lichts die Farbe der Probe ausmachen. Die Variable  $t$  kennzeichnet dabei die Wellenlänge in einem zum Bereich des sichtbaren Lichts gehörenden Spektralintervall  $[a, b]$ .



**Bild 2.3** Illustrationen zur Identifikation von Remissionskurven

In Bild 2.3 sind links zwei Beispiele für mögliche Remissionskurven dargestellt. Als Meßdaten kann man Photoströme  $y(s)$  verwenden, die in Photodioden eines Sensors auftreten, wobei der Variablen  $s$  als Definitionsbereich ein Intervall  $[c, d]$  der reellen Zahlen zugeordnet werde. Jedem Wert  $s$  aus diesem Intervall entspreche dabei eine spezielle Meßsituation, die durch Wahl von Parametern der Lichtquellen und verwendeten Photodioden variiert werden kann. Der Zusammenhang zwischen gesuchter Funktion  $x$  und gemessenen Daten  $y$  läßt sich mathematisch durch eine **lineare Fredholmsche Integralgleichung erster Art**

$$\int_a^b k(s, t) x(t) dt = y(s) \quad (c \leq s \leq d) \quad (2.42)$$

mit einer reellwertigen Kernfunktion  $k(s, t)$  ( $(s, t) \in [c, d] \times [a, b]$ ) beschreiben. Die Kernfunktion ist hier eine Apparatfunktion, die den Charakter der integralen Meßwerte aufzeigt. Für festes  $s$  sollte die Kernfunktion aus den Parametern

der jeweiligen Meßsituation ableitbar sein. Häufig sind solche Apparatfunktionen näherungsweise vom Typ einer Glockenkurve (s. Bild 2.3 rechts). Je deutlicher sich der Verlauf der Kernfunktionen  $k(s, \cdot)$  für verschiedene  $s$  unterscheidet, desto mehr Informationen über die gesuchte Funktion  $x$  enthalten die Daten  $y$ . Unter Verwendung der unendlichdimensionalen Banachräume  $X = C[a, b]$  mit der Norm (2.6) und  $Y = L^2(c, d)$  mit der Norm (2.7) kann die Integralgleichung (2.42) bei geeigneten Forderungen an das Verhalten der Kernfunktion  $k(s, t)$  als lineare Operatorgleichung (2.30) betrachtet werden. Wir wollen in diesem Zusammenhang die Bedingungen

$$k(s, \cdot) \in L^1(a, b) \quad \text{für alle } s \in [c, d] \quad \text{und} \quad \int_a^b |k(\cdot, t)| dt \in L^2(c, d) \quad (2.43)$$

voraussetzen. Dabei bezeichnet  $L^1(a, b)$  den Raum der absolut integrierbaren Funktionen über dem Intervall  $[a, b]$ . Die erste Forderung von (2.43) bedeutet also, daß für alle betrachteten  $s$  ein endliches Integral  $\int_a^b |k(s, t)| dt$  existiert. Für stetige Apparatfunktionen  $k(s, \cdot)$  ist diese Forderung stets erfüllt.  $\square$

Der Operator  $A : C[a, b] \rightarrow L^2(c, d)$  der direkten Aufgabe in Beispiel 2.3 ist ein **linearer Fredholmscher Integraloperator**. Er ist über die Beziehung

$$[Ax](s) := \int_a^b k(s, t) x(t) dt \quad (c \leq s \leq d) \quad (2.44)$$

definiert und bei Vorgabe einer Kernfunktion  $k$ , die den Bedingungen (2.43) genügt, ein beschränkter linearer Operator, denn es gilt die Ungleichung

$$\|Ax\|_{L^2(c, d)}^2 \leq \int_c^d \left( \int_a^b |k(s, t)| |x(t)| dt \right)^2 ds \leq \left[ \int_c^d \left( \int_a^b |k(s, t)| dt \right)^2 ds \right] \|x\|_{C[a, b]}^2, \quad (2.45)$$

und die Größe  $\int_c^d \left( \int_a^b |k(s, t)| dt \right)^2 ds$  ist wegen (2.43) endlich. Für die Operatornorm von  $A$  gilt wegen (2.45) die Abschätzung

$$\|A\|_{\mathcal{L}(C[a, b], L^2(c, d))} \leq \sqrt{\int_c^d \left( \int_a^b |k(s, t)| dt \right)^2 ds}.$$

Wir betrachten solche Kernfunktionen  $k$ , bei denen der Operator  $A$  injektiv wirkt und somit die Eindeutigkeitsbedingung von Definition 2.3 befriedigt. Unter dieser Voraussetzung werden wir hier zeigen, daß die Integralgleichung erster

Art (2.42) niemals die Stabilitätsbedingung erfüllen kann und folglich inkorrekt nach Hadamard ist. Im Kapitel 3 wird im Zusammenhang mit Hilberträumen und Eigenschaften der dort eingeführten Moore-Penrose-Inversen  $A^\dagger$  als Verallgemeinerung des inversen Operators  $A^{-1}$  deutlich werden, daß die Stabilitätsbedingung von (2.42) in der Regel auch im Falle nichtinjektiver Fredholmscher Integraloperatoren  $A$  verletzt ist. Die Instabilität ist dabei fundamental und nicht von der speziellen Gestalt des Kerns  $k$  abhängig. Sie beruht auf dem folgenden Hilfssatz.

**Hilfssatz 2.3** Falls die auf dem Rechteck  $[c, d] \times [a, b]$  definierte Funktion  $k(s, t)$  die Bedingungen (2.43) erfüllt, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b k(s, t) \sin nt \, dt = 0 \quad \text{für alle } s \in [c, d]$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d \left( \int_a^b k(s, t) \sin nt \, dt \right)^2 ds = 0.$$

Die erste Grenzwertbeziehung des Hilfssatzes findet man in der Literatur unter der Bezeichnung **Riemann-Lebesgue-Lemma** (s. [NATA61, S. 313]), während die zweite Grenzwertbeziehung mit (2.43) aus der ersten resultiert, wenn man das **Majorantenkriterium von Lebesgue** (s. [TTB95, S. 334]) anwendet. Für eine Folge stetiger Funktionen

$$x_n(t) = x_0(t) + \sin nt \quad (a \leq t \leq b; n = 1, 2, \dots) \quad (2.46)$$

gilt dann mit  $y_n = Ax_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $y_0 = Ax_0$  und  $A$  aus (2.44)

$$\|x_n - x_0\|_{C[a,b]} = 1, \quad \text{falls } n \geq \frac{\pi}{b-a},$$

aber

$$\|y_n - y_0\|_{L^2(c,d)} = \sqrt{\int_c^d \left( \int_a^b k(s, t) \sin nt \, dt \right)^2 ds} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Oszillationen der  $x_0$  überlagernden sinusförmigen Störung mit variabler Frequenz  $n$  und fester Amplitude 1 werden durch Anwendung des Operators  $A$  dermaßen geglättet, daß die Wirkung der Störung in der rechten Seite der Gleichung

(2.42) gemessen in der  $L^2$ -Norm für genügend große Frequenzen  $n$  beliebig klein wird. Der Operator  $A^{-1} : R(A) \subset L^2(c, d) \rightarrow C[a, b]$  ist folglich unbeschränkt und damit unstetig. Die in der obigen Betrachtung anhand von Sinus-Störungen illustrierte Instabilität der Integralgleichung (2.42), die als lineare Operatorgleichung (2.30) zwischen den unendlichdimensionalen Banachräumen  $X = C[a, b]$  und  $Y = L^2(c, d)$  wirkt, ist die Konsequenz aus einer Eigenschaft des Operators  $A$ , die wir als **Vollstetigkeit** bezeichnen werden und die uns stets auf nicht abgeschlossene Bildräume  $R(A) \neq \overline{R(A)}$  (s. (2.33)) führt. Die demonstrierte Instabilität auf der Grundlage von Sinus-Störungen ist im übrigen nicht etwa nur darauf zurückzuführen, daß die starke Maximumnorm zur Messung von Abweichungen in  $X$  verwendet wurde. Man rechnet leicht nach, daß für die Folge (2.46) die Grenzbeziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_{L^2(a,b)} = \sqrt{\frac{b-a}{2}} \neq 0$$

gilt. Dies macht die Instabilität der Integralgleichung (2.42) auch für das Raumpaar  $X = L^2(a, b)$  und  $Y = L^2(c, d)$  sichtbar.

Eine Teilmenge  $T$  ist im Banachraum  $X$  **beschränkt**, wenn die Normen aller Elemente von  $T$  durch eine Konstante gleichmäßig beschränkt sind. Zum anderen heißt eine Teilmenge  $S$  im Banachraum **relativ kompakt**, wenn man aus jeder unendlichen Folge von Elementen aus  $S$  eine konvergente Teilfolge auswählen kann. Ist eine solche relativ kompakte Teilmenge  $S$  zusätzlich abgeschlossen, so wird sie **kompakt** genannt.

**Definition 2.6** *Ein linearer Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , der zwischen den Banachräumen  $X$  und  $Y$  wirkt, heißt **v o l l s t e t i g**, wenn er jede in  $X$  beschränkte Teilmenge  $T \subset X$  in eine relativ kompakte Teilmenge  $AT = \{y \in Y : y = Ax, x \in T\}$  von  $Y$  abbildet.*

Für vollstetige lineare Operatoren gilt der folgende Satz:

**Satz 2.3** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  ein injektiver und vollstetiger linearer Operator, der zwischen den unendlichdimensionalen Banachräumen  $X$  und  $Y$  wirkt. Dann ist der unendlichdimensionale Bildraum  $R(A)$  des Operators  $A$  nicht abgeschlossen, d.h., es gilt die Beziehung (2.33). Folglich ist der zu  $A$  inverse Operator  $A^{-1} : R(A) \subset Y \rightarrow X$  unbeschränkt.*

Wäre nämlich für einen injektiven und vollstetigen linearen Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  mit  $\dim(X) = \infty$  die Beziehung  $R(A) = \overline{R(A)}$  erfüllt oder da-

mit gleichbedeutend der inverse Operator  $A^{-1} : R(A) \subseteq Y \rightarrow X$  beschränkt, dann müßte eine Ungleichung (2.31) gelten. In jedem unendlichdimensionalen Banachraum existiert aber eine beschränkte Teilmenge  $T$ , die nicht relativ kompakt ist. Es gibt dann eine unendliche Folge  $\{x_n\} \subset T$ , die keine konvergente Teilfolge und damit auch keine Cauchyfolge als Teilfolge besitzt. Jedoch ist wegen der Vollstetigkeit von  $A$  die Bildmenge  $AT$  relativ kompakt. Folglich besitzt die Folge  $\{Ax_n\} \subset AT$  eine konvergente Teilfolge, die dann auch Cauchyfolge ist. Diese Situation widerspricht der Ungleichung (2.31) (s. auch Formel (2.34)) und ist somit ausgeschlossen.

Wegen Satz 2.2 ergibt sich aus Satz 2.3 sofort:

**Folgerung 2.4** *Der Banachraum  $X$  in der linearen Operatorgleichung (2.30) sei unendlichdimensional. Weiter sei der zugehörige Operator  $A$  injektiv und vollstetig. Dann ist die Stabilitätsbedingung von Definition 2.3 verletzt und die lineare Operatorgleichung (2.30) inkorrekt nach Hadamard.*

Wir wenden Satz 2.3 und Folgerung 2.4 nun auf die beiden Varianten des linearen Fredholmschen Integraloperators (2.44) an, bei denen entweder Mengen stetiger Funktionen mit der Maximumnorm beide Räume  $X$  und  $Y$  kennzeichnen oder sowohl für  $X$  als auch für  $Y$  quadratisch integrierbare Funktionen mit  $L^2$ -Normen betrachtet werden.

**Hilfssatz 2.4** *Der in Formel (2.44) definierte lineare Fredholmsche Integraloperator  $A : X \rightarrow Y$  mit stetigem Kern  $k \in C([c, d] \times [a, b])$  ist im Raumpaar  $X = C[a, b]$  und  $Y = C[c, d]$  ein vollstetiger Operator. Ebenso ist der Operator (2.44) mit quadratisch integrierbarem Kern  $k \in L^2((c, d) \times (a, b))$  im Raumpaar  $X = L^2(a, b)$  und  $Y = L^2(c, d)$  vollstetig.*

Dabei bezeichnen  $C([c, d] \times [a, b])$  den Banachraum der auf dem Rechteck

$$[c, d] \times [a, b] := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : c \leq s \leq d, a \leq t \leq b\}$$

stetigen Funktionen  $k(s, t)$  zweier reeller Veränderlicher mit der Maximumnorm

$$\|k\|_{C([c, d] \times [a, b])} := \max_{(s, t) \in [c, d] \times [a, b]} |k(s, t)| < \infty \quad (2.47)$$

und  $L^2((c, d) \times (a, b))$  den Hilbertraum der auf diesem Rechteck quadratisch integrierbaren Funktionen  $k(s, t)$  mit

$$\|k\|_{L^2((c, d) \times (a, b))} := \sqrt{\int_c^d \int_a^b (k(s, t))^2 dt ds} < \infty. \quad (2.48)$$

Als Resümee der oben gemachten Überlegungen läßt sich ableiten, daß lineare Fredholmsche Integralgleichungen erster Art (2.42) in Paaren  $X$  und  $Y$  stetiger Funktionen sowie in Paaren  $X$  und  $Y$  quadratisch integrierbarer Funktionen inkorrekt nach Hadamard sind. Sie erfordern dementsprechende Maßnahmen, um eine stabile näherungsweise Lösung dieser Gleichungen zu sichern. Im Gegensatz dazu sind **lineare Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art**

$$x(s) + \int_a^b k(s,t) x(t) dt = y(s) \quad (c \leq s \leq d) \quad (2.49)$$

(zur Theorie s. [DRKU96]) als Operatorgleichungen der Form

$$x + Ax = y, \quad x \in X, y \in Y, A \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ vollstetig mit } \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < 1 \quad (2.50)$$

in diesen Räumen stets korrekt nach Hadamard. Bei derartigen Integralgleichungen zweiter Art existiert für alle  $y \in Y$  stets eine eindeutig bestimmte Lösung  $x \in X$  von (2.49) bzw. (2.50), die stetig von der rechten Seite  $y$  abhängt. Leider sind lineare inverse Probleme praktisch nie als Integralgleichungen zweiter Art (2.49) formulierbar. Die Identifikation von Funktionen aus Messungen integraler Werte der gesuchten Funktion führt hingegen regelmäßig auf Integralgleichungen erster Art (2.42), so daß die Inkorrektheit für diese Klasse praktischer Aufgabenstellungen eine typische Eigenschaft ist.

#### 2.2.4 Lokale Inkorrektheit bei nichtlinearen Operatorgleichungen

Hadamards klassische Definition (s. Definition 2.3) der Korrektheit von Operatorgleichungen, die Identifikationsprobleme beschreiben, ist **globaler** Natur, d.h., es werden Bedingungen an den Operator  $F$  der direkten Aufgabe gestellt, die den gesamten Definitionsbereich  $D$  des Operators betreffen. Eine besondere Bedeutung besitzt diese Definition daher für die im Abschnitt 2.2.3 ausführlich behandelte Klasse von unrestringierten linearen Identifikationsproblemen. Bei solchen Problemen ist der zugehörige Operator  $A$  der direkten Aufgabe aufgrund seiner Linearität ebenfalls von globaler Natur und mit gleichartigen Eigenschaften auf dem gesamten Raum ausgestattet. Betrachtet man aber nichtlineare Identifikationsprobleme, die sich in Form einer **nichtlinearen Operatorgleichung**

$$F(x) = y, \quad x \in D \subseteq X, \quad y \in Y \quad (2.51)$$

in den Banachräumen  $X$  und  $Y$  darstellen lassen, so ist die Lösbarkeit von (2.51) im allgemeinen nur für speziell gestaltete rechte Seiten  $y \in Y$  zu erwarten. Häufig treten, wie schon bei der quadratischen Gleichung im Raum der

reellen Zahlen, verschiedene Lösungswege auf, die einer globalen Forderung nach eindeutiger Lösbarkeit von (2.51) auf dem gesamten Definitionsbereich  $D$  wenig Sinn geben. Vielmehr bietet sich eine **lokale** Analyse des Verhaltens von (2.51) an, welche insbesondere der stabilen Abhängigkeit der Lösung von der rechten Seite  $y$  entsprechende Aufmerksamkeit schenkt. Zu diesem Zweck werden die Durchschnittsmengen

$$\bar{B}_r^D(x_0) := \{x \in D : \|x - x_0\|_X \leq r\} \quad (2.52)$$

des Definitionsbereichs  $D$  mit zu hinreichend kleinen Radien  $r > 0$  gehörigen abgeschlossenen Kugeln um einen Lösungspunkt  $x_0 \in D$  herum betrachtet, wobei

$$F(x_0) = y_0, \quad x_0 \in D, \quad y_0 \in Y \quad (2.53)$$

gelte.

**Definition 2.7** Die Operatorgleichung (2.51) heißt in  $x_0$  *l o k a l i n k o r r e k t*, wenn für beliebig kleine Radien  $r > 0$  jeweils eine nicht gegen  $x_0$  konvergierende unendliche Folge  $\{x_n\}$  von Elementen aus der Kugel  $\bar{B}_r^D(x_0)$  existiert, deren Bildfolge  $\{F(x_n)\} \subset Y$  gegen  $F(x_0)$  konvergiert, d.h., für diese Folgen gilt

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \text{ in } Y, \quad \text{aber } x_n \not\rightarrow x_0 \text{ in } X \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (2.54)$$

Andernfalls heißt (2.51) in  $x_0$  *l o k a l k o r r e k t*.

Offensichtlich impliziert die **lokale Inkorrektheit** von (2.51) in  $x_0$  zu jedem vorgegebenen Radius  $r > 0$  die Existenz eines kleineren Radius  $\tilde{r}$  mit  $0 < \tilde{r} < r$ , so daß der Ringbereich

$$\bar{B}_r^D(x_0) \setminus \bar{B}_{\tilde{r}}^D(x_0) = \{x \in D : 0 < \tilde{r} < \|x - x_0\|_X \leq r\}$$

eine unendliche Folge  $\{x_n\}$  mit der Konvergenzeigenschaft  $F(x_n) \xrightarrow{Y} F(x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$  enthält.

Andererseits überlegt man sich leicht, daß bei **lokaler Korrektheit** der nicht-linearen Operatorgleichung (2.51) in  $x_0$  ein fester Radius  $r_0 > 0$  existieren muß, so daß für eine Folge  $\{x_n\} \subset \bar{B}_{r_0}^D(x_0)$  die Konvergenz der Bildfolge  $\{F(x_n)\}$  gegen  $F(x_0)$  in  $Y$  auch die Konvergenz der Urbildfolge  $\{x_n\}$  gegen  $x_0$  in  $X$  nach sich zieht, d.h., es gilt die Implikation

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \text{ in } Y, \quad x_n \in \bar{B}_{r_0}^D(x_0) \implies x_n \rightarrow x_0 \text{ in } X. \quad (2.55)$$

Eine notwendige Bedingung für die lokale Korrektheit von (2.51) in  $x_0$  ist wegen (2.55) die Forderung, daß  $x_0$  ein **isolierter Punkt** der Lösungsmenge

$$U(y_0) = \{x \in D : F(x) = y_0\}$$

ist und somit ein Kugelradius  $r_0 > 0$  mit

$$U(y_0) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0) = \{x_0\} \quad (2.56)$$

existiert. Die Bedingung (2.56) ist allerdings wesentlich weniger einschränkend als die Forderung nach der Injektivität des Operators  $F$  auf einer kleinen Kugel um  $x_0$ , denn in (2.56) wird die lokale Eindeutigkeit der Lösung nur für die exakte rechte Seite  $y_0$  gefordert.

Wir werden uns im weiteren davon überzeugen, daß die Bedingung (2.55) einer **lokalen Variante der Hadamardschen Stabilitätsbedingung** entspricht, die im Falle nichtinjektiver Operatoren  $F$  global in der Konvergenzbeziehung (2.20) zum Ausdruck kommt. Es sei (2.51) in  $x_0$  lokal korrekt und beschreibe  $\{y_n\} \subset Y$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$  eine Folge von Näherungselementen der rechten Seite  $y_0$ , deren Urbildmengen

$$U(y_n) = \{x \in D : F(x) = y_n\}$$

der Bedingung

$$U(y_n) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0) \neq \emptyset \quad (\text{leere Menge})$$

genügen. Dann existieren nichtnegative reelle Zahlen

$$f_n := \sup_{x_n \in U(y_n) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0)} \|x_n - x_0\|_X \leq r_0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

wobei wegen (2.56) auch

$$f_n = \sup_{x_n \in U(y_n) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0)} \inf_{x \in U(y_0) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0)} \|x_n - x\|_X$$

gilt. Für alle positiven  $n$  gibt es dann ein Element  $x_n^* \in U(y_n) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0)$  mit  $\|x_n^* - x_0\|_X \geq f_n - \frac{1}{n}$ . Daraus folgt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n^* - x_0\|_X \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Nun ist aber wegen (2.55)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^* - x_0\|_X = 0$  und somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ . Wir erhalten also eine lokale Variante von (2.20) in der Form

$$y_n \rightarrow y_0 \quad \text{in } Y \quad \implies \quad \text{qdist}(U(y_n) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0), U(y_0) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0)) \rightarrow 0. \quad (2.57)$$

Diese Überlegungen lassen sich zusammenfassend in folgendem Satz formulieren:



**Satz 2.4** Die zu einer rechten Seite  $y_0 \in Y$  gehörige Lösung  $x_0 \in D \subset X$  einer in  $x_0$  nach Definition 2.7 lokal korrekten Operatorgleichung (2.51) ist eine isolierte Lösung. Die Operatorgleichung ist darüber hinaus lokal stabil im Sinne von Beziehung (2.57).

Die lokale Inkorrektheit ist eine für die Lösungsrekonstruktion nachteilige Eigenschaft, die allerdings bei nichtlinearen Identifikationsproblemen häufig zu finden ist. Falls nämlich die Operatorgleichung (2.51) in  $x_0$  lokal inkorrekt ist, so gibt es keinen systematischen Zugang, um die tatsächliche Lösung  $x_0$  beliebig genau anzunähern, selbst wenn Daten  $y_n$  der rechten Seite  $y_0$  mit beliebig kleinen Störungen zur Verfügung gestellt werden, d.h. wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$  gilt. Wir wollen exemplarisch einige Typen nichtlinearer Identifikationsprobleme vorstellen, die sich als lokal inkorrekt erweisen.

**Beispiel 2.4** Ein fundamentales Prinzip der Kinetik chemischer Reaktionen ist die Tatsache, daß sich Konzentrationsänderungen eines Stoffes zu allen betrachteten Zeiten  $t \geq 0$  proportional zur aktuellen Konzentration  $y(t)$  desselben vollziehen. Geht man von einer zeitlich variablen Änderungsrate  $x(t)$  der Konzentration aus, so gilt die **gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung**

$$y'(t) = x(t)y(t) \quad (2.58)$$

mit der **Anfangsbedingung**

$$y(0) = c_0, \quad (2.59)$$

welche die Anfangskonzentration  $c_0 > 0$  enthält. Die direkte Aufgabe besteht in der Bestimmung des zeitlichen Konzentrationsverlaufs  $y(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ), wenn der Anfangswert  $c_0$  und die Parameterfunktion  $x(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) gegeben sind. Der nichtlineare Operator  $F$  der direkten Aufgabe läßt sich dann unter Verwendung der Exponentialfunktion  $\exp(z) = e^z$  in der Form

$$[F(x)](s) = c_0 \exp \left( \int_0^s x(t) dt \right) \quad (0 \leq s \leq T) \quad (2.60)$$

darstellen. Die nichtlineare Operatorgleichung (2.51) mit diesem Operator  $F$  beschreibt die inverse Aufgabe der **Identifikation der variablen Rate**  $x(t)$  auf der Grundlage von Konzentrationsmessungen  $y(t)$  im Zeitintervall  $t \in [0, T]$ .  $\square$

**Beispiel 2.5** Wir betrachten ein auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$  konzentriertes örtlich eindimensionales Wärmeleitproblem, bei welchem  $x(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) einen

zeitlich veränderlichen Wärmeleitkoeffizienten bezeichnet. Die **partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung** zur Beschreibung des Wärmeleitvorgangs habe die spezielle Gestalt

$$\frac{\partial u(\kappa, t)}{\partial t} = x(t) \frac{\partial^2 u(\kappa, t)}{\partial \kappa^2} \quad (0 < \kappa < 1, 0 < t \leq T), \quad (2.61)$$

wobei  $u(\kappa, t)$  ( $0 \leq \kappa \leq 1, 0 \leq t \leq T$ ) das Temperaturfeld beschreibe und eine konkrete **Anfangsbedingung**

$$u(\kappa, 0) = \sin \pi \kappa \quad (0 \leq \kappa \leq 1) \quad (2.62)$$

sowie **homogene Randbedingungen**

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2.63)$$

vorausgesetzt werden. Beobachtbar sei z.B. durch Messung mit Hilfe eines Sensors im Mittelpunkt des Ortsintervalls das zeitliche Verhalten

$$y(t) := u\left(\frac{1}{2}, t\right) \quad (0 \leq t \leq T)$$

der Temperatur. Dann wird der Operator  $F$  der direkten Aufgabe durch die nichtlineare Abbildung  $x(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ )  $\mapsto$   $y(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) bestimmt. Unter Beachtung der Anfangsbedingung (2.62) und der Randbedingungen (2.63) liefert die **Methode der Trennung der Veränderlichen** (s. Aufgabe 2.2) für die partielle Differentialgleichung (2.61) die Darstellung

$$u(\kappa, t) = \sin \pi \kappa \exp\left(-\pi^2 \int_0^t x(\eta) d\eta\right) \quad (0 \leq \kappa \leq 1, 0 \leq t \leq T) \quad (2.64)$$

und damit

$$[F(x)](s) = \exp\left(-\pi^2 \int_0^s x(t) dt\right) \quad (0 \leq s \leq T). \quad (2.65)$$

Die inverse Aufgabe der **Identifikation des Wärmeleitkoeffizienten als Funktion der Zeit** auf der Grundlage von zeitabhängigen Temperaturmessungen, die mit einem einzelnen Sensor in der Intervallmitte gewonnen wurden, entspricht dann der Lösung einer nichtlinearen Operatorgleichung (2.51) mit dem in Formel (2.65) eingeführten Operator  $F$ .  $\square$

Die beiden letzten Beispiele führen auf nichtlineare Operatoren der Gestalt

$$[F(x)](s) = c_0 \exp \left( c_1 \int_0^s x(t) dt \right) \quad (0 \leq s \leq T) \quad (2.66)$$

mit von Null verschiedenen reellen Konstanten  $c_0$  und  $c_1$  (s. Aufgabe 2.3). Betrachtet man das Raumpaar  $X = Y = L^2(0, T)$ , so ist der Operator  $F : X \rightarrow Y$  jeweils mit  $D = X$  auf dem gesamten Raum  $X$  definiert und stetig. Gleiches läßt sich für den entsprechenden Operator  $F$  zum Raumpaar  $X = Y = C[0, T]$  aussagen. Leider muß man feststellen, daß nichtlineare Gleichungen (2.51) mit Operatoren (2.66) in solchen Raumpaaren in allen Punkten  $x_0 \in X$  **lokal inkorrekt** im Sinne von Definition 2.7 sind. Wir verdeutlichen uns dies bei Betrachtung des Raumpaares  $X = Y = C[0, T]$  am Spezialfall  $c_0 = c_1 = 1$ ,  $x_0(t) = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ) mit  $[F(x_0)](s) = 1$  ( $0 \leq s \leq T$ ). Dann gibt es für beliebig kleine Radien  $r > 0$  Folgen stetiger Funktionen

$$x_n(t) = \frac{r \cos nt}{2 \left( 1 + \frac{r \sin nt}{2n} \right)} \quad (0 \leq t \leq T)$$

mit

$$\|x_n\|_{C[0, T]} \leq \frac{r}{2 \left( 1 - \frac{r}{2n} \right)} \leq r \quad \text{und} \quad x_n \in \bar{B}_r^D(x_0) \quad \text{für genügend großes } n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{C[0, T]} = \frac{r}{2} \quad \text{und folglich} \quad x_n \not\rightarrow x_0 \quad \text{in } C[0, T] \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Folge der Bildfunktionen

$$[F(x_n)](s) = 1 + \frac{r \sin ns}{2n} \quad (0 \leq s \leq T)$$

konvergiert dagegen in  $C[0, T]$  gegen  $F(x_0)$ , denn es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - F(x_0)\|_{C[0, T]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{2n} = 0.$$

Dies bedeutet aber gerade die lokale Inkorrektheit der zugehörigen Operatorgleichung (2.51) in  $x_0$ .

**Beispiel 2.6** Es ist wohlbekannt, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte  $y$  einer Summe von zwei stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen mit den Wahrscheinlichkeitsdichten  $u$  und  $v$  über die **Faltung**

$$y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s-t)v(t) dt \quad (-\infty < s < \infty)$$

berechenbar ist. Gilt speziell  $u(t) = v(t) = 0$  für  $t < 0$  und  $x(t) := u(t) = v(t)$ , d.h., die beiden summierten Zufallsgrößen sind identisch verteilt und nehmen mit Wahrscheinlichkeit Eins positive Werte an, dann haben wir  $y(s) = 0$  für  $s < 0$  und

$$y(s) = \int_0^s x(s-t)x(t) dt \quad (0 \leq s < \infty).$$

Es sei nun die Funktion  $y(s)$  im Einheitsintervall  $s \in [0, 1]$  bekannt. Davon ausgehend wollen wir die Dichtefunktion  $x(t)$  in eben diesem Intervall rekonstruieren. Dies ist ein nichtlineares Identifikationsproblem, welches durch die sogenannte **Selbstfaltungsgleichung**, eine nichtlineare Operatorgleichung (2.51) mit dem Selbstfaltungsoperator

$$[F(x)](s) = \int_0^s x(s-t)x(t) dt \quad (0 \leq s \leq 1), \quad (2.67)$$

charakterisiert wird. Formel (2.67) liefert für  $x \in L^2(0, 1)$  immer eine stetige Bildfunktion  $[F(x)](s)$  ( $0 \leq s \leq 1$ ). Wir betrachten im weiteren die Raumsituation

$$F : D \subset L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$$

mit dem Definitionsbereich

$$D := \left\{ x \in L^2(0, 1) : x(t) \geq 0 \text{ für fast alle } t \in [0, 1] \right\} \quad (2.68)$$

der auf dem Intervall  $[0, 1]$  fast überall, d.h. höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Lebesguemaß Null, nichtnegativen quadratisch integrierbaren Funktionen. Unter diesen Umständen ist die Selbstfaltungsgleichung in jedem Punkt  $x_0 \in D$  **lokal inkorrekt**, denn es gibt für alle  $r > 0$  eine Folge

$$x_n(t) = \begin{cases} x_0(t) & (0 \leq t \leq 1 - 1/n) \\ x_0(t) + r\sqrt{n} & (1 - 1/n < t \leq 1) \end{cases} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

mit  $\|x_n - x_0\|_{L^2(0,1)} = r$ ,  $x_n \in \bar{B}_r^D(x_0)$  und  $x_n \not\rightarrow x_0$  in  $L^2(0, 1)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Weiter ist

$$[F(x_n)](s) - [F(x_0)](s) = \begin{cases} 0 & (0 \leq s \leq 1 - 1/n) \\ 2r\sqrt{n} \int_0^{s-(1-1/n)} x_0(t) dt & (1 - 1/n < s \leq 1) \end{cases},$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|F(x_n) - F(x_0)\|_{L^2(0,1)} \leq 2r \int_0^{1/n} x_0(t) dt.$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für Integrale ergibt dann die Grenzbeziehung

$$\|F(x_n) - F(x_0)\|_{L^2(0,1)} \leq 2r \sqrt{\int_0^{1/n} 1 dt} \sqrt{\int_0^{1/n} x_0^2(t) dt} \leq 2r \frac{1}{\sqrt{n}} \|x_0\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

welche die lokale Inkorrektheit offensichtlich werden läßt. Eine Modifikation des Selbstfaltungsproblems wird auch in Aufgabe 2.4 behandelt.  $\square$

## 2.3 Was nützen Zusatzinformationen?

Das in Abschnitt 2.2 behandelte Phänomen der Inkorrektheit von Identifikationsproblemen kann ganz allgemein dazu führen, daß die zu identifizierenden Parameter und Parameterfunktionen als Lösungen nichtlinearer Operatorgleichungen (2.9) bzw. linearer Operatorgleichungen (2.10) erstens nicht in eindeutiger Weise bestimmt und zweitens aufgrund instabilen Lösungsverhaltens trotz kleiner Störungen in den Eingangsdaten mit signifikanten Fehlern behaftet sind. Ein entscheidendes Mittel zum Überwinden der Inkorrektheit oder wenigstens zur Reduktion negativer Auswirkungen der Inkorrektheit auf den Lösungsprozeß inverser Aufgaben liegt in der geschickten Einbeziehung von **Zusatzinformationen** über den Vorgang der Datengewinnung und über die erwarteten Lösungen selbst, die manchmal auch als **Apriori-Informationen** bezeichnet werden. Durch Einsatz solcher Zusatzinformationen besteht eine Chance, die informationsvernichtende Wirkung des glättenden Operators der direkten Aufgabe teilweise zu kompensieren.

### 2.3.1 Objektive und subjektive Apriori-Informationen

Unter Zusatzinformationen in bezug auf die Datenfehler oder Störungen in der rechten Seite der Operatorgleichungen (2.9) bzw. (2.10) versteht man zusätzliche Angaben über den Charakter der tatsächlich verfügbaren Näherung  $y_\delta$  zur exakten rechten Seite  $y \in Y$  einer solchen Operatorgleichung. Man unterscheidet hier **deterministische** und **stochastische** Zusatzinformationen über den Fehler (Meßfehler, Beobachtungsfehler oder anderweitiger Datenfehler) der rechten Seite. Ist z.B.  $y$  eine auf dem Intervall  $[c, d]$  definierte reelle Funktion aus dem Funktionenraum  $Y$  (Banachraum), so stellen bei Vorgabe einer Fehlerschranke  $\delta > 0$  die schon in Formel (2.11) erwähnte Beschränkung der Fehlernorm

$$\|y_\delta - y\|_Y \leq \delta \tag{2.69}$$

oder die punktweise Beschränkung des Fehlers

$$|y_\delta(s) - y(s)| \leq \delta \quad \text{für alle } s \in [c, d] \quad (2.70)$$

deterministische Zusatzinformationen über die Eingangsdaten dar.

Ist  $Y$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum, wobei anstelle des exakten Vektors  $\underline{y} = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)^T \in \mathbb{R}^n$  der rechten Seite eines linearen Gleichungssystems (2.35) nur ein gestörter Datenvektor

$$\underline{z} = \underline{y} + \underline{\varepsilon} \quad (2.71)$$

mit der vektoriellen Datenstörung  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T \in \mathbb{R}^n$  bekannt sei, so stellt

$$\underline{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \underline{C}) \quad (2.72)$$

eine häufig verwendete stochastische Zusatzinformation über die Eingangsdaten dar. Die Darstellung (2.72) bedeutet, daß kein systematischer Beobachtungsfehler vorliegt und der Fehlervektor  $\underline{\varepsilon}$  Realisierung eines **normalverteilten**  $n$ -dimensionalen **zufälligen Vektors** mit **Erwartungswertvektor**  $\mathbf{E} \underline{\varepsilon} = \underline{0}$  und **Kovarianzmatrix**  $\underline{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist. Die Matrix  $\underline{C}$  muß als Kovarianzmatrix  $\underline{C} = \mathbf{Cov} \underline{\varepsilon} = \mathbf{E} \underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^T$  symmetrisch und positiv semidefinit sein, d.h., wir haben  $\underline{C} = \underline{C}^T$ , und alle Eigenwerte der Matrix  $\underline{C}$  sind reell und nichtnegativ. In vielen Fällen gelingt es, den Meßvorgang zur Datengewinnung so zu gestalten, daß die einzelnen Meßkanäle sich in ihrem zufälligen Fehlerverhalten nicht beeinflussen und eine einheitliche **Streuung**  $\sigma^2$  besitzen. Das führt auf eine Diagonalmatrix  $\underline{C} = \sigma^2 \underline{I} = \text{diag}(\sigma^2, \dots, \sigma^2)$ , wobei hier  $\underline{I}$  die Einheitsmatrix der Dimension  $n$  bezeichnet. Die daraus resultierende Modellannahme

$$\underline{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \sigma^2 \underline{I}) \quad (2.73)$$

wird auch manchmal **weißes Rauschen** des Datenfehlers genannt.

Zusatzinformationen über die Eingangsdaten werden im allgemeinen genutzt, um nur solche Elemente  $x \in X$  als mögliche Lösungen des inversen Problems zuzulassen, die unter Berücksichtigung des Operators der direkten Aufgabe zu den Daten passen oder in einem gewissen Sinne mit den Daten kompatibel sind. Verwendet man die deterministische Zusatzinformation (2.69), so kann für die Operatorgleichung (2.9) die Kompatibilität des Elementes  $x$  mit der Beobachtung  $y_\delta$  vorzugsweise die Erfüllung der Ungleichung

$$\|F(x) - y_\delta\|_Y \leq \delta \quad (2.74)$$

bedeuten. Andererseits lassen stochastische Zusatzinformationen der Gestalt (2.73) für die rechte Seite eines linearen Gleichungssystems (2.35) Vektoren  $\underline{x}$  als

kompatibel mit den Daten  $\underline{z}$  aus (2.71) erscheinen, wenn eine unter Verwendung der Euklidischen Norm  $\|\cdot\|_2$  geschriebene Gleichung

$$\|\underline{Ax} - \underline{z}\|_2^2 = fn\sigma^2 \quad (2.75)$$

erfüllt ist, wobei sich die rechte Seite der Gleichung als Produkt des Fehlererwartungswertes  $\mathbf{E}\|\underline{\varepsilon}\|_2^2 = n\sigma^2$  mit einem Gleitfaktor  $f \in [f_{min}, f_{max}]$  ergibt. Einige Autoren empfehlen aus ihren Erfahrungen heraus die Werte  $f_{min} = 0.7$  und  $f_{max} = 1$  als Intervallgrenzen für diesen Gleitfaktor.

Da es meist noch zu viele Elemente  $x \in X$  gibt, die mit den Eingangsdaten bei Berücksichtigung deterministischer oder stochastischer Zusatzinformationen über den Meßvorgang kompatibel sind, ist es zweckmäßig, auch vorhandene Informationen über die zu erwartende Lösung  $x$  einer ein Identifikationsproblem beschreibenden Operatorgleichung einfließen zu lassen. Wir unterscheiden dabei **objektive Apriori-Informationen**, also Zusatzinformationen über die Lösung des inversen Problems, die sich aus physikalisch-technischem Hintergrundwissen ergeben und die damit unumstößlich sind, sowie **subjektive Apriori-Informationen**. Letztere bringen unsere mathematisch formulierten subjektiven Erwartungen an die Lösung zum Ausdruck.

Die objektiven Apriori-Informationen lassen sich in der Regel bei der Formulierung des Definitionsbereichs  $D$  der Operatoren  $F$  und  $A$  in die Gleichungen (2.9) bzw. (2.10) und damit in das mathematische Modell einbringen. Als Beispiele objektiver Zusatzinformationen wurden bereits im Abschnitt 2.1.3 die Normbeschränkung (2.14) sowie die Nichtnegativität, Monotonie und Konvexität stetiger Funktionen (2.15) – (2.17) genannt. In der praktischen Anwendung spielen solche objektiven Apriori-Informationen die wichtigste Rolle, die auf eine **abgeschlossene** und **konvexe** Menge  $D$  als Definitionsbereich der Operatorgleichung führen. Dabei wird eine Menge  $D$  im Banachraum  $X$  konvex genannt, wenn für zwei beliebige Elemente  $x_1, x_2 \in D$  und beliebiges  $\lambda \in [0, 1]$  auch  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in D$  gilt, d.h. alle Punkte auf der Verbindungsstrecke zwischen  $x_1$  und  $x_2$  selbst in der Menge  $D$  liegen.

Genügen die objektiven Zusatzinformationen über die Lösung noch nicht, um die Inkorrektheit einer inversen Aufgabe zu erzwingen, so kommt man nicht umhin, auch subjektive Zusatzinformationen ergänzend heranzuziehen. Unter allen mit den Eingangsdaten verträglichen Elementen  $x \in D$  werden dann solche als Lösung der inversen Aufgabe ausgewählt, die ein **Sympathiefunktional**  $\Omega : D \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$  minimieren:

$$\Omega(x) = \min!, \quad x \in D \subseteq X \quad \text{und} \quad x \text{ datenkompatibel.} \quad (2.76)$$

Die **Datenkompatibilität** kann dabei zum Beispiel im Sinne einer der Beziehungen (2.74) oder (2.75) verstanden werden. Das Sympathiefunktional wird so

konstruiert, daß Elementen  $x$ , die den Erwartungen an die Lösung der Aufgabe gut entsprechen, kleine Werte  $\Omega(x)$  zugeordnet werden, während unsympathische Elemente  $x$  zu großen Werten  $\Omega(x)$  gehören.

Orientiert man sich vorzugsweise an Elementen  $x$ , die möglichst wenig von einem Referenzelement  $x^*$  abweichen, so ist  $\Omega(x) = \|x - x^*\|_X$  bzw. in Hilberträumen  $X$  üblicherweise

$$\Omega(x) = \|x - x^*\|_X^2 \quad (2.77)$$

als Sympathiefunktional geeignet (s. auch Definition 2.4 in Abschn. 2.2.1). Mit  $x^* = 0$  wird dabei speziell auf Elemente mit möglichst kleiner Norm zurückgegriffen. Für Räume  $X$  glatter Funktionen  $x(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) kommt häufig das Sympathiefunktional

$$\Omega(x) = \|x'\|_{L^2(a,b)}^2 = \int_a^b (x'(t))^2 dt \quad (2.78)$$

zur Anwendung. Dahinter steckt der Gedanke, daß wenig schwankende Funktionen  $x$  als Lösung einer inversen Aufgabe gegenüber stark oszillierenden Lösungen in der Regel bevorzugt werden. Eine im Mittel betragsmäßig kleine Ableitung  $x'$  tritt nämlich nur für Funktionen mit im Durchschnitt geringen Schwankungen auf. Alternativ können geringe Schwankungen der Werte einer glatten Funktion auch durch die Forderung nach im Mittel kleinen Krümmungen des Graphen der Funktion zum Ausdruck gebracht werden. Dies entspricht der Minimierung der  $L^2$ -Norm der 2. Ableitung  $x''$  der Funktion. Manchmal verwendet man auch Linearkombinationen der Form

$$\Omega(x) = \lambda_1 \|x\|_{L^2(a,b)}^2 + \lambda_2 \|x'\|_{L^2(a,b)}^2 + \lambda_3 \|x''\|_{L^2(a,b)}^2 \quad (2.79)$$

mit nichtnegativen Multiplikatoren  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$  als Sympathiefunktional. Im Sinne des wahrscheinlichkeitstheoretischen Konzepts der **Entropie**, welches in der Informationstheorie und in der statistischen Mechanik breit angewendet wird, ist ein Sympathiefunktional der Gestalt

$$\Omega(x) = \int_a^b x(t) \log \frac{x(t)}{x^*(t)} dt \quad (2.80)$$

mit einer aus Zusatzinformationen resultierenden Referenzfunktion  $x^*(t) > 0$  ( $a \leq t \leq b$ ) motiviert. Ein Zugang zur Lösung inverser Probleme auf der Grundlage des Extremalproblems (2.76) mit einem Funktional (2.80) wird als **Maximum-Entropie-Regularisierung** bezeichnet (s. [EHN96, S. 134]).



Subjektive Apriori-Informationen sollten bei der Behandlung inverser Aufgaben aber so zurückhaltend wie möglich eingesetzt werden. Ist also z.B. in Teilbereichen des Definitionsbereichs der gesuchten Lösungsfunktion eine stabile Abhängigkeit der Funktionswerte von den Daten allein durch objektive Apriori-Informationen zu erreichen, so sollte  $\Omega(x)$  diese Teilbereiche auch aussparen. Stimmt nämlich das tatsächliche Verhalten der realen Lösung einer inversen Aufgabe nicht mit den subjektiven Vorstellungen des Bearbeiters überein, so können falsche Sympathiefunktionale im Lösungsprozeß große Fehler erzeugen. In manchen Modellen spielen auch stochastische Zusatzinformationen über die Lösung eine Rolle. Dies ist besonders dann der Fall, wenn bei Identifikationsproblemen die zu identifizierende Funktion oder der zu identifizierende Vektor **randomisierbar** sind, also  $x$  bzw.  $\underline{x}$  selbst als Realisierung einer Zufallsgröße aufgefaßt werden können. Wir haben es dann mit **Bayesschen Modellen** zu tun. Typisch sind solche Situationen für inverse Aufgaben im Bereich der Klimatologie und Meteorologie, bei denen die Wahrscheinlichkeitsverteilung der zufälligen Lösung oder im Vektorfalle wenigstens der Erwartungswertvektor  $\mathbf{E}\underline{x} = \underline{\mu}$  und eine positiv definite Kovarianzmatrix  $\mathbf{Cov}\underline{x} = \underline{B}$  als bekannt vorausgesetzt werden können. Aus statistischer Sicht läßt sich dann die Verwendung der quadratischen Form

$$\Omega(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{\mu})^T \underline{B}^{-1}(\underline{x} - \underline{\mu}) \quad (2.81)$$

als Sympathiefunktional gut motivieren. Die in diesem Abschnitt erwähnten stochastischen Zusatzinformationen finden ihre Anwendung bei der stabilen näherungsweise Lösung von schlecht konditionierten linearen Gleichungssystemen in Kapitel 4 (s. Abschn. 4.2).

### 2.3.2 Der Satz von Tichonov und die Korrektheit inverser Aufgaben auf kompakten Mengen

Von Natur aus inkorrekte inverse Aufgaben werden korrekt, wenn die zulässigen Lösungen dieser Aufgaben auf eine kompakte Menge eingeschränkt werden. Dies ist die Botschaft des **Satzes von Tichonov**, den wir im folgenden als Satz 2.5 formulieren werden. Eine solche Einschränkung von Lösungen auf kompakte Mengen führt zur Überwindung der instabilen Abhängigkeit der Lösung der inversen Aufgabe von den Eingangsdaten. Sie kann durch objektive Apriori-Informationen erreicht werden, wenn Zusatzinformationen, welche die erwartete Lösung der inversen Aufgabe **qualitativ beschreiben**, den Definitionsbereich

$D \subset X$  des Operators  $F$  der direkten Aufgabe auf eine kompakte Menge einschränken, folglich eine relativ kompakte und abgeschlossene Teilmenge des Banachraumes  $X$  als Menge zulässiger Lösungen auszeichnen. Diese Vorgehensweise wird von vielen Autoren als **deskriptive Regularisierung** bezeichnet. Die beobachteten Daten werden dann dazu verwendet, um die Lösung der inversen Aufgabe, deren qualitatives Verhalten bekannt ist, durch Bestimmung der fehlenden quantitativen Komponenten zu vervollständigen.

Führen die objektiven Hintergrundinformationen über die zu erwartende Lösung allein nicht auf eine kompakte Menge, so kann die Korrektheit des inversen Problems andererseits durch Einschränkung der Lösung auf eine subjektiv gewählte kompakte Menge erzwungen werden. Wie stets bei subjektiven Apriori-Informationen ist aber auch hier zu beachten, daß eine subjektive Veränderung des mathematischen Modells immer Fehlerquellen in sich birgt. Im Falle der subjektiven Einschränkung auf kompakte Mengen erkaufte man sich die gewonnene Stabilität der Lösung bezüglich gestörter Eingangsdaten durch zusätzliche Approximationsfehler, die aus der Kluft zwischen dem verwendeten Modell und der Realität herrühren.

**Satz 2.5** *Es sei  $F : D \subset X \rightarrow Y$  ein stetiger injektiver Operator, der aus dem Banachraum  $X$  in den Banachraum  $Y$  abbildet und dessen Definitionsbereich  $D$  eine kompakte Teilmenge des Raumes  $X$  darstellt. Dann ist auch der inverse Operator  $F^{-1} : F(D) \subset Y \rightarrow D \subset X$  stetig.*

Man überzeugt sich leicht von der Stetigkeit eines solchen inversen Operators  $F^{-1}$  in einem beliebigen Punkt  $y_0 = F(x_0)$ ,  $x_0 \in D$ , indem man eine Folge  $\{x_n\} \subset D$  mit  $\|F(x_n) - F(x_0)\|_Y \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  betrachtet. Da  $D$  als kompakte Menge in  $X$  sowohl relativ kompakt als auch abgeschlossen ist, existiert eine im Banachraum  $X$  konvergierende Teilfolge  $\{x_{n_k}\}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \tilde{x} \in D$ . Wegen der Stetigkeit des Operators  $F$  gilt dann auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = F(\tilde{x})$  im Banachraum  $Y$ . Da  $F$  ein injektiver Operator ist, folgt nunmehr  $\tilde{x} = x_0$  und  $\|x_{n_k} - x_0\|_X \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Auf der Grundlage der bisherigen Überlegungen ergibt sich aus der Konvergenz der Teilfolge aber sogar die Konvergenz  $\|x_n - x_0\|_X \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  der Folge selbst, woraus wiederum die Stetigkeit des Operators  $F^{-1}$  im Punkt  $y_0$  folgt. Wäre nämlich  $x_n \not\rightarrow x_0$  in  $X$ , so gäbe es für eine genügend kleine Zahl  $\varepsilon > 0$  eine unendliche Teilfolge  $\{x_{n_l}\}$  mit  $\|x_{n_l} - x_0\|_X > \varepsilon$  für alle  $l = 1, 2, \dots$ . Diese müßte aber dann wegen der Injektivität von  $F$  und der Kompaktheit von  $D$  eine gegen  $x_0$  konvergierende Teilfolge besitzen, was offensichtlich einen Widerspruch liefert.

Als Folgerung aus Satz 2.5 erhält man sofort, daß die Kompaktheit des Definitionsbereichs  $D$  dafür sorgt, daß mit der Hadamardschen Eindeutigkeitsbedingung auch die Hadamardsche Stabilitätsbedingung (s. Definition 2.3 in Abschn. 2.2.1) erfüllt ist:

**Folgerung 2.5** *Wird ein Identifikationsproblem durch eine Operatorgleichung (2.9) mit einem stetigen injektiven Operator  $F$  und kompaktem Definitionsbereich  $D$  beschrieben, so ist die Stabilitätsbedingung von Definition 2.3 stets erfüllt.*

Schließlich gilt aufgrund der oben gemachten Überlegungen auch:

**Satz 2.6** *Besitzt eine Operatorgleichung (2.9) zu einer speziellen rechten Seite  $y_0$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $x_0 \in D$ , wobei der Operator  $F$  stetig und der Definitionsbereich  $D$  kompakt sind, so gilt die Implikation*

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \text{ in } Y, \quad x_n \in D \quad \implies \quad x_n \rightarrow x_0 \text{ in } X. \quad (2.82)$$

In diesem Satz wurde die Forderung nach Injektivität von  $F$  durch die wesentlich schwächere Eigenschaft der eindeutigen Lösbarkeit von (2.9) für eine spezielle rechte Seite  $y_0$  abgeschwächt.

Auch für Extremalprobleme (2.12), die entweder Steueraufgaben beschreiben oder bei Identifikationsproblemen mit verletzter Existenzbedingung verallgemeinerte Lösungen mit minimaler Defektnorm charakterisieren, ist die Kompaktheit des Definitionsbereichs eine stabilisierende Eigenschaft.

**Satz 2.7** *Ein Extremalproblem (2.12) ist stets korrekt im Sinne von Definition 2.5, falls der Operator  $F : D \subset X \rightarrow Y$  stetig ist und der Definitionsbereich  $D$  durch eine nichtleere und in  $X$  kompakte Menge charakterisiert wird.*

Betrachtet man die Überlegungen des Abschnitts 2.2.2 genauer, so ist unter den Voraussetzungen von Satz 2.7 das Extremalproblem (2.12) stabil in folgendem Sinne:

**Folgerung 2.6** *Unter den die Kompaktheit von  $D$  einschließenden Voraussetzungen von Satz 2.7 ist eine Folge  $\{x_n\} \subset D$  mit*

$$\|F(x_n) - y_n\|_Y \leq \inf_{x \in D} \|F(x) - y_n\|_Y + \eta_n,$$

*$\|y_n - y_0\|_Y \leq \delta_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$  eine minimierende Folge des Extremalproblems*

$$\|F(x) - y_0\|_Y = \min!, \quad x \in D \subset X, \quad (2.83)$$

*d.h., es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - y_0\|_Y = \min_{x \in D} \|F(x) - y_0\|_Y.$$

*Darüber hinaus strebt der Punkt-Mengen-Abstand der Elemente der Folge  $\{x_n\}$  zur Lösungsmenge*

$$L_{min} = \{x_{min} \in D : \|F(x_{min}) - y_0\|_Y = \inf_{x \in D} \|F(x) - y_0\|_Y\} \neq \emptyset$$

*von (2.83) gegen Null, also ist*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, L_{min}) = 0.$$

Sowohl die Existenzbedingung als auch die Stabilitätsbedingung von Definition 2.5 folgen unter den die Kompaktheit von  $D$  einschließenden Voraussetzungen von Satz 2.7 aus der Tatsache, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - y\|_Y = \inf_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y$  für eine Folge  $\{x_n\} \subset D$  die Existenz einer Teilfolge  $\{x_{n_k}\}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \tilde{x} \in D$  und  $\|F(\tilde{x}) - y\|_Y = \inf_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y$  nach sich zieht.

Die genannten Stabilitätseigenschaften von Extremalproblemen bei kompakter Menge  $D$  machen sich viele Zugänge zur näherungsweise Lösung inverser Aufgaben nutzbar. Voraussetzung ist dafür allerdings, daß in den Lösungsräumen  $X$  geeignete kompakte Mengen  $D$  gefunden werden. Im endlichdimensionalen Raum  $X = \mathbb{R}^n$  stellt dies kein Problem dar, denn **alle beschränkten und abgeschlossenen Mengen  $D$  sind in  $\mathbb{R}^n$  kompakt**. Vernünftige Schranken für die einzelnen Komponenten eines Parametervektors lassen sich aus physikalisch-technischer Sicht aber meist leicht finden. In diesem Sinne ist auch das im folgenden Beispiel erklärte **inverse Matrixeigenwertproblem** stabil lösbar.

**Beispiel 2.7** In diesem Beispiel gehen wir von  $n$  fest vorgegebenen symmetrischen Matrizen  $\underline{M}_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) aus und bilden mit ihnen Linearkombinationen

$$\underline{M} := \underline{x}_1 \underline{M}_1 + \underline{x}_2 \underline{M}_2 + \dots + \underline{x}_n \underline{M}_n.$$

Für jeden Vektor  $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$  ist  $\underline{M} = \underline{M}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ebenfalls wieder eine symmetrische Matrix und besitzt die  $m$  reellen Eigenwerte  $\underline{y}_1 \geq \underline{y}_2 \geq \dots \geq \underline{y}_m$ , die wir im Vektor  $\underline{y} = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_m)^T \in \mathbb{R}^m$  zusammenfassen. Dabei gibt es Eigenvektoren  $\underline{u}_i \in \mathbb{R}^m$  mit  $\underline{u}_i \neq \mathbf{0}$  und

$$\underline{M}(\underline{x}) \underline{u}_i = \underline{y}_i \underline{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.84)$$

Das Matrixeigenwertproblem der Bestimmung des Vektors der Eigenwerte  $\underline{y} := \underline{F}(\underline{x})$  bei gegebenem Multiplikatorenvektor  $\underline{x}$  stellt die direkte Aufgabe dar. Die Eigenwerte der Matrix  $\underline{M}(\underline{x})$  sind bei gegebenem Vektor  $\underline{x}$  aus einem Bereich  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  zulässiger Multiplikatoren stets eindeutig bestimmt. Weiter ist aus der Störungstheorie bei Eigenwertproblemen bekannt, daß kleine Störungen in der symmetrischen Matrix  $\underline{M}$  stets auch nur kleine Störungen in den Eigenwerten nach sich ziehen. In diesem Sinne ist der nichtlineare Operator

$$\underline{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

der direkten Aufgabe stetig und die direkte Aufgabe korrekt. Dagegen stellt die Aufgabe der Identifikation von  $\underline{x} \in D$  bei gegebenem Eigenwertevektor  $\underline{y}$  eine inverse Aufgabe dar, die inkorrekt nach Hadamard ist, denn nicht zu allen Vektoren  $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$  gibt es passende Multiplikatoren  $\underline{x}$ , so daß Eigenwertgleichungen (2.84) erfüllt werden. Darüber hinaus können gegebenenfalls verschiedene Vektoren  $\underline{x}$  zum gleichen Eigenwertevektor  $\underline{y}$  von  $\underline{M}(\underline{x})$  führen.  $\square$

Das in Beispiel 2.7 betrachtete Identifikationsproblem gehört zur großen Klasse von **inversen Eigenwertproblemen** (s. [JIX98]). Es entspricht der Lösung eines **nichtlinearen Gleichungssystems**

$$\underline{F}(\underline{x}) = \underline{y}, \quad \underline{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^m \quad (2.85)$$

mit  $m$  nichtlinearen Gleichungen

$$f_j(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \underline{y}_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

in den  $n$  Unbekannten  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ . Dabei stellt (2.85) mit  $X := \mathbb{R}^n$  und  $Y := \mathbb{R}^m$  einen Spezialfall der nichtlinearen Operatorgleichung (2.9) dar. Der Operator

$\underline{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix}$  zerfällt in die nichtlinearen Funktionen  $f_j$ , welche die Zuord-

nung  $\underline{x} \mapsto \underline{y}_j$  der Matrixmultiplikatoren zum  $j$ -ten Eigenwert beschreiben. Diese Funktionen sind nicht analytisch angebar. Ihre Funktionswerte lassen sich jedoch beliebig genau berechnen, indem man die Eigenwerte der zugehörigen symmetrischen Matrix  $\underline{M}$  mit numerischen Methoden bestimmt. Schränkt man den Definitionsbereich  $D$  des nichtlinearen Operators  $\underline{F}$  auf eine beschränkte abgeschlossene und damit **kompakte** Menge in  $\mathbb{R}^n$  ein, z.B. auf

$$D := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{c}_i \leq \underline{x}_i \leq \bar{c}_i \ (i = 1, 2, \dots, n)\}, \quad (2.86)$$

und ist  $\underline{F}$  **injektiv** auf  $D$ , so läßt sich die Folgerung 2.5 anwenden, d.h., die Hadamardsche Stabilitätsbedingung wird erfüllt. Injektivität bedeutet dabei, daß es in  $D$  höchstens einen Multiplikatorenvektor  $\underline{x}$  gibt, der auf einen festen Eigenwertvektor  $\underline{y}$  von  $\underline{M}(\underline{x})$  führt. Dieser Fall liegt häufig in recht kleinen Bereichen  $D$  vor, deren entsprechende Matrizen  $\underline{M}(\underline{x})$  für alle  $\underline{x} \in D$  nur einfache Eigenwerte  $\underline{y}_1 > \underline{y}_2 > \dots > \underline{y}_m$  besitzen. Kann die Injektivität von  $\underline{F}$  auf  $D$  nicht gesichert werden, so führt im Sinne von Folgerung 2.6 eine Minimierung der Defektnorm  $\|\underline{F}(\underline{x}) - \underline{y}_\delta\|_{\mathbb{R}^m}$  über alle  $\underline{x} \in D$  auch bei gestörten Eigenwertvektoren  $\underline{y}_\delta$  mit  $\|\underline{y}_\delta - \underline{y}\|_{\mathbb{R}^m} \leq \delta$  auf Multiplikatorenvektoren  $\underline{x}_\delta$ , die für  $\delta \rightarrow 0$  gegen tatsächliche Lösungen des inversen Matrixeigenwertproblems streben. Aber auch bei Problemen, die sich als nichtlineare Gleichungssysteme (2.85) mit kompaktem Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^n$  schreiben lassen, kann es bei erfüllter Hadamardscher Stabilitätsbedingung große Fehler in der Lösung trotz kleiner Datenfehlerschranken  $\delta > 0$  geben. Dann haben wir es mit **schlecht-konditionierten nichtlinearen Gleichungssystemen** zu tun. Das Phänomen der Schlechkonditioniertheit wurde bereits für lineare Gleichungssysteme im Anschluß an Beispiel 2.2 erläutert.

### 2.3.3 Spezielle kompakte Mengen in Funktionenräumen

Viel komplizierter ist die Situation im unendlichdimensionalen Banachraum  $X$ , der typischen Situation für Funktionenräume, da hier abgeschlossene Kugeln (2.14) im allgemeinen keine kompakten Mengen bilden. Es genügt also nicht, die in Frage kommenden Lösungen in der Norm des Raumes  $X$  zu beschränken. Ebensovienig bilden die praktisch wichtigen Klassen nichtnegativer, monotoner oder konvexer Funktionen (s. (2.15) – (2.17)) in einem Banachraum  $X$  reeller Funktionen über einem endlichen Intervall kompakte Mengen, da sie stets Funktionen mit beliebig großer Norm in  $X$  enthalten. Für die Kompaktheit einer

Menge ist jedoch ihre Beschränktheit im Banachraum notwendig. Andererseits sichert auch die gleichmäßige Beschränkung der Funktionswerte einer Familie von Funktionen nach oben und unten noch keine Kompaktheit (s. Aufgabe 2.5). Erst eine Kombination von gleichmäßiger Beschränktheit mit zusätzlichen Eigenschaften führt zum Erfolg. Im Raum der stetigen Funktionen ist nach dem **Satz von Arzelà-Ascoli** (s. [TTB95, S.373]) die gleichgradige Stetigkeit aller betrachteten Funktionen eine solche die Kompaktheit erzwingende Zusatzeigenschaft. Für differenzierbare Funktionen erreicht man dies z.B. durch gleichmäßige Beschränkung der Ableitungswerte. In Räumen integrierbarer Funktionen kann die Monotonie bzw. die Konvexität von Funktionen als eine derartige Zusatzeigenschaft genutzt werden. Auf diese Weise lassen sich für viele unendlichdimensionale Funktionenräume  $X$  praktikable Forderungen an zulässige Lösungen des inversen Problems formulieren, die kompakte Definitionsbereiche  $D$  und damit die Stabilität der Aufgabe sichern.

Wir betrachten zuerst für  $1 \leq p < \infty$  die Schar von Banachräumen  $X = L^p(a, b)$  der auf dem Intervall  $[a, b]$  **zur  $p$ -ten Potenz integrierbaren** reellen Funktionen  $z(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ), die eine endliche Norm

$$\|z\|_{L^p(a,b)} := \left( \int_a^b |z(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (2.87)$$

besitzen. Vom einzigen Hilbertraum in dieser Schar, der sich für  $p = 2$  als Raum  $L^2(a, b)$  der quadratisch integrierbaren Funktionen ergibt, haben wir schon mehrfach Gebrauch gemacht. Es gelten dabei für alle Räume  $L^p(a, b)$  die im Abschnitt 2.1.1 zur Definition des Raumes  $L^2(a, b)$  gemachten Bemerkungen. Insbesondere sind die in Formel (2.87) auftretenden Integrale als Lebesgue-Integrale zu verstehen, und alle hier betrachteten Funktionen  $z$  sind bezüglich des Lebesguemaßes meßbar. Solche Funktionen  $z$ , die sich nur auf einer Menge vom Lebesguemaß Null unterscheiden, sind demselben Element des Raumes  $L^p(a, b)$  zuzuordnen (zu Details s. [FLO81]). Je größer die Zahl  $p$  ist, um so stärker ist die in (2.87) definierte Norm. Mit  $1 \leq p < q < \infty$  und  $\tilde{Z} = L^p(a, b)$ ,  $Z = L^q(a, b)$  sowie  $\overline{K} = (b - a)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$  gilt eine Ungleichung vom Typ (2.5), d.h., wir haben eine Abschätzung

$$\|z\|_{L^p(a,b)} \leq (b - a)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|z\|_{L^q(a,b)} \quad (1 \leq p < q < \infty; z \in L^q(a, b)), \quad (2.88)$$

wobei zwischen den Räumen eine echte Inklusion  $L^q(a, b) \subset L^p(a, b)$  für  $1 \leq p < q < \infty$  gilt. Ein linearer Raum von Funktionen  $z(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ), die für beliebig große Potenzen  $p$  integrierbar sind, ist der Raum  $L^\infty(a, b)$  der **fast überall beschränkten**, d.h. mit Ausnahme von Argumenten  $t$  aus einer Menge vom Lebesguemaß Null beschränkten Funktionen.  $L^\infty(a, b)$  bildet mit dem

**wesentlichen Supremum**

$$\|z\|_{L^\infty(a,b)} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in (a,b)} |z(t)| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|z\|_{L^p(a,b)} \quad (2.89)$$

der Funktion  $z$  als Norm selbst einen Banachraum. Unter  $\operatorname{ess\,sup}_{t \in (a,b)} |z(t)|$  versteht man dabei das Infimum aller positiven Zahlen  $s$ , für die  $|z(t)| \geq s$  im Intervall  $(a, b)$  nur für Argumente  $t$  aus einer Menge vom Lebesguemaß Null gilt. Mit der echten Einschließung  $L^\infty(a, b) \subset L^p(a, b)$  für  $1 \leq p < \infty$  und

$$\|z\|_{L^p(a,b)} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|z\|_{L^\infty(a,b)} \quad (1 \leq p < \infty; z \in L^\infty(a,b)) \quad (2.90)$$

ist die  $L^\infty$ -Norm wiederum stärker als alle  $L^p$ -Normen mit endlichem  $p$ . Die Banachräume  $L^p(a, b)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) zusammengenommen heißen Lebesgueräume (zu weiteren Einzelheiten s. [FLO81, §14] oder [GORI94, Abschn. 2.2.2]).

Jede Menge **monotoner Funktionen** auf dem Intervall  $[a, b]$ , deren Funktionswerte durch feste endliche Konstanten nach oben und unten gleichmäßig beschränkt sind, ist kompakt im Banachraum  $L^p(a, b)$  für alle Exponenten  $1 \leq p < \infty$ . Wir formulieren diese Aussage im folgenden Hilfssatz für monoton nichtwachsende Funktionen. Sie gilt aber ebenso für monoton nichtfallende Funktionen. In der Menge der hier betrachteten monotonen Funktionen liegen sowohl stetige als auch stückweise stetige Funktionen mit Sprüngen. Betrachtet man bei Sprungfunktionen nur rechtsseitig oder linksseitig stetige Funktionen, so bilden diese jeweils Repräsentanten für das zugehörige Element im Lebesgueräum  $L^p(a, b)$ .

**Hilfssatz 2.5** *Mit  $-\infty < \underline{c} \leq \bar{c} < \infty$  ist jede Menge der Gestalt*

$$D = \{x(t) \in [\underline{c}, \bar{c}] (a \leq t \leq b) : x(t_1) \geq x(t_2) (a \leq t_1 < t_2 \leq b)\} \quad (2.91)$$

*von sowohl monoton nichtwachsenden als auch gleichmäßig nach oben und unten beschränkten Funktionen im Raum  $L^p(a, b)$  für alle  $1 \leq p < \infty$  kompakt.*

Um die Aussage des Hilfssatzes zu erhalten, nutzt man den Begriff der **Totalvariation**

$$\mathbf{V}_a^b(x) := \sup_{a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k \leq b} \sum_{i=1}^k |x(t_i) - x(t_{i-1})| \quad (2.92)$$

einer Funktion  $x(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ), wobei das Supremum in Formel (2.92) über alle möglichen Unterteilungen  $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k \leq b$  des Intervalls



$[a, b]$  in endlich viele Teilintervalle genommen werden muß. Alle Funktionen aus  $D$  nach Formel (2.91) sind von beschränkter Totalvariation, und es gibt eine Konstante  $C$  derart, daß für  $x \in D$  die Ungleichungen  $|x(t)| \leq C$  ( $a \leq t \leq b$ ) und  $\mathbf{V}_a^b(x) \leq C$  gelten. Dann folgt aus dem Satz von Helly (s. [NATA61, S.250]), daß es in jeder unendlichen Teilmenge von  $D$  eine Folge  $\{x_n\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \bar{x}(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) und  $\bar{x} \in D$  gibt. Da  $|x_n(t) - \bar{x}(t)|^p \leq |2C|^p$  durch eine integrierbare Funktion beschränkt ist und für  $n \rightarrow \infty$  fast überall gegen Null strebt, liefert der Satz von Lebesgue (s. [GORI94, S.32]) wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \bar{x}\|_{L^p(a,b)} = \left( \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n(t) - \bar{x}(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

die Behauptung des Hilfssatzes.

Weiterhin läßt sich zeigen, daß auch jede Menge **konvexer Funktionen** auf dem Intervall  $[a, b]$ , deren Funktionswerte durch feste endliche Konstanten nach oben und unten gleichmäßig beschränkt sind, kompakt ist im Banachraum  $L^p(a, b)$  für alle Exponenten  $1 \leq p < \infty$ . Diese im folgenden Hilfssatz für konvexe Funktionen formulierte Tatsache gilt analog für konkave Funktionen.

**Hilfssatz 2.6** *Mit  $-\infty < \underline{c} \leq \bar{c} < \infty$  ist jede Menge der Gestalt*

$$D = \left\{ x(t) \in [\underline{c}, \bar{c}] : x\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{x(t_1) + x(t_2)}{2} \quad (t, t_1, t_2 \in [a, b]) \right\} \quad (2.93)$$

*von sowohl konvexen als auch gleichmäßig nach oben und unten beschränkten Funktionen kompakt im Raum  $L^p(a, b)$  für alle  $1 \leq p < \infty$ .*

Können die Lösungen inverser Aufgaben auf Mengen  $D$  von gleichmäßig beschränkten Funktionen eingegrenzt werden, die monoton (s. (2.91)), konvex (s. (2.93)) oder im Sinne von

$$D = \{x(t) \in [\underline{c}, \bar{c}] \quad (a \leq t \leq b) : x \text{ nichtwachsend und konvex}\} \quad (2.94)$$

monoton und konvex sind, so erweisen sich derartige Aufgaben als korrekt, und ihre Lösungen hängen stabil von den Eingangsdaten ab, wenn  $X = L^p(a, b)$  für eine Zahl  $1 \leq p < \infty$  gewählt wird und der zugehörige Operator der direkten Aufgabe  $F : D \subset L^p(a, b) \rightarrow Y$  stetig ist. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.6 gilt dann für eine Operatorgleichung (2.9) Beziehung (2.82) in der Form

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \quad \text{in } Y, \quad x_n \in D \quad \implies \quad x_n \rightarrow x_0 \quad \text{in } L^p(a, b). \quad (2.95)$$

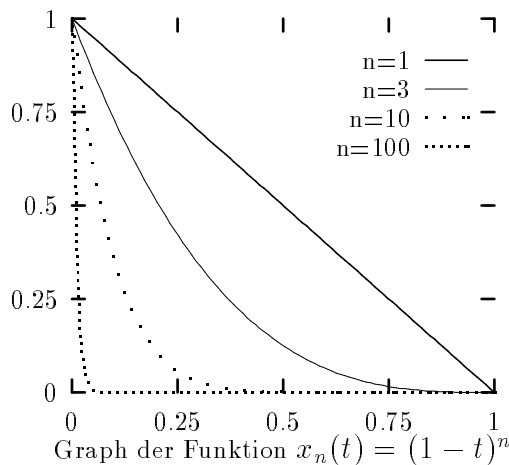
Jedoch kann man, obwohl alle drei betrachteten Mengen  $D$  zu  $L^\infty(a, b)$  gehören, auch für  $x_0 \in L^\infty(a, b)$  nicht auf eine gleichmäßige Konvergenz

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \text{ in } Y, \quad x_n \in D \implies x_n \rightarrow x_0 \text{ in } L^\infty(a, b) \quad (2.96)$$

schließen. Dies hat seinen Grund darin, daß die in (2.91), (2.93) und (2.94) eingeführten Mengen  $D$  nicht kompakt in  $L^\infty(a, b)$  sind, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

**Beispiel 2.8** Wir betrachten die in Bild 2.4 dargestellte Folge gleichmäßig nach oben und unten beschränkter, nichtwachsender, konvexer Funktionen

$$x_n(t) = (1 - t)^n \quad (0 \leq t \leq 1; n = 1, 2, \dots).$$



**Bild 2.4** Folge  $x_n$ , die in  $L^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ), aber nicht in  $L^\infty$  konvergiert

Diese Folge konvergiert in  $L^p(0, 1)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) gegen  $x_0(t) \equiv 0$  (Nullfunktion), nicht jedoch in  $L^\infty(0, 1)$ , denn wir haben  $\|x_n - x_0\|_{L^p(0,1)} = (np + 1)^{-1/p} \rightarrow 0$ , aber  $\|x_n - x_0\|_{L^\infty(0,1)} = 1 \not\rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Im Raum  $L^\infty(0, 1)$  konvergiert gewiß überhaupt keine Teilfolge von  $\{x_n\}$ . Somit kann keine Menge  $D$  kompakt in  $L^\infty(0, 1)$  sein, welche die Folge  $\{x_n\}$  enthält.  $\square$

Es sei noch angemerkt, daß die in Beispiel 2.8 betrachtete Folge von monoton fallenden und konvexen Funktionen  $\{x_n\}$  für jedes abgeschlossene Intervall  $[\varepsilon, 1]$  ( $\varepsilon > 0$ ), das den linken Randpunkt  $t = 0$  nicht enthält, gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Betrachtet man im Lösungsraum  $X = L^p(a, b)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) die Situation von Satz 2.6, wobei die eindeutig bestimmte

Lösung  $x_0$  der Operatorgleichung (2.9) zur rechten Seite  $y_0$  eine auf  $[a, b]$  stetige Funktion sei, so kann man zeigen, daß für  $D$  aus (2.91) oder (2.93) neben (2.95) aus der Konvergenz der Bildfolge  $\{F(x_n)\}$  in  $Y$  auch die punktweise Konvergenz  $x_n(t) \rightarrow x_0(t)$  ( $a < t < b$ ) für alle inneren Punkte  $t$  des Intervalls  $[a, b]$  folgt. Da die punktweise Konvergenz von Folgen gleichmäßig beschränkter monotoner bzw. konvexer Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall gegen eine stetige Funktion die gleichmäßige Konvergenz der Folge nach sich zieht (s. [POSZ54, S.63]), gilt bei diesen Definitionsbereichen  $D$  auch für beliebig kleine  $\varepsilon > 0$  die Implikation

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \quad \text{in } Y, \quad x_n \in D \quad \Longrightarrow \quad x_n \rightarrow x_0 \quad \text{in } L^\infty(a+\varepsilon, b-\varepsilon). \quad (2.97)$$

In jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $[a, b]$ , das keinen der Randpunkte  $a$  oder  $b$  enthält, konvergiert die Funktionenfolge  $\{x_n\}$  dann gleichmäßig gegen  $x_0 \in C[a, b]$ . Für  $D$  aus (2.94) und  $x_0 \in C[a, b]$  gilt sogar

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \quad \text{in } Y, \quad x_n \in D \quad \Longrightarrow \quad x_n \rightarrow x_0 \quad \text{in } L^\infty(a+\varepsilon, b), \quad (2.98)$$

d.h., das rechte Intervallende wird, wie in der Folge von Beispiel 2.8 geschehen, in die gleichmäßige Konvergenz eingeschlossen.

Der Betrachtung von Funktionen, die weder monoton noch konvex sein müssen, dient der folgende Hilfssatz:

**Hilfssatz 2.7** *Mit  $-\infty < \underline{c} \leq \bar{c} < \infty$  und  $0 < K < \infty$  ist jede Menge der Gestalt*

$$D = \left\{ x(t) \in [\underline{c}, \bar{c}] \quad (a \leq t \leq b) : \mathbf{V}_a^b(x) \leq K \right\} \quad (2.99)$$

*von gleichmäßig nach oben und unten beschränkten Funktionen mit zusätzlich gleichmäßig beschränkter Totalvariation kompakt im Raum  $L^p(a, b)$  für alle  $1 \leq p < \infty$ .*

Dabei verhelfen Schranken der in Formel (2.92) eingeführten Totalvariation zur stabilen Lösung inverser Aufgaben mit solchen nichtmonotonen und nichtkonvexen Lösungsfunktionen. Der Hilfssatz beruht wiederum auf dem Satz von Helly. Die in  $D$  zusammengefaßte Familie von Funktionen mit gleichmäßig beschränkter Totalvariation, in der nur linksseitig bzw. rechtsseitig stetige Funktionen betrachtet werden sollten, zeichnet sich dadurch aus, daß alle diese Funktionen nicht über ein gewisses Maß hinaus oszillieren dürfen. Offensichtlich werden an solche Funktionen, die auch an endlich oder abzählbar unendlich vielen Stellen Sprünge aufweisen dürfen, keinerlei Forderungen nach Monotonie oder Konvexität gestellt.

Es ist durchaus auch von Interesse, Lösungsräume  $X$  inverser Probleme behandeln zu können, bei denen auch Ableitungen der betrachteten Funktionen eine Rolle spielen. Unter Konvergenz von Näherungslösungen gegen die exakte Lösung versteht man dann sowohl die Konvergenz der Funktionswerte in einem wohldefinierten Sinne als auch die Konvergenz der jeweiligen Ableitungen. In diesem Zusammenhang nutzt man neben Räumen stetig differenzierbarer Funktionen häufig **Sobolevräume** (s. [TTB95, Abschn. 11.26]).

Wir beschränken uns beispielhaft auf die Betrachtung des speziellen Sobolevraumes  $H^1(a, b)$  der auf  $[a, b]$  definierten quadratisch integrierbaren reellen Funktionen  $z$  mit quadratisch integrierbarer **verallgemeinerter erster Ableitung**  $z'$  (s. [TTB95, S.383]). Diese Funktionen besitzen eine endliche **Sobolevnorm**

$$\|z\|_{H^1(a,b)} := \sqrt{\|z\|_{L^2(a,b)}^2 + \|z'\|_{L^2(a,b)}^2} = \sqrt{\int_a^b (z(t))^2 dt + \int_a^b (z'(t))^2 dt}, \quad (2.100)$$

mit welcher  $H^1(a, b)$  zum Banachraum wird. Es existiert auch ein zu dieser Norm passendes Skalarprodukt, das  $H^1(a, b)$  zum Hilbertraum macht. Wie im Falle des Lebesgueraumes  $L^2(a, b)$  können die Werte  $z(t)$  der Funktionen  $z$ , die zu einem festen Element in  $H^1(a, b)$  gehören, auf einer Argumentmenge vom Lebesguemaß Null beliebig abgeändert werden. Jedoch findet man zu jedem Element  $z \in H^1(a, b)$  stets eine stetige Funktion als Repräsentanten. Diese Repräsentantenfunktionen sind auch fast überall im klassischen Sinne differenzierbar. Es gelten die echten Inklusionen  $H^1(a, b) \subset C[a, b] \subset L^2(a, b)$ . Wir sagen, daß der Sobolevraum  $H^1(a, b)$  in den entsprechenden Raum der stetigen Funktionen wie auch in den entsprechenden Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen eingebettet ist. Diese **Einbettungen** sind stetig, d.h., es gelten Abschätzungen des Typs (2.5) in der Form

$$\|z\|_{C[a,b]} \leq K_1 \|z\|_{H^1(a,b)} \quad \text{für alle } z \in H^1(a, b) \quad (2.101)$$

und

$$\|z\|_{L^2(a,b)} \leq K_2 \|z\|_{H^1(a,b)} \quad \text{für alle } z \in H^1(a, b) \quad (2.102)$$

mit positiven Konstanten  $K_1$  und  $K_2$ , wobei wegen Formel (2.100) für die Konstante aus (2.102) offensichtlich  $K_2 = 1$  gesetzt werden kann. Diese Überlegungen zeigen, daß die Sobolevnorm (2.100) stärker ist als die Normen (2.6) bzw. (2.7), mit denen üblicherweise stetige bzw. quadratisch integrierbare Funktionen bewertet werden. Mehr noch, die Einbettung von  $H^1(a, b)$  in die Räume  $C[a, b]$  bzw.  $L^2(a, b)$  ist sogar vollstetig im Sinne des folgenden als **Satz von Rellich-Kondrachov** bekannten Hilfssatzes.

**Hilfssatz 2.8** *Es sei  $K$  eine positive Konstante. Dann ist die Menge*

$$D = \{x \in H^1(a, b) : \|x\|_{H^1(a, b)} \leq K\} \quad (2.103)$$

*als Teilmenge der Banachräume  $C[a, b]$  und  $L^2(a, b)$  jeweils relativ kompakt.*

Leider erlaubt die in Hilfssatz 2.8 betrachtete Menge  $D$  nicht die Anwendung der Stabilitätsaussagen aus Abschnitt 2.3.2 für inverse Aufgaben, deren Lösungen zu den Funktionenräumen  $X = C[a, b]$  bzw.  $X = L^2(a, b)$  gehören, denn  $D$  ist zwar relativ kompakt, aber nicht abgeschlossen und damit nicht kompakt in diesen Räumen. Wir werden in Kapitel 4 des Buches (s. Formel (4.54)) jedoch sehen, daß die Menge (2.103) aus Hilfssatz 2.8 trotzdem eine gewisse Rolle bei der stabilen näherungsweise Lösung inverser Aufgaben im Sobolevraum  $H^1(a, b)$  spielen kann.

Zum Abschluß des Kapitels zeigt der folgende Hilfssatz auf, wie man kompakte Mengen  $D$  auch im Raum  $H^1(a, b)$  konstruieren kann.

**Hilfssatz 2.9** *Mit  $-\infty < \underline{c} \leq \bar{c} < \infty$ ,  $-\infty < \underline{d} \leq \bar{d} < \infty$  und  $0 < K < \infty$  ist jede Menge der Gestalt*

$$D = \left\{ x \in H^1(a, b) : \begin{array}{l} x(t) \in [\underline{c}, \bar{c}], x'(t) \in [\underline{d}, \bar{d}], a \leq t \leq b, \\ \mathbf{V}_a^b(x') \leq K \end{array} \right\} \quad (2.104)$$

*von Funktionen mit gleichmäßig nach oben und unten beschränkten Werten der Funktion selbst und ihrer verallgemeinerten Ableitung sowie mit zusätzlich gleichmäßig beschränkter Totalvariation der verallgemeinerten Ableitung kompakt im Raum  $H^1(a, b)$ .*

Es sei an dieser Stelle der Vollständigkeit halber noch erwähnt, daß die Funktionen  $x(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) in Formel (2.104) klassische Ableitungen  $x'(t)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  nur fast überall besitzen müssen. Ergänzt man diese Ableitungen auf der verbleibenden Menge vom Lebesguemaß Null aber so, daß linksseitig oder rechtsseitig stetige Funktionen entstehen, so erhält man auf ganz  $[a, b]$  definierte Funktionen  $x'$ , für welche die Totalvariation  $\mathbf{V}_a^b(x')$  dann bestimmt werden kann.

## Aufgaben

**Aufgabe 2.1** In Anlehnung an Bsp. 2.1 (s. Abschn. 2.2.1) charakterisiert die lineare Operatorgleichung

$$[Ax](s) := \int_0^s (s-t)x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq T)$$

in den Räumen  $X = C[0, T]$  und  $Y = L^2(0, T)$  die Identifikation der zeitabhängigen Beschleunigungen  $x$  eines zum Nullzeitpunkt in Ruhe befindlichen Fahrzeuges aus Messungen des zurückgelegten Weges  $y$ . Zeigen Sie, daß die Gleichung inkorrekt ist und diskutieren Sie dabei die Erfüllung der drei Hadamardschen Bedingungen.

**Aufgabe 2.2** Man leite in Bsp. 2.5 (s. Abschn. 2.2.4) die Darstellungsformel (2.64) für das Temperaturfeld mit Hilfe der Methode der Trennung der Veränderlichen aus der partiellen Differentialgleichung (2.61), der Anfangsbedingung (2.62) und den Randbedingungen (2.63) her.

**Aufgabe 2.3** Zeigen Sie, daß der nichtlineare Operator  $F$  aus Formel (2.66) mit positiven Konstanten  $c_0$  und  $c_1$  für alle quadratisch integrierbaren Funktionen  $x \in L^2(0, T)$  eine stetige Bildfunktion  $[F(x)](s)$  ( $0 \leq s \leq T$ ) liefert, und bestimmen Sie unter der Bedingung  $\|x\|_{L^2(0, T)} \leq K$  untere und obere Schranken für die Werte dieser Bildfunktionen.

**Aufgabe 2.4** Der in Bsp. 2.6 eingeführte Selbstfaltungsoperator (2.67) werde für  $X = L^2(0, 1)$  und  $D$  aus (2.68) mittels der Vorschrift

$$[F(x)](s) = \int_0^s x(s-t)x(t) dt \quad (0 \leq s \leq 2)$$

auf den Bildraum  $Y = L^2(0, 2)$  erweitert. Dabei setzen wir die Funktionswerte  $x(t)$  für Argumente  $t \notin [0, 1]$  stets gleich Null. Zeigen Sie durch Konstruktion von geeigneten Beispielfolgen  $\{x_n\} \subset \bar{B}_r^D(x_0)$ , daß die nichtlineare Operatorgleichung (2.51) auch mit dem erweiterten Selbstfaltungsoperator  $F : D \subset L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 2)$  in allen Punkten  $x_0 \in D$  lokal inkorrekt ist.

**Aufgabe 2.5** Die Stabilisierung von Identifikationsproblemen nach dem Satz von Tichonov (s. Satz 2.5) beruht auf der Kompaktheit des Definitionsbereichs  $D$  der Aufgabe. Zeigen Sie, daß der Definitionsbereich

$$D = \{x(t) \in [-1, 1] \ (0 \leq t \leq 1) : x \text{ stetig}\},$$

der aus stetigen reellen Funktionen besteht, die nach oben und unten gleichmäßig beschränkt sind, in keinem der beiden Funktionenräume  $C[0, 1]$  und  $L^2(0, 1)$  kompakt ist und demzufolge der Stabilisierungszugang von Abschnitt 2.3.2 darauf nicht angewendet werden kann.

### 3 Identifikationsprobleme in Hilberträumen

In diesem Kapitel betrachten wir Identifikationsprobleme, die sich als Operatorgleichungen (2.9) oder (2.10) in **reellen Hilberträumen**  $X$  und  $Y$  schreiben lassen. Ein reeller Hilbertraum  $H$  ist ein linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , der durch ein **Skalarprodukt**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}\langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle, \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

sowie

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$$

für alle  $x, y, z \in H$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  charakterisiert wird. Der Raum  $H$  muß dabei so beschaffen sein, daß er mit der aus dem Skalarprodukt über die Beziehung  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  für alle  $x \in H$  erzeugten Norm  $\|\cdot\|$  einen Banachraum, also einen vollständigen normierten Raum bildet.

Wir bezeichnen mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  bzw.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$  die Skalarprodukte im Raum  $X$  der Lösungen bzw. im Raum  $Y$  der Eingangsdaten des inversen Problems und mit  $\|\cdot\|_X$  bzw.  $\|\cdot\|_Y$  die daraus erzeugten Normen in diesen Räumen. Da im Hilbertraum mit dem eingeführten Skalarprodukt eine zusätzliche Struktur gegeben ist, die man in Ergänzung zu den auf der Norm basierenden Banachraumeigenschaften nutzen kann, lassen sich umfassendere Lösungseigenschaften der Operatorgleichungen formulieren. Vielfach können aber auch Sachverhalte, die aus Überlegungen im Banachraum schon im Ansatz bekannt sind, im Hilbertraum bis ins Detail ausgearbeitet und übersichtlich dargestellt werden. So existieren in **separablen Hilberträumen**, auf die wir uns beschränken wollen, endliche oder abzählbare Orthonormalsysteme, die eine Anwendung der Theorie der Fourierreihen und damit eine explizite Entwicklung von Elementen des Hilbertraumes sowie von Operatorbildern in eine Reihe möglich machen. Besonders prägnante Aussagen gewinnt man dabei für die bereits in Abschnitt 2.2.3 behandelten unrestringierten linearen Identifikationsprobleme in Form von linearen Operatorgleichungen (2.30) und dabei wiederum für den Fall, daß der Operator der direkten Aufgabe ein linearer vollstetiger Operator ist.

#### 3.1 Lineare Operatorgleichungen in Hilberträumen

Im Abschnitt 2.2.3 haben wir in Banachräumen die Korrektheit bzw. Inkorrektheit von unrestringierten linearen Identifikationsproblemen im Sinne von Hadamard ausführlich diskutiert. Wir kommen auf die in diesem Zusammenhang auftretenden linearen Operatorgleichungen

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y) \quad (3.1)$$

zunehmend unter der Voraussetzung zurück, daß für  $X$  und  $Y$  Hilberträume gewählt werden. Eingangs wollen wir einige grundlegende Begriffe und im weiteren benötigte Aussagen der Hilbertraumtheorie kurz zusammenstellen.

### 3.1.1 Einige Grundbegriffe der Hilbertraumtheorie

Es sei  $H$  ein reeller Hilbertraum mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und der daraus erzeugten Norm  $\| \cdot \|$ . Dann ist die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

für alle  $x, y \in H$  gültig. Zwei Elemente  $x$  und  $y$  aus  $H$  heißen **orthogonal**, wenn sie die Beziehung  $\langle x, y \rangle = 0$  erfüllen. Es gilt dann der **Satz des Pythagoras**

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Wir bezeichnen mit

$$T^\perp := \{x \in H : \langle x, z \rangle = 0 \text{ für alle } z \in T\}$$

das **orthogonale Komplement**  $T^\perp$  einer Teilmenge  $T$  von  $H$ . Das orthogonale Komplement  $H_1^\perp$  eines Teilraums  $H_1$  von  $H$  ist ein abgeschlossener Teilraum von  $H$ . Ist  $H_1$  ein abgeschlossener Teilraum von  $H$ , so kann  $H$  als **orthogonale direkte Summe**

$$H = H_1 \oplus H_1^\perp$$

dargestellt werden, d.h., für jedes Element  $x \in H$  gibt es eindeutig bestimmte Elemente  $x_1 \in H_1$  und  $x_2 \in H_1^\perp$  mit  $x = x_1 + x_2$ .

Eine Folge  $\{e_n\} \subset H$  heißt **Orthonormalsystem**, wenn die Orthonormalitätsrelationen

$$\langle e_m, e_n \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

gelten. Das Orthonormalsystem heißt darüber hinaus **vollständig**, wenn sich jedes Element  $x \in H$  in eine konvergente **Fourierreihe**

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$



entwickeln läßt, wobei für alle  $x \in H$  die **Parsevalsche Gleichung**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2$$

erfüllt ist. Die Skalarprodukte  $\langle x, e_n \rangle$  heißen **Fourierkoeffizienten** von  $x$ . Ist  $\{e_n\} \subset H$  ein nicht notwendig vollständiges Orthonormalsystem, so gilt wenigstens die **Besselsche Ungleichung**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Der Hilbertraum  $H$  wird **separabel** genannt, wenn er entweder endlichdimensional ist oder es im unendlichdimensionalen Falle eine unendliche Folge  $\{e_n\} \subset H$  gibt, die ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem bildet. Besonders übersichtlich ist im Hilbertraum  $H$  die Darstellung **beschränkter linearer Funktionale**  $f \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ , d.h. stetiger linearer Abbildungen  $f$  von  $H$  in die Menge der reellen Zahlen. Der **Satz von Riesz** besagt, daß sich jedes solche Funktional als Skalarprodukt

$$f(x) = \langle x, g \rangle \quad \text{für alle } x \in H$$

mit einem eindeutig bestimmten Repräsentantenelement  $g \in H$  darstellen läßt. Unter den Konstanten  $C > 0$ , für die eine Ungleichung

$$|f(x)| \leq C \|x\| \quad \text{für alle } x \in H$$

gilt, ist  $C = \|g\|$  der kleinstmögliche Wert.

Neben der starken Konvergenz (s. Abschn. 2.1.1) spielt in Hilberträumen auch die **schwache Konvergenz**  $x_n \rightharpoonup x_0$  einer Folge  $\{x_n\} \subset H$  gegen ein Grenzelement  $x_0 \in H$  eine wichtige Rolle. Eine Folge  $\{x_n\} \subset H$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  schwach gegen  $x_0$ , wenn für alle  $g \in H$  die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, g \rangle = \langle x_0, g \rangle$$

erfüllt ist. Bei schwacher Konvergenz  $x_n \rightharpoonup x_0$  gilt stets  $\|x_0\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ .

Das Grenzelement einer schwach konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt. Die starke Konvergenz  $x_n \rightarrow x_0$  zieht stets die schwache Konvergenz  $x_n \rightharpoonup x_0$  nach sich. Andererseits liefern schwache Konvergenz  $x_n \rightharpoonup x_0$  und Konvergenz der Normen  $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$  zusammen die starke Konvergenz  $x_n \rightarrow x_0$  in  $H$ .

Jede in  $H$  beschränkte Menge ist **relativ schwach kompakt**, d.h., aus jeder beschränkten unendlichen Folge  $\{x_n\} \subset H$  kann man eine schwach konvergente Teilfolge  $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$  für  $k \rightarrow \infty$  auswählen. Insbesondere konvergiert eine Folge  $\{e_n\} \subset H$ , die ein Orthonormalsystem bildet, wegen der aus der Besselschen Ungleichung resultierenden Grenzwertbeziehung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, e_n \rangle = 0$  stets schwach gegen Null, d.h., es gilt  $e_n \rightharpoonup \mathbf{0}$  für  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.1.2 Einige Eigenschaften beschränkter linearer Operatoren in Hilberträumen

Betrachten wir nun also wieder die eingangs eingeführten separablen reellen Hilberträume  $X$  und  $Y$  und in diesen Räumen einen beschränkten linearen und damit stetigen Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Dieser Operator ist dann auch **schwach stetig**, d.h.,  $x_n \rightharpoonup x_0$  in  $X$  zieht stets  $Ax_n \rightharpoonup Ax_0$  in  $Y$  nach sich. Über die Beziehung

$$\langle Au, v \rangle_Y = \langle u, A^*v \rangle_X \quad \text{für alle } u \in X \text{ und } v \in Y$$

läßt sich in eindeutiger Weise der zu  $A$  **adjungierte Operator**  $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$  definieren (s. [GORI94, S. 81]). Zwischen den Nullräumen  $N(A)$  und  $N(A^*)$  sowie den Bildräumen  $R(A)$  und  $R(A^*)$  von  $A$  und  $A^*$  bestehen die Beziehungen

$$X = N(A) \oplus \overline{R(A^*)} \quad \text{und} \quad Y = \overline{R(A)} \oplus N(A^*).$$

Falls  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  und  $A = A^*$  gilt, so heißt der Operator  $A$  **selbstadjungiert**. Betrachtet man **Eigenwerte**  $\lambda \in \mathbb{R}$  und **Eigenelemente**  $u \in X$  mit  $u \neq 0$  eines selbstadjungierten Operators, welche der Eigenwertgleichung

$$Au = \lambda u$$

genügen, so sind Eigenelemente  $u_1$  und  $u_2$  zu verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  orthogonal. Für beliebige Operatoren  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  erweisen sich die speziellen Operatorprodukte  $A^*A \in \mathcal{L}(X, X)$  und  $AA^* \in \mathcal{L}(Y, Y)$  als selbstadjungiert. Die Eigenwerte dieser beiden Operatorprodukte stimmen überein und sind nichtnegativ.

Jeder Operator  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  mit einem endlichdimensionalen Bildraum,  $\dim(R(A)) = m$ , ist **vollstetig**. Dann besitzen die Operatoren  $A^*A$  und  $AA^*$  eine endliche Folge von nicht notwendig verschiedenen nichtnegativen Eigenwerten

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$$

und zugehörige  $m$ -elementige Orthonormalsysteme von Eigenelementen

$$\{u_i\}_{i=1}^m \subset X \quad \text{mit} \quad A^*Au_i = \lambda_i u_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

bzw.

$$\{v_i\}_{i=1}^m \subset Y \quad \text{mit} \quad AA^*v_i = \lambda_i v_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Andererseits ist ein vollstetiger Operator mit  $\dim(R(A)) = \infty$  dadurch charakterisiert, daß er eine gegen Null strebende unendliche Folge positiver Zahlen

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n \geq \dots \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

besitzt, die Eigenwerte sowohl von  $A^*A$  als auch von  $AA^*$  sind. Auch hier gibt es entsprechende Orthonormalsysteme von Eigenelementen  $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subset X$  mit  $A^*Au_i = \lambda_i u_i$  bzw.  $\{v_i\}_{i=1}^\infty \subset Y$  mit  $AA^*v_i = \lambda_i v_i$  zur Eigenwertfolge  $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ , wobei  $\{u_i\}_{i=1}^\infty$  ein vollständiges Orthonormalsystem im Teilraum  $\overline{R(A^*)} = \overline{R(A^*A)} = N(A)^\perp$  des Hilbertraumes  $X$  und  $\{v_i\}_{i=1}^\infty$  ein vollständiges Orthonormalsystem im Teilraum  $\overline{R(A)} = \overline{R(AA^*)} = N(A^*)^\perp$  des Hilbertraumes  $Y$  bilden.

Aus den obigen Aussagen folgt, daß für einen vollstetigen Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  der adjungierte Operator  $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$  auch wieder vollstetig ist.

### 3.1.3 Die Nashedsche Korrektheitsdefinition

Folgen wir den Überlegungen von M. Z. Nashed (s. [NAS87]), so gelangen wir zu einer weiteren Definition, deren Beziehung zur Hadamardschen Korrektheitsdefinition wir im folgenden diskutieren werden.

**Definition 3.1** Die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen  $X$  und  $Y$  heißt *korrekt nach Nashed*, wenn der Bildraum des Operators  $A$  abgeschlossen ist, d.h. wenn gilt

$$R(A) = \overline{R(A)}. \quad (3.2)$$

Ist der Bildraum von  $A$  nicht abgeschlossen, gilt also

$$R(A) \neq \overline{R(A)}, \quad (3.3)$$

so heißt (3.1) **inkorrekt nach Nashed**, und zwar **inkorrekt vom Typ I**, falls  $A$  kein vollstetiger Operator ist, jedoch **inkorrekt vom Typ II**, falls es sich bei  $A$  um einen vollstetigen Operator handelt.

Wegen Hilfssatz 2.2 aus Abschnitt 2.2.3 ist eine lineare Operatorgleichung (3.1) mit einem endlichdimensionalen Bildraum  $R(A)$  stets korrekt nach Nashed. Die Inkorrektheit vom Typ I ist genau dadurch gekennzeichnet, daß der Bildraum  $R(A)$  zwar nicht abgeschlossen ist, aber wenigstens einen unendlichdimensionalen abgeschlossenen Teilraum enthält. Wie wir noch genauer sehen werden (s. im weiteren Satz 3.4), führen alle vollstetigen linearen Operatoren  $A$ , deren Bildraum  $R(A)$  unendlichdimensional ist, auf eine Inkorrektheit vom Typ II. Nashed selbst vermerkt in seinen Arbeiten, daß die Inkorrektheit vom Typ I weniger stark ist als die Inkorrektheit vom Typ II. Dies läßt sich damit begründen, daß Inkorrektheit durch die glättende Eigenschaft des Operators  $A$  entsteht und vollstetige Operatoren  $A$  mit unendlichdimensionalem Bildraum

$R(A)$  in der Regel stärker glätten als nicht vollstetige Operatoren  $A$ . Die Situationen der Korrektheit, Inkorrekttheit vom Typ I und Inkorrekttheit vom Typ II werden im folgenden Abschnitt an drei Beispielen verdeutlicht.

### 3.1.4 Die Moore-Penrose-Inverse, Stabilitätsbetrachtungen und Beispiele

Im Kapitel 2 haben wir uns für Banachräume  $X$  und  $Y$  bei der Diskussion der Korrektheit linearer Operatorgleichungen im Sinne von Hadamard vielfach auf den Fall eines **injektiven** linearen Operators  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  zurückgezogen, für den eine Inverse  $A^{-1} : R(A) \subset Y \rightarrow X$  existiert. Im Hilbertraum können wir nun relativ bequem auch den **nichtinjektiven** Fall in die Betrachtungen einbeziehen, indem wir mit verallgemeinerten Inversen zum Operator  $A$  arbeiten. Wir konzentrieren uns dabei hier auf die **Moore-Penrose-Inverse**  $A^\dagger$ . Unter Verwendung von Eigenschaften dieser verallgemeinerten Inversen von  $A$  werden wir zeigen können, daß die Korrektheit nach Nashed gleichwertig ist mit der Erfüllung der Stabilitätsbedingung nach Hadamard (s. im folgenden Satz 3.2). Die Korrektheit nach Nashed einer linearen Operatorgleichung (3.1) ist also weder an die Existenz von Lösungen für alle rechten Seiten  $y$  noch an deren Eindeutigkeit gebunden.

Im Zusammenhang mit der Überwindung von Mehrdeutigkeiten bei der Lösung von Identifikationsproblemen haben wir in Abschnitt 2.2.1 den Begriff der **Minimum-Norm-Lösung** einer Operatorgleichung eingeführt. Für die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen  $X$  und  $Y$  kann man entsprechend formulieren, daß ein Element  $x_{mn} \in X$  mit

$$\|Ax_{mn} - y\|_Y = \min_{x \in X} \|Ax - y\|_Y \quad (3.4)$$

Minimum-Norm-Lösung genannt wird, wenn

$$\|x_{mn}\|_X = \min \left\{ \|\hat{x}\|_X : \|A\hat{x} - y\|_Y = \min_{x \in X} \|Ax - y\|_Y, \hat{x} \in X \right\} \quad (3.5)$$

gilt. Wir überlegen uns, daß für  $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$  eine solche Minimum-Norm-Lösung  $x_{mn} = x_{mn}(y)$  stets existiert und eindeutig bestimmt ist. Jedes Element  $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$  läßt sich nämlich darstellen in der Form

$$y = A\tilde{x} + y_{ort}, \quad \tilde{x} = x_0 + x_{ort}.$$

Dabei sind für gegebenes  $y$  die Elemente  $y_{ort} \in R(A)^\perp = N(A^*)$  und  $x_{ort} \in N(A)^\perp$  eindeutig bestimmt, während das Nullraumelement  $x_0 \in N(A)$  beliebig gewählt werden kann. Wegen

$$\|Ax - y\|_Y^2 = \|Ax - A\tilde{x}\|_Y^2 + \|y_{ort}\|_Y^2$$

minimieren genau alle Elemente  $\tilde{x}$ , welche auch die Gleichung  $A^*A\tilde{x} = A^*y$  erfüllen, die Defektnorm  $\|Ax - y\|_Y$ . Darunter ist wegen  $\|\tilde{x}\|_X^2 = \|x_0\|_X^2 + \|x_{ort}\|_X^2$   $x_{mn} = x_{ort}$  das eindeutig bestimmte normkleinste Element und damit die eindeutig bestimmte Minimum-Norm-Lösung. Übrigens existieren keine Minimum-Norm-Lösungen für  $y \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$  (s. Aufgabe 3.1).

Wir können nun die auf der Menge  $R(A) \oplus R(A)^\perp$  definierte **Moore-Penrose-Inverse**  $A^\dagger$  von  $A$  über die Beziehung

$$A^\dagger y := x_{mn}, \quad y \in R(A) \oplus R(A)^\perp \quad (3.6)$$

eingeführen. Wichtige Eigenschaften von  $A^\dagger$  entnimmt man dem folgenden Hilfssatz (s. [LOU89, S. 47]):

**Hilfssatz 3.1** *Der in Hilberträumen  $X$  und  $Y$  über die Beziehung (3.6) definierte Operator*

$$A^\dagger : R(A) \oplus R(A)^\perp \subseteq Y \rightarrow X$$

*ist linear mit*

$$N(A^\dagger) = R(A)^\perp \quad \text{und} \quad R(A^\dagger) = N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}.$$

*Weiter ist  $A^\dagger$  genau dann stetig, wenn  $R(A)$  abgeschlossen ist.*

Unmittelbar aus der Definition 3.1 ergibt sich mit Hilfssatz 3.1 der nachfolgende Satz.

**Satz 3.1** *Die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen  $X$  und  $Y$  ist korrekt nach Nashed genau dann, wenn die Moore-Penrose-Inverse  $A^\dagger$  des Operators  $A$  stetig ist.*

Im Falle der Korrektheit nach Nashed existieren für beliebige Eingangsdaten  $y \in Y$  Minimum-Norm-Lösungen  $x_{mn}$  zu (3.1), und  $A^\dagger$  ist ein auf dem gesamten Hilbertraum  $Y$  definierter beschränkter linearer Operator  $A^\dagger \in \mathcal{L}(Y, X)$ . Kleine Störungen in der rechten Seite  $y$  führen dann auch nur zu kleinen Störungen in der Minimum-Norm-Lösung. Wie der folgende Satz zeigt, hat dies aber auch noch weitergehende Konsequenzen für die Stabilität des Problems (3.1) im Sinne der Hadamardschen Korrektheitsdefinition (s. Definition 2.3 in Abschn. 2.2.1).

**Satz 3.2** Für eine lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen  $X$  und  $Y$  ist die Konvergenzbedingung (2.20) und damit die Hadamardsche Stabilitätsbedingung aus Definition 2.3 genau dann erfüllt, wenn (3.1) korrekt nach Nashed ist.

Ist nämlich (3.1) korrekt nach Nashed, also (3.2) erfüllt und  $A^\dagger \in \mathcal{L}(Y, X)$ , dann erhalten wir für eine Folge  $\{y_n\} \subset R(A)$  mit  $\|y_n - y_0\|_Y \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  von gestörten Elementen zu  $y_0 \in R(A)$  und zugehörigen Urbildmengen

$$U(y_n) := \{x \in X : Ax = y_n\} = \{x = A^\dagger y_n + x_N : x_N \in N(A)\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

die Beziehung (2.20) und damit die Stabilitätsbedingung der Hadamardschen Korrektheitsdefinition, weil wir mit  $\|A^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X)} < \infty$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \text{qdist}(U(y_n), U(y_0)) &:= \sup_{x_n \in U(y_n)} \inf_{x_0 \in U(y_0)} \|x_n - x_0\|_X \\ &= \|A^\dagger(y_n - y_0)\|_X \leq \|A^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|y_n - y_0\|_Y \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

bekommen. Andererseits gilt die schon eben verwendete Identität

$$\text{qdist}(U(y_n), U(y_0)) := \sup_{x_n \in U(y_n)} \inf_{x_0 \in U(y_0)} \|x_n - x_0\|_X = \|A^\dagger(y_n - y_0)\|_X$$

für  $y_n \in R(A)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) auch, wenn (3.1) mit (3.3) inkorrekt nach Nashed und  $A^\dagger$  ein unstetiger, also unbeschränkter linearer Operator ist. Wegen der Unbeschränktheit von  $A^\dagger$  gibt es dann eine Folge  $\{f_n\} \subset R(A)$  mit  $\|f_n\|_Y = 1$  und  $\varphi_n := \|A^\dagger f_n\|_X \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Setzt man  $\delta_n := \|y_n - y_0\|_Y$  und  $y_n := y_0 + \delta_n f_n$ , so erhält man

$$\text{qdist}(U(y_n), U(y_0)) = \|y_n - y_0\|_Y \|A^\dagger f_n\|_X = \delta_n \varphi_n.$$

Nur dann, wenn  $\delta_n$  für  $n \rightarrow \infty$  bezüglich  $\varphi_n$  schnell genug gegen Null strebt, ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \varphi_n = 0$ . Es gibt also Folgen  $y_n \rightarrow y_0$  in  $Y$ , für die (2.20) verletzt ist. Die Stabilitätsbedingung der Hadamardschen Korrektheitsdefinition ist folglich nicht erfüllt, sobald (3.1) inkorrekt nach Nashed ist.

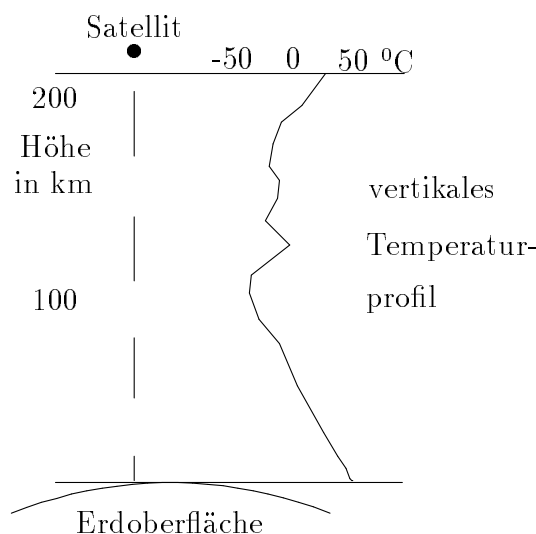
Aus den obigen Überlegungen folgt auch, daß unter der Bedingung (3.3) die Minimum-Norm-Lösungen  $A^\dagger y_n$  zu gestörter rechter Seite  $y_n \in R(A)$  von (3.1) nicht notwendigerweise gegen die Minimum-Norm Lösung  $A^\dagger y_0$  zu exakter rechter Seite  $y_0 \in R(A)$  streben, wenn mit  $y_n \rightarrow y_0$  in  $Y$  die Störungen für  $n \rightarrow \infty$  beliebig klein werden.

An drei Beispielen wollen wir uns nun die drei möglichen Alternativen von Definition 3.1, Korrektheit, Inkorrekttheit vom Typ I und Inkorrekttheit vom

Typ II, veranschaulichen. Wir beginnen mit dem nach Nashed korrekten Fall. Als Folgerung von Satz 3.2 und Hilfssatz 2.2 erhält man diesen Fall stets bei Betrachtung endlichdimensionaler Räume:

**Folgerung 3.1** *Wenn der Bildraum  $R(A)$  endlichdimensional ist, erfüllt die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen  $X$  und  $Y$  immer die Hadamardsche Stabilitätsbedingung. Dies ist insbesondere dann stets der Fall, wenn  $X$  und  $Y$  selbst endlichdimensionale Räume sind.*

**Beispiel 3.1** Ein klassisches Identifikationsproblem der Satellitenmeteorologie, das seit mehr als 20 Jahren von Meteorologen und Mathematikern gleichermaßen mit Interesse betrachtet wird, ist die **Rekonstruktion vertikaler Lufttemperaturprofile** über einem festen Punkt der Erdoberfläche auf der Grundlage von Meßdaten eines in großer Höhe über diesem Standpunkt befindlichen Satelliten (s. Bild 3.1). Die Kenntnis der Temperaturverteilung in verschiedenen Höhen der Erdatmosphäre stellt einen wichtigen Faktor für die Gestaltung einer zuverlässigen Wettervorhersage dar.



**Bild 3.1** Identifikation von Atmosphärentemperaturen aus Satellitendaten

Dabei ist die Lösung des inversen Problems der Identifikation von vertikalen Temperaturprofilen aus indirekten Messungen wesentlich wirtschaftlicher als die direkte Messung der vertikalen Temperaturverteilung. Bei letzterer benötigt man Ballons, die Wettersonden in große Höhen tragen. Das ist zum einen sehr teuer und zum anderen über unbewohnten Gebieten nur schwierig zu realisieren.





stetig von  $\underline{y}$  abhängt. Für den sogenannten Vollrangfall  $\text{rang}(\underline{A}) = n$ , bei dem die Matrix  $\underline{A}$  eine Anzahl  $n$  linear unabhängiger Zeilen und Spalten besitzt, gilt  $\underline{A}^\dagger = (\underline{A}^T \underline{A})^{-1} \underline{A}^T$  und damit die Darstellung

$$\underline{x}_{mn} = (\underline{A}^T \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{y} \quad (3.9)$$

mit einer regulären Matrix  $\underline{A}^T \underline{A}$ . Dieser Vollrangfall entspricht der Situation des injektiven Operators  $A$  in (3.1). Für den Fall  $m < n$  und  $\text{rang}(A) = m$  sei auf die Aufgabe 3.2 verwiesen. Obwohl lineare Gleichungssysteme (3.7) mit rechteckiger Matrix  $\underline{A}$  stets korrekt nach Nashed sind, können sie aber wie die in Beispiel 2.2 vorgestellten Gleichungssysteme mit quadratischer Matrix **schlecht konditioniert** sein, d.h. eine große Konditionszahl aufweisen, so daß kleine relative Fehler in der rechten Seite  $\underline{y}$  zu großen relativen Fehlern in der Minimum-Norm-Lösung  $\underline{x}_{mn}$  führen. Die **Konditionszahl** hat hier im rechteckigen Falle die Gestalt  $\text{cond}(A) := \|\underline{A}\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} \|\underline{A}^\dagger\|_{\mathbb{R}^{n \times m}}$ , deren Darstellung man genauer in Formel (3.32) von Abschnitt 3.1.5 finden wird.  $\square$

Wir bezeichnen mit

$$\text{span}(g_1, g_2, \dots, g_m) := \left\{ z \in Z : z = \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j, \lambda_j \in \mathbb{R} \ (j = 1, 2, \dots, m) \right\}$$

die **lineare Hülle** einer Folge  $\{g_j\}_{j=1}^m$  von Elementen des linearen Raumes  $Z$ . Sind die  $m$  Elemente der Folge linear unabhängig, so bildet die lineare Hülle  $\tilde{Z} := \text{span}(g_1, g_2, \dots, g_m)$  einen  $m$ -dimensionalen Teilraum von  $Z$ . Die Elemente  $g_1, g_2, \dots, g_m$  stellen dann eine **Basis** in diesem Teilraum  $\tilde{Z}$  dar, d.h., jedes Element  $z \in \tilde{Z}$  läßt sich als **Linearkombination**  $z = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m$  der Basiselemente mit eindeutig bestimmten reellen Multiplikatoren  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  schreiben.

Abgesehen von den in Beispiel 3.1 betrachteten linearen Gleichungssystemen treten nach Nashed korrekte lineare Operatorgleichungen (3.1) auch in unendlichdimensionalen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  auf, wenn der Bildraum  $R(A)$  des Operators  $A$  endlichdimensional mit  $\dim(R(A)) = m$  ist. Dann heißt der Operator  $A$  **ausgeartet**, ist vollstetig und besitzt eine Darstellung

$$A x = \sum_{j=1}^m \langle x, f_j \rangle_X g_j, \quad (3.10)$$

wobei  $\{g_j\}_{j=1}^m$  eine Basis des Bildraums  $R(A)$  bezeichnet. Dabei stellen  $\langle x, f_j \rangle_X$  mit  $f_j \in X$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) nach dem Satz von Riesz beschränkte lineare Funktionale auf dem Raum  $X$  dar.

Eine in  $X$  lösbare Operatorgleichung (3.1) mit  $A$  vom Typ (3.10) kann als lineares Gleichungssystem (3.7) geschrieben werden, wenn man einen Ansatz  $x = \sum_{i=1}^n \underline{x}_i h_i$  mit  $\text{span}(Ah_1, Ah_2, \dots, Ah_n) = \text{span}(g_1, g_2, \dots, g_m)$ ,  $Ah_i = \sum_{j=1}^m \underline{a}_{ji} g_j$  und  $y = \sum_{j=1}^m \underline{y}_j g_j$  verwendet. Wegen

$$Ax = \sum_{i=1}^n \underline{x}_i Ah_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \underline{a}_{ji} \underline{x}_i g_j = \sum_{j=1}^m \underline{y}_j g_j = y$$

müssen genau die  $m$  linearen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^n \underline{a}_{ji} \underline{x}_i = \underline{y}_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

in den  $n$  Unbekannten  $\underline{x}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) erfüllt sein.

Auch wenn mit  $\dim(R(A)) = \infty$  der Operator  $A$  nicht ausgeartet ist, kann der Bildraum  $R(A)$  abgeschlossen sein. Dies ist z.B. für Operatorgleichungen der Gestalt (2.50) der Fall, die wir als lineare Integralgleichungen zweiter Art häufig bei der Modellierung direkter Aufgaben antreffen. Diese Gleichungen spielen jedoch bei der Identifikation von Parameterfunktionen praktisch keine Rolle.

Ein Kriterium zur Unterscheidung vollstetiger Operatoren  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  von nicht vollstetigen liefert der Hilfssatz 3.2. Dieser Hilfssatz ist sehr nützlich, um nach Nashed inkorrekte Aufgaben vom Typ II von solchen vom Typ I zu unterscheiden.

**Hilfssatz 3.2** *In Hilberträumen  $X$  und  $Y$  ist der beschränkte lineare Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  genau dann vollstetig, wenn für jede in  $X$  schwach konvergente Folge  $x_n \rightharpoonup x_0$  für  $n \rightarrow \infty$  die zugehörige Bildfolge stark in  $Y$  konvergiert, also  $Ax_n \rightarrow Ax_0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt.*

Für das folgende Beispiel einer nach Nashed vom Typ I inkorrekten Operatorgleichung (3.1) benötigen wir als Bildraum  $Y$  den unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum  $l^2$ , der alle quadratisch summierbaren unendlichen Zahlenfolgen  $\xi = \{\xi_n\}$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty$  enthält. Dabei bilden

$$\langle \xi, \zeta \rangle_{l^2} := \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \zeta_n \quad (3.11)$$

und

$$\|\xi\|_{l^2} := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2} \quad (3.12)$$

Skalarprodukt und Norm in diesem Raum. Der dazu analoge separable Hilbertraum für reelle Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$  ist der schon mehrfach verwendete Raum  $L^2(a, b)$  der quadratisch integrierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2(a,b)} := \int_a^b u(t)v(t) dt \quad (3.13)$$

(bezüglich der Norm s. Formel (2.7)). Wir verwenden den Spezialfall  $L^2(0, 1)$  als Raum  $X$  in Beispiel 3.2.

**Beispiel 3.2** In diesem Beispiel betrachten wir das inverse Problem der Identifikation einer auf dem Einheitsintervall definierten elektrischen Ladungsdichtefunktion  $x(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) aus Daten der **k-ten Momente**

$$m_k(x) := \int_0^1 t^k x(t) dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

der Ladungsverteilung, ein **Hausdorffsches Momentenproblem**. Dieses Problem kann man als System

$$m_{j-1}(x) = y_j \quad (j = 1, 2, \dots)$$

unendlich vieler Gleichungen in der unbekanntenen Funktion  $x$  mit einer unendlichen reellen Zahlenfolge  $\{y_j\} \subset \mathbb{R}$  als rechter Seite schreiben bzw. als Operatorgleichung (3.1), wenn wir für die Hilberträume  $X := L^2(0, 1)$  und  $Y := l^2$  sowie für den linearen Operator  $A \in \mathcal{L}(L^2(0, 1), l^2)$

$$(Ax)_j := \int_0^1 t^{j-1} x(t) dt \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.14)$$

setzen. Es läßt sich zeigen, daß für den Operator  $A$  aus (3.14) die Beziehungen

$$\|Ax\|_{l^2} \leq \sqrt{\pi} \|x\|_{L^2(0,1)} \quad \text{und} \quad \|A\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1), l^2)} := \sup_{x \in L^2(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_{l^2}}{\|x\|_{L^2(0,1)}} = \sqrt{\pi}$$

gelten. Falls das hier formulierte Hausdorffsche Momentenproblem lösbar ist, was nur für spezielle Datenfolgen  $\{y_j\}$  der Fall sein wird, so ist es eindeutig lösbar, d.h., der Operator  $A$  ist injektiv. Darüber hinaus gilt der folgende Satz:

**Satz 3.3** *Die aus dem Hausdorffschen Momentenproblem resultierende lineare Operatorgleichung (3.1) mit  $A \in \mathcal{L}(L^2(0, 1), l^2)$  aus Formel (3.14) ist inkorrekt nach Nashed vom Typ I, d.h., der Bildraum  $R(A)$  ist nicht abgeschlossen,  $A^{-1}$  also unbeschränkt, und  $A$  ist kein vollstetiger Operator.*

Wir überzeugen uns von der Inkorrektheit des Hausdorffschen Momentenproblems, indem wir ein Orthonormalsystem  $\{e_n\} \subset L^2(0,1)$  betrachten, dessen Funktionen fast überall gleichmäßig beschränkt sind, d.h., es soll gelten  $\|e_n\|_{L^\infty(0,1)} \leq C < \infty$  für  $n = 1, 2, \dots$ . Zum Beispiel bilden die Funktionen  $e_n(t) = \sqrt{2} \sin n\pi t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) mit  $\|e_n\|_{L^\infty(0,1)} \leq \sqrt{2}$  ein solches System. Dann haben wir schwache Konvergenz  $e_n \rightharpoonup \mathbf{0}$  in  $L^2(0,1)$ , und für die Bildfolge  $\{Ae_n\}$  ergibt sich

$$\|Ae_n\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \int_0^1 t^{j-1} e_n(t) dt \right)^2 \leq C^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left( \int_0^1 t^{j-1} dt \right)^2 = C^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{C^2 \pi^2}{6}.$$

Wegen  $e_n \rightharpoonup \mathbf{0}$  und der Tatsache, daß jede der Funktionen  $t^{j-1}$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) ein Element in  $L^2(0,1)$  vertritt, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^{j-1} e_n(t) dt = 0$  für  $j = 1, 2, \dots$ . Dies hat nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium für Reihen die Vertauschbarkeit der Grenzübergänge und damit die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ae_n\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^1 t^{j-1} e_n(t) dt \right)^2 = 0$$

zur Folge. Im Falle injektiver Operatoren  $A$  gilt stets  $x = A^\dagger Ax$  für alle Elemente des betrachteten Hilbertraumes. Wäre nun  $A^\dagger$  ein beschränkter linearer Operator, so müßte für eine Konstante  $K > 0$  und alle  $n$  die Abschätzung

$$\|e_n\|_{L^2(0,1)} = \|A^\dagger(Ae_n)\|_{L^2(0,1)} \leq K \|Ae_n\|_{l^2}$$

gelten. Wegen  $\|e_n\|_{L^2(0,1)} = 1$  und  $\|Ae_n\|_{l^2} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  existiert eine solche Konstante aber nicht, und wir haben wegen Hilfssatz 3.1 die Situation  $R(A) \neq \overline{R(A)}$  vorliegen, welche die Inkorrektheit nach Nashed ausweist.

Um die Aussage des Satzes 3.3 vollständig zu erhalten, zeigen wir nun noch, daß die Inkorrektheit des Hausdorffschen Momentenproblems vom Typ I ist,  $A$  also keinen vollstetigen Operator repräsentiert. Einer Idee von A. Neubauer folgend betrachten wir dazu eine in  $L^2(0,1)$  schwach gegen die Nullfunktion konvergierende Folge  $\{x_n\} \subset L^2(0,1)$ , die in  $L^\infty(0,1)$  nicht gleichmäßig beschränkt ist und deren Bildfolge  $\{Ax_n\} \subset l^2$  nicht gegen das Nullelement  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$  in  $l^2$  strebt. So eine Folge ist z.B.  $\{x_n\} = \{\sqrt{n} t^n$  ( $0 \leq t \leq 1$ )}, denn  $x_n \rightharpoonup \mathbf{0}$  in  $L^2(0,1)$  ist gleichwertig mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t x_n(\tau) d\tau = 0$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Wir haben

$$\text{für diese Argumente } t \text{ aber offensichtlich } \left| \int_0^t \sqrt{n} \tau^n d\tau \right| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} t^{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Weiter gilt  $\|Ax_n\|_{l^2} \not\rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  wegen

$$\begin{aligned} \|Ax_n\|_{l^2}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left( \int_0^1 t^{j-1} \sqrt{n} t^n dt \right)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{n}}{n+j} \right)^2 = \\ &= n \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \geq n \int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Wäre  $A$  vollstetig, so müßte  $x_n \rightarrow \mathbf{0}$  in  $L^2(0,1)$  nach Hilfssatz 3.2 die Beziehung  $Ax_n \rightarrow \mathbf{0}$  in  $l^2$  implizieren. Dies ist aber nicht der Fall, womit die Behauptungen des Satzes 3.3 sämtlich gezeigt sind.  $\square$

Wir wenden uns nun dem im Bereich der linearen inversen Aufgaben wesentlich häufiger anzutreffenden Fall einer inkorrekten Operatorgleichung (3.1) im Hilbertraum mit **vollstetigem** Operator  $A$  zu.

**Beispiel 3.3** Als Beispiel eines Identifikationsproblems, das auf eine Gleichung mit vollstetigem Operator führt, wollen wir im folgenden ein vereinfachtes ein-dimensionales Problem der **Gravimetrie** betrachten (s. auch [GRO93, S.9]). Bei der Gravimetrie werden lokal konzentrierte Abweichungen der Dichte von Materialien im Erdboden, wie sie zum Beispiel typisch sind für Lagerstätten von Energieträgern wie Kohle und Erdöl, durch gemessene Abweichungen der dadurch verursachten Störungen des Kraftfeldes der Erde bestimmt.

Ein Flugzeug überfliege in Einheitshöhe eine Strecke der Länge  $L$  auf der Erdoberfläche und messe die Vertikalkomponente der Gravitationskraft, welche durch die darunterliegenden Erdschichten bewirkt wird. Dabei soll eine auf dieser Strecke in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche vermutete örtlich veränderliche Anomalie  $x(t)$  ( $0 \leq t \leq L$ ) der Massendichte bestimmt werden, wobei  $t$  die Ortspunkte der Strecke parametrisiert. Um diese Anomalie herum nehmen wir eine homogene Massenverteilung an. Mißt man vom Flugzeug aus in Höhe 1 über dem Punkt  $s$  der Strecke die Gravitationsanomalie, so bewirkt eine Masse  $m$  im Punkt  $t$  eine Anziehungskraft, deren Betrag  $|F|$  indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes zwischen Flugzeug und betrachtetem Massepunkt ist und somit nach dem Satz des Pythagoras mit der Gravitationskonstante  $\gamma$  den Wert  $|F| = \frac{\gamma m}{(s-t)^2+1}$  besitzt. Gemessen wird aber die Vertikalkomponente  $F_{vert}$  der Kraft, für die man sich leicht die Formel  $F_{vert} = \frac{\gamma m}{((s-t)^2+1)^{3/2}}$  überlegt. Enthalten die Werte  $y(s)$  die zur Gravitationskonstante ins Verhältnis gesetzte Gravitationsanomalie über dem Punkt  $s$  der Strecke, so läßt sich das Identifikationsproblem als lineare Fredholmsche Integralgleichung (2.42) der speziellen

Gestalt

$$\int_0^L \left( (s-t)^2 + 1 \right)^{-\frac{3}{2}} x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq L) \quad (3.15)$$

und damit im Raum  $X = Y := L^2(0, L)$  als Operatorgleichung (3.1) mit einem Operator  $A$  aus Formel (2.44) schreiben. Es sei noch erwähnt, daß der Kern der Integralgleichung (3.15) und damit der entsprechende Operator  $A$  nicht ausgeartet im Sinne von Formel (3.10) ist, d.h., wir haben  $\dim(R(A)) = \infty$ . Der ausgeartete Fall würde eine Kerndarstellung

$$k(s, t) = \sum_{i=1}^m f_i(t) g_i(s)$$

erfordern, die sich hier nicht finden läßt. Da die Kernfunktion auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig und sogar unendlich oft differenzierbar ist, besitzt sie natürlich auch die Eigenschaft der quadratischen Integrierbarkeit  $k \in L^2((0, L) \times (0, L))$ . Dann ist der in diesem Beispiel betrachtete Operator  $A \in \mathcal{L}(L^2(0, L), L^2(0, L))$  wegen Hilfssatz 2.4 aus Abschnitt 2.2.3 vollstetig. Da aber die Injektivität von  $A$  hier nicht sofort erkennbar ist (s. Aufgabe 3.3), läßt sich die vermutete Inkorrektheit von (3.15) im Sinne von  $R(A) \neq \overline{R(A)}$  und damit die Verletzung der Stabilitätsbedingung (2.20) nicht ohne weiteres aus Satz 2.3 schlußfolgern. Die nachfolgenden allgemeinen Betrachtungen zeigen jedoch, daß (3.15) inkorrekt nach Nashed vom Typ II ist, ohne daß dafür die Injektivität von  $A$  benötigt wird.  $\square$

Die Grundlage dafür bietet der folgende Hilfssatz (s. [ENG97, S.152]):

**Hilfssatz 3.3** *Die Moore-Penrose-Inverse  $A^\dagger$  eines in Hilberträumen  $X$  und  $Y$  definierten vollstetigen Operators  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  mit  $\dim(R(A)) = \infty$  ist ein unbeschränkter und damit unstetiger linearer Operator.*

Als direkte Konsequenz der Hilfssätze 2.2, 3.1 und 3.3 erhält man schließlich Satz 3.4, der für den Fall vollstetiger Operatoren  $A$  die Situationen von Korrektheit und Inkorrektheit umfassend beschreibt.

**Satz 3.4** *Im Falle eines vollstetigen Operators  $A$  ist die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen  $X$  und  $Y$  korrekt nach Nashed genau dann, wenn der Bildraum  $R(A)$  des Operators  $A$  endlichdimensional ist. Andernfalls, d.h. für vollstetiges  $A$  und  $\dim(R(A)) = \infty$ , ist (3.1) inkorrekt nach Nashed vom Typ II.*

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 3.4 ergibt sich, daß die Integralgleichung (3.15) des Gravimetrieproblems aus Beispiel 3.3 inkorrekt nach Nashed vom Typ II ist und damit für diese Gleichung die Stabilitätsbedingung (2.20) verletzt ist. Der Satz besagt aber viel mehr, nämlich daß alle linearen Fredholmschen Integralgleichungen (2.42) mit quadratisch integrierbarem Kern  $k \in L^2((c, d) \times (a, b))$  im Raumpaar  $X = L^2(a, b)$  und  $Y = L^2(c, d)$  unabhängig von der Erfüllung der Eindeutigkeitsbedingung instabil sind, d.h. kleine Störungen der Datenfunktionen  $y$  solcher inverser Aufgaben zu beliebig großen Abweichungen der erhaltenen Lösungsfunktionen  $x$  von der tatsächlichen Lösungsmenge führen können.

### 3.1.5 Singulärwertzerlegung vollstetiger Operatoren

Die Grundlage für die genauere Untersuchung linearer Operatorgleichungen (3.1) mit vollstetigen Operatoren  $A$  bildet der als Hilfssatz 3.4 formulierte **Polarzerlegungssatz**, bei dessen Formulierung wir uns an das Buch [BAU87, S. 60-61] von J. Baumeister anlehnen.

**Hilfssatz 3.4** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  ein vollstetiger Operator, der zwischen den separablen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  wirkt. Dann existieren eine Indexmenge  $J = \{1, 2, \dots, m\}$  für den Fall  $\dim(R(A)) = m$  bzw.  $J = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  für den Fall  $\dim(R(A)) = \infty$ , Orthonormalsysteme  $\{u_j\}_{j \in J}$  in  $X$  bzw.  $\{v_j\}_{j \in J}$  in  $Y$  und eine Folge  $\{\sigma_j\}_{j \in J}$  positiver reeller Zahlen mit folgenden Eigenschaften:*

$$\{\sigma_j\}_{j \in J} \text{ ist nichtwachsend, und es gilt } \lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_j = 0 \text{ für } J = \mathbb{N}; \quad (3.16)$$

$$A u_j = \sigma_j v_j \quad (j \in J) \quad \text{und} \quad A^* v_j = \sigma_j u_j \quad (j \in J). \quad (3.17)$$

Für alle  $x \in X$  gibt es ein Element  $x_0 \in N(A)$  mit

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle_X u_j \quad \text{und} \quad A x = \sum_{j \in J} \sigma_j \langle x, u_j \rangle_X v_j. \quad (3.18)$$

Es gilt für alle  $y \in Y$

$$A^* y = \sum_{j \in J} \sigma_j \langle y, v_j \rangle_Y u_j. \quad (3.19)$$

Der Hilfssatz besagt, daß es für einen vollstetigen Operator in jedem Falle ein **singuläres System** im Sinne der folgenden Definition gibt.

**Definition 3.2** *Es seien  $X$  und  $Y$  separable Hilberträume und  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  ein vollstetiger Operator. Dann heißt die zur Indexmenge  $J$  mit*

$$J = 1, 2, \dots, m \quad \text{für} \quad \dim(R(A)) = m$$

bzw.

$$J = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \quad \text{für} \quad \dim(R(A)) = \infty$$

gehörige Tripelfolge

$$\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j \in J} \quad \text{s i n g u l ä r e s S y s t e m f ü r } A,$$

wenn  $\sigma_j > 0$ ,  $u_j \in X$  und  $v_j \in Y$  wie in Hilfssatz 3.4 definiert sind und die Bedingungen (3.16) – (3.19) erfüllen. Insbesondere heißen die positiven Zahlen  $\sigma_j$  *S i n g u l ä r w e r t e* von  $A$ . Weiterhin nennt man die in Formel (3.18) angegebene Zerlegung *S i n g u l ä r w e r t z e r l e g u n g* des Operators.

Es sei vermerkt, daß

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sigma_1 \quad (3.20)$$

gilt und aus (3.17) sofort

$$A^*A u_j = \sigma_j^2 u_j \quad \text{sowie} \quad A A^* v_j = \sigma_j^2 v_j \quad (3.21)$$

folgen, d.h., die singulären Werte  $\sigma_j$  sind definiert als Quadratwurzeln der positiven Eigenwerte  $\lambda_j$  sowohl des Operators  $A^*A$  als auch des Operators  $A A^*$ . Die Orthonormalsysteme  $\{u_j\}_{j \in J}$  bzw.  $\{v_j\}_{j \in J}$  des singulären Systems sind in  $\overline{R(A^*)}$  bzw.  $\overline{R(A)}$  vollständige Orthonormalsysteme der Eigenelemente von  $A^*A$  bzw.  $A A^*$ .

Unter Verwendung der in Definition 3.2 eingeführten singulären Systeme suchen wir nun Lösbarkeitseigenschaften und Lösungsdarstellungen zu linearen Operatorgleichungen (3.1) mit vollstetigen Operatoren. Unabhängig von der Korrektheit oder Inkorrektheit solcher Gleichungen können ihre Lösungen mit Hilfe von Fourierreihen explizit ausgedrückt werden. Jede rechte Seite  $y \in Y$  einer Gleichung (3.1) läßt sich nämlich darstellen als Fourierreihe

$$y = y_0 + \sum_{j \in J} \langle y, v_j \rangle_Y v_j \quad (3.22)$$

mit einem eindeutig bestimmten Element  $y_0 \in N(A^*)$ , wobei  $\langle y_0, v_j \rangle_Y = 0$  ( $j \in J$ ) gilt. Für die Lösung  $x$  in (3.1) verfügt man über die Darstellung (3.18).



Damit erhält die Operatorgleichung (3.1) in Reihenform die Gestalt

$$\sum_{j \in J} \sigma_j \langle x, u_j \rangle_X v_j = y_0 + \sum_{j \in J} \langle y, v_j \rangle_Y v_j. \quad (3.23)$$

Aus der Gleichung (3.23) folgt unmittelbar, daß  $y_0 = \mathbf{0}$  bzw. damit gleichwertig  $y \in N(A^*)^\perp$  eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (3.1) darstellt. Um daraus aber eine hinreichende Bedingung zu erhalten, müssen zum einen zusätzlich die Gleichungen

$$\sigma_j \langle x, u_j \rangle_X = \langle y, v_j \rangle_Y \quad \text{für alle } j \in J$$

zwischen den Fourierkoeffizienten von Lösung und rechter Seite gelten, zum anderen muß

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j \quad (3.24)$$

tatsächlich ein Element des Hilbertraums  $X$  repräsentieren. In der Darstellung (3.24), die alle potentiellen Lösungen von (3.1) besitzen, bedeutet  $x_0 \in N(A)$  ein beliebig gewähltes Nullraumelement. Dabei ist im Falle eines ausgearteten Operators  $A$  mit  $J = \{1, 2, \dots, m\}$

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^m \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j$$

stets ein Element aus  $X$ . Für alle  $y \in Y$  stellt dann speziell

$$x_{mn} = A^\dagger y = \sum_{j=1}^m \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j$$

die eindeutig bestimmte Minimum-Norm-Lösung von (3.1) dar.

Interessanter ist der nichtausgeartete Fall mit  $\dim(R(A)) = \infty$ , für welchen in der Darstellung (3.24) die Bedingung  $x \in X$  der **Picardschen Bedingung**

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y^2}{\sigma_j^2} < \infty \quad (3.25)$$

entspricht. Die Picardsche Bedingung, welche die Zugehörigkeit der Folge von Quotienten  $\left\{ \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} \right\}$  zum Raum  $l^2$  fordert und die eine Konvergenzbedingung für die in (3.24) auftretende Fourierreihe darstellt, ist genau dann erfüllt, wenn  $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$  gilt, also die Elemente  $y$  zum Definitionsbereich der Moore-Penrose-Inversen  $A^\dagger$  gehören. Wegen

$$\|Ax - y\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (\sigma_j \langle x, u_j \rangle_X - \langle y, v_j \rangle_Y)^2 + \|y_0\|_Y^2$$

ist für die Elemente  $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$

$$x_{mn} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j \quad (3.26)$$

Minimum-Norm-Lösung von (3.1). Die Moore-Penrose-Inverse besitzt für vollstetige Operatoren  $A$  also im allgemeinen die Darstellung

$$A^\dagger y = \sum_{j \in J} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j, \quad y \in R(A) \oplus R(A)^\perp. \quad (3.27)$$

**Satz 3.5** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  in separablen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  ein vollstetiger Operator mit dem singulären System  $\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j \in J}$ . Die lineare Operatorgleichung (3.1) besitzt genau dann eine Lösung, wenn  $y \in N(A^*)^\perp$  gilt und im Falle  $\dim(R(A)) = \infty$  zusätzlich die Picardsche Bedingung (3.25) erfüllt ist. Alle Elemente  $x$ , die der Darstellung (3.24) genügen, sind dann Lösungen von (3.1). Für rechte Seiten  $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$  charakterisiert die Darstellung (3.24) genau die Elemente mit kleinster Defektnorm  $\|Ax - y\|_Y$ . Unter diesen Elementen ist dann mit  $x_0 = \mathbf{0}$  die eindeutig bestimmte Minimum-Norm-Lösung  $x_{mn} = A^\dagger y$  von (3.1) zu finden.*

Der über einen Operator  $A$  vom Typ (3.10) beschriebene ausgeartete Fall der linearen Operatorgleichung (3.1) kann, wie wir gesehen haben, durch ein lineares Gleichungssystem (3.7) mit  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$  und einer den Operator  $A$  in seinen wesentlichen Komponenten charakterisierenden Matrix  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  dargestellt werden. Wir verwenden in beiden endlichdimensionalen Räumen  $X$  und  $Y$  das zur Euklidischen Norm  $\|\cdot\|_2$  (s. Formeln (2.18) und (2.36)) gehörige Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  (s. Formel (3.8)) und führen der Allgemeinheit halber noch das Symbol  $r := \text{rang}(\underline{A}) \leq \min(m, n)$  für den Rang der Matrix  $\underline{A}$  ein. Dann existiert für die Matrix  $\underline{A}$  ein singuläres System  $\{\sigma_j; \underline{u}_j; \underline{v}_j\}_{j=1}^r$  mit den singulären Werten

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

und zwei Orthonormalsystemen von Vektoren

$$\{\underline{u}_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^n \quad \text{bzw.} \quad \{\underline{v}_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{R}^m,$$

so daß die Beziehungen

$$\underline{A} \underline{u}_j = \sigma_j \underline{v}_j, \quad \underline{A}^T \underline{v}_j = \sigma_j \underline{u}_j \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (3.28)$$

gelten und eine Singulärwertzerlegung der Matrix  $\underline{A}$  in Form des Matrizenprodukts

$$\underline{A} = \underline{V} \left( \begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_r & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \underline{U}^T \quad (3.29)$$

mit den **orthogonalen** Matrizen

$$\underline{U} = (\underline{u}_1 | \underline{u}_2 | \dots | \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{bzw.} \quad \underline{V} = (\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

möglich wird. Für orthogonale Matrizen  $\underline{U}$ , deren Zeilen und Spalten zueinander paarweise orthogonal sind, gilt dabei bekanntlich  $\underline{U}^T = \underline{U}^{-1}$ .

Aus der Singulärwertzerlegung (3.29) der Matrix  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $\text{rang}(\underline{A}) = r$  läßt sich unmittelbar die **Pseudoinverse**  $\underline{A}^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mit

$$\underline{A}^\dagger = \underline{U} \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sigma_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_r} & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \underline{V}^T \quad (3.30)$$

als spezielle Moore-Penrose-Inverse für diese endlichdimensionale Situation ableiten. In Verallgemeinerung der für den Vollrangfall  $\text{rang}(\underline{A}) = n$  gültigen Formel (3.9) kann man damit die Minimum-Norm-Lösung eines allgemeinen linearen Gleichungssystems (3.7) mit  $\text{rang}(A) = r \leq \min(m, n)$  in der Form

$$\underline{x}_{mn} = \underline{A}^\dagger \underline{y} = \sum_{j=1}^r \frac{\langle \underline{y}, \underline{v}_j \rangle_2}{\sigma_j} \underline{u}_j \quad (3.31)$$

schreiben. Aus den obigen Überlegungen zur Singulärwertzerlegung von Matrizen  $\underline{A}$  folgt für die **Spektralnorm**  $\|\underline{A}\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} := \|\underline{A}\|_2 := \sup_{\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|\underline{A}\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2}$  mit  $\|\underline{A}\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} = \sigma_1$  (s. Formel (3.20)) und  $\|\underline{A}^\dagger\|_{\mathbb{R}^{n \times m}} = \frac{1}{\sigma_r}$  die Darstellung

$$\text{cond}(\underline{A}) = \|\underline{A}\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} \|\underline{A}^\dagger\|_{\mathbb{R}^{n \times m}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_r} \quad (3.32)$$

für die Konditionszahl der Matrix  $\underline{A}$ .

Wir setzen in den nun folgenden Betrachtungen dieses Abschnitts voraus, daß mit  $\dim(A) = \infty$  der nichtausgeartete Fall eines vollstetigen Operators  $A$  vorliegt. Eine besonders wichtige Klasse solcher Operatoren bilden die **Hilbert-Schmidt-Operatoren**.

**Definition 3.3** Ein Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , der zwischen den separablen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  wirkt, heißt

*Hilbert-Schmidt-Operator,*

wenn für ein in  $X$  vollständiges Orthonormalsystem  $\{e_j\} \subset X$  gilt:

$$S(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \|A e_j\|_Y^2 < \infty. \quad (3.33)$$

**Hilfssatz 3.5** Hilbert-Schmidt-Operatoren  $A$  sind stets vollstetig und erfüllen für alle in  $X$  vollständigen Orthonormalsysteme  $\{e_j\} \subset X$  die Beziehung

$$S(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \|A e_j\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty.$$

Als Konsequenz aus Hilfssatz 3.5 erhalten wir, daß für einen Hilbert-Schmidt-Operator die Summe  $S(A)$  unabhängig ist von der Wahl des diese Summe erzeugenden Orthonormalsystems  $\{e_j\}$ . Man kann darüber hinaus auch zeigen, daß ein vollstetiger Operator  $A$  genau dann Hilbert-Schmidt-Operator ist, wenn die Folge  $\{\sigma_j\}$  seiner Singulärwerte quadratisch summierbar ist, also ein Element im Raum  $l^2$  bildet.

Die linearen Fredholmschen Integraloperatoren  $A$  vom Typ (2.44) in den Räumen  $X = L^2(a, b)$  und  $Y = L^2(c, d)$  mit quadratisch integrierbarem Kern  $k \in L^2((c, d) \times (a, b))$  sind Hilbert-Schmidt-Operatoren, wobei die Beziehungen

$$S(A) = \int_c^d \int_a^b (k(s, t))^2 dt ds = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$$

und im Falle eines von der Nullfunktion verschiedenen Kernes

$$k(s, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j u_j(t) v_j(s) \quad (3.34)$$

gelten, wenn  $\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j=1}^{\infty}$  ein singuläres System für  $A$  bezeichnet. Die Konvergenz der unendlichen Reihe in Formel (3.34) ist dabei im Sinne der Konvergenz des Raumes  $L^2((c, d) \times (a, b))$  zu verstehen.

Wir wollen uns nun die Gestalt singulärer Systeme am Beispiel verdeutlichen. Dazu betrachten wir zuerst den bereits in Beispiel 2.1 eingeführten vollstetigen

Operator

$$[Ax](s) := \int_0^s x(t) dt \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.35)$$

im Raum  $X = Y = L^2(0, 1)$ . Wendet man die in Abschnitt 3.1.2 eingeführte Gleichung zur Definition des adjungierten Operators  $A^*$  an, so läßt sich die Darstellung

$$[A^*y](t) = \int_t^1 y(s) ds \quad (0 \leq t \leq 1)$$

und schließlich

$$[A^*Ax](\tau) = \int_\tau^1 \int_0^s x(t) dt ds \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

finden. Die Eigenwertgleichung  $A^*Au = \lambda u$  führt auf das Randwertproblem

$$-u(t) = \lambda u''(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad u(1) = u'(0) = 0, \quad \|u\|_{L^2(0,1)} = 1,$$

dessen Lösungen

$$\lambda_j = \frac{4}{(2j-1)^2\pi^2}, \quad u_j(t) = \sqrt{2} \cos\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

die singulären Werte

$$\sigma_j = \frac{2}{(2j-1)\pi} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.36)$$

liefern. Man sieht wegen  $\{\sigma_j\} \in l^2$  sofort, daß  $A$  ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Mit

$$v_j(t) = \frac{1}{\sigma_j} (A u_j)(t) = \sqrt{2} \sin\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

erhält man das singuläre System

$$\left\{ \frac{2}{(2j-1)\pi}; \sqrt{2} \cos\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi t \quad (0 \leq t \leq 1); \sqrt{2} \sin\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi t \quad (0 \leq t \leq 1) \right\}_{j=1}^{\infty}$$

für den Operator (3.35). Die dabei auftretenden Orthonormalsysteme  $\{u_j\}$  und  $\{v_j\}$  sind vollständig in  $L^2(0, 1)$ . Damit gilt  $N(A) = N(A^*) = \{\mathbf{0}\}$ , und  $A$  sowie  $A^*$  sind injektive Operatoren. Man erkennt, daß die Eigenfunktionen  $u_j$  und  $v_j$  aus dem singulären System von (3.35) um so stärker oszillieren, je größer

$j$  und damit je kleiner der singuläre Wert  $\sigma_j$  ausfällt. Die Situation, daß Singulärwerte nahe Null zu sehr stark oszillierenden Eigenfunktionen gehören, ist typisch für das Verhalten einer großen Klasse vollstetiger Operatoren im Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel eines Hilbert-Schmidt-Operators  $A$ , dessen Singulärwerte  $\sigma_j$  für  $j \rightarrow \infty$  exponentiell, also sehr schnell gegen Null streben, während die Singulärwertfolge im Falle (3.36) nur proportional zu  $1/j$  abklingt. Die Bedeutung dieser **Abklingraten** wird uns im nächsten Abschnitt im Zusammenhang mit dem **Grad der Inkorrektheit** einer linearen Operatorgleichung (3.1) beschäftigen.

**Beispiel 3.4** Ebenfalls zu den klassischen inversen Problemen gehört die Aufgabe der **Rekonstruktion des Anfangstemperaturprofils**  $x(\rho)$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) eines homogenen Stabes der Länge 1, dessen von der Ortskoordinate  $\rho$  und der Zeitkoordinate  $t$  abhängigen Temperaturen  $u(\rho, t)$  dem Anfangs-Randwertproblem zur eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u(\rho, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(\rho, t)}{\partial \rho^2} \quad (0 < \rho < 1, 0 < t \leq 1)$$

mit den homogenen Randbedingungen

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

und der Anfangsbedingung

$$u(\rho, 0) = x(\rho) \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

genügen, aus Messungen

$$y(\rho) = [Ax](\rho) := u(\rho, 1) \quad (0 \leq \rho \leq 1) \quad (3.37)$$

des Temperaturprofils des Stabes zur Endzeit  $t = 1$ . Der in (3.37) definierte Operator  $A$  ist in  $X = Y = L^2(0, 1)$  linear und vollstetig. Funktionen  $u$ , die der Differentialgleichung und den Randbedingungen des betrachteten Wärmeleitproblems genügen, lassen sich als Reihe

$$u(\rho, t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(-j^2 \pi^2 t) \sin j \pi \rho$$

mit beliebigen reellen Koeffizienten  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) darstellen. Daraus resultiert unmittelbar das singuläre System

$$\left\{ \exp(-j^2 \pi^2); \sqrt{2} \sin j \pi \rho \ (0 \leq \rho \leq 1); \sqrt{2} \sin j \pi \rho \ (0 \leq \rho \leq 1) \right\}_{j=1}^{\infty}$$

des Operators  $A$  aus (3.37). Dieser Operator  $A \in \mathcal{L}(L^2(0, 1), L^2(0, 1))$  ist selbstadjungiert und injektiv. Er läßt sich als Hilbert-Schmidt-Operator in Form eines Integraloperators

$$[Ax](\rho) = \int_0^1 k(\rho, \eta) x(\eta) d\eta \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

mit der Formel (3.34) entsprechenden Reihendarstellung

$$k(\rho, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} 2 \exp(-j^2 \pi^2) \sin j\pi\rho \sin j\pi\eta \quad (0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1)$$

der Kernfunktion schreiben. Die Kernfunktion  $k(\cdot, \cdot)$  verkörpert dabei eine **Greensche Funktion** des entsprechenden Anfangswertproblems zur Wärmeleitungsgleichung.  $\square$

### 3.1.6 Der Grad der Inkorrektheit linearer Operatorgleichungen

Bisher haben wir uns zwar ausführlich mit der Inkorrektheit linearer Operatorgleichungen (3.1) beschäftigt, aber niemals die Frage gestellt, wie stark inkorrekt solche dahinter stehenden Identifikationsprobleme sind. Die besonders gut strukturierte Klasse injektiver vollstetiger linearer Operatoren  $A$  in unendlichdimensionalen separablen Hilberträumen  $X$  und  $Y$ , auf die wir uns in diesem Abschnitt immer beziehen werden und die stets nach Nashed inkorrekte Gleichungen (3.1) hervorbringt, wird Antworten auf diese weitergehende Frage nunmehr erlauben.

Die Stärke der Inkorrektheit eines linearen inversen Problems vom Typ (3.1) wird durch den Grad der Schwierigkeiten bestimmt, die ein solches Problem bei der näherungsweise oder numerischen Lösung bereitet. Diese Art der Problemlösung ist mit Blick auf eine Behandlung der Zugänge mittels Computer immer mit einer Einschränkung des Problems auf endlichdimensionale Räume verbunden. Ausgehend von einem in  $X$  vollständigen Orthonormalsystem  $\{w_j\} \subset X$  zur Erzeugung  $n$ -dimensionaler Teilräume

$$X_n := \text{span}(w_1, w_2, \dots, w_n)$$

wollen wir hier unter näherungsweise oder numerischer Lösung von (3.1) die Konstruktion eines Elementes  $x_n \in X_n$  verstehen, welches Lösung des auf den  $n$ -dimensionalen Teilraum **eingeschränkten Kleinste-Quadrate-Problems**

$$\|Ax - y\|_Y^2 = \min!, \quad x \in X_n \quad (3.38)$$

ist. Aus den Überlegungen von Abschnitt 3.1.4 folgt, daß

$$x_n = A_n^\dagger y$$

für alle  $y \in Y$  die in  $X_n$  wegen der Injektivität von  $A$  eindeutig bestimmte Lösung des Extremalproblems (3.38) bildet. Dabei stellt  $A_n^\dagger \in \mathcal{L}(Y, X_n)$  die Moore-Penrose-Inverse des Operators  $A_n \in \mathcal{L}(X_n, Y)$  dar, der mittels der Vorschrift  $A_n x = Ax$  für  $x \in X_n$  als Einschränkung des Operators  $A$  auf den Teilraum  $X_n$  festgelegt ist.

Es sei nun  $x_0 \in X$  die für eine feste rechte Seite  $y \in R(A)$  eindeutig bestimmte Lösung von (3.1). Wir betrachten den Fehler  $\|x_n^\delta - x_0\|_X$  einer Näherungslösung  $x_n^\delta := A_n^\dagger y_\delta$  zu einer gestörten rechten Seite  $y_\delta$  mit  $\|y_\delta - y\|_Y \leq \delta$ . Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir dafür

$$\|x_n^\delta - x_0\|_X \leq \|x_n^\delta - x_n\|_X + \|x_n - x_0\|_X \leq \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} \|y_\delta - y\|_Y + \|A_n^\dagger y - x_0\|_X$$

und damit

$$\|x_n^\delta - x_0\|_X \leq \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} \delta + \|A_n^\dagger A x_0 - x_0\|_X. \quad (3.39)$$

Die Schranke für den Fehler der Näherungslösung  $x_n^\delta$  im Sinne der rechten Seite von Abschätzung (3.39) zerfällt in einen ersten Term  $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} \delta$ , der die **Stabilität** der Näherung in bezug auf Störungen in den Daten charakterisiert und einen zweiten Term  $\|A_n^\dagger A x_0 - x_0\|_X$ , der die **Approximation** von  $x_0$  durch geeignete Elemente des  $n$ -dimensionalen Raumes  $X_n$  widerspiegelt. Bei geschickter Wahl des Orthonormalsystems  $\{w_j\}$  strebt dieser Term für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null. Wählt man etwa  $\{w_j\} := \{u_j\}$  mit  $\{u_j\}$  aus dem singulären System für  $A$ , so gilt für  $y = Ax_0$

$$A_n^\dagger y = \sum_{j=1}^n \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j = \frac{\langle x_0, A^* v_j \rangle_X}{\sigma_j} u_j = \sum_{j=1}^n \langle x_0, u_j \rangle_X u_j$$

und damit

$$\|A_n^\dagger A x_0 - x_0\|_X = \sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} \langle x_0, u_j \rangle_X^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.40)$$

Die Konvergenz in (3.40) ist dabei eine Konsequenz der Parsevalschen Gleichung bzw. der daraus resultierenden Tatsache, daß die Zahlenfolge  $\{\sum_{j=1}^n \langle x_0, u_j \rangle_X^2\}_{n=1}^{\infty}$  eine Cauchyfolge ist.

Um den Approximationsfehler klein zu halten, empfiehlt es sich also, bei der numerischen Lösung von (3.1) die Dimension  $n$  so groß wie möglich zu wählen. Die Inkorrektheit nach Nashed ist aber, wie uns Satz 3.2 gezeigt hat, stets mit **Instabilität** verbunden. Diese kommt in der Abschätzung (3.39) dadurch



zum Ausdruck, daß der Multiplikator  $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)}$  des Datenfehlniveaus  $\delta$  im Sinne des folgenden Hilfssatzes mit  $n \rightarrow \infty$  über alle Grenzen wächst. Je größer also  $n$  gewählt wird, um so stärker wirken sich die Datenfehler in der Näherungslösung aus. Diese widersprüchlichen Tendenzen kann man praktisch durch Wahl eines mittleren „Diskretisierungsniveaus“  $n$  handhaben, welches zu einen Kompromiß zwischen Stabilität und Approximation führt.

**Hilfssatz 3.6** *Bei beliebiger Wahl des die Teilräume  $X_n$  generierenden Orthonormalsystems  $\{w_j\}$  gilt für*

$$\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} = \left( \min_{x \in X_n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \right)^{-1} \quad (3.41)$$

*die Grenzwertbeziehung*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} = \infty.$$

Die Aussage dieses Hilfssatzes folgt aus der Tatsache, daß für die unbeschränkte Inverse  $A^{-1}$  eines injektiven vollstetigen Operators  $A$  eine unendliche Folge  $\{z_j\} \subset X$  mit  $z_j \neq \mathbf{0}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) und

$$\frac{\|Az_j\|_Y}{\|z_j\|_X} \rightarrow 0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty \quad (3.42)$$

existiert. Wäre nun die Grenzwertbeziehung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} = \infty$  verletzt, so gäbe es unter Berücksichtigung der Darstellung (3.41) eine Folge von Dimensionen  $n_i \rightarrow \infty$  für  $i \rightarrow \infty$  und eine Konstante  $\varepsilon > 0$ , so daß für alle  $z \in X_{n_i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) die Ungleichung  $\|Az\|_Y \geq \varepsilon\|z\|_X$  gilt. Die  $n_i$ -dimensionalen Approximationen  $z_j^{n_i} = \sum_{l=1}^{n_i} \langle z_j, w_l \rangle_X w_l$  von  $z_j$  erfüllten dann für alle  $i$  und  $j$  die Bedingung  $\|Az_j^{n_i}\|_Y \geq \varepsilon\|z_j^{n_i}\|_X$  und mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|z_j^{n_i} - z_j\|_X = 0$  die Ungleichung  $\|Az_j\|_Y \geq \varepsilon\|z_j\|_X$ . Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Grenzwertbeziehung (3.42).

Sucht man nach solchen Teilräumen  $X_n$ , die den „Instabilitätsfaktor“  $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)}$  in der rechten Seite von Ungleichung (3.39) möglichst klein halten, so leistet dafür das in Hilfssatz 3.7 für unsere Zwecke geeignet formulierte **Maximum-Minimum-Prinzip von Poincaré und Fischer** gute Dienste.

**Hilfssatz 3.7** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  ein vollstetiger linearer Operator in separablen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  mit einem singulären System  $\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j \in J}$ . Dann gilt für alle  $n \in J$*

$$\sigma_n = \max_{X_n \subset X} \min_{x \in X_n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \min_{x \in \text{span}(u_1, \dots, u_n) \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \|Au_n\|_Y. \quad (3.43)$$

*Dabei ist das Maximum in Formel (3.43) über alle  $n$ -dimensionalen Teilräume  $X_n$  des Hilbertraums  $X$  zu nehmen.*

Daraus ergibt sich wegen Formel (3.41) unmittelbar:

**Folgerung 3.2** *Die Norm  $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)}$  wird bezüglich aller  $n$ -dimensionalen Teilräume  $X_n$  von  $X$  minimal für  $X_n = \text{span}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , d.h., es gilt*

$$\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} \geq \frac{1}{\sigma_n} \quad \text{und} \quad \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} = \frac{1}{\sigma_n} \quad \text{für } X_n = \text{span}(u_1, \dots, u_n). \quad (3.44)$$

Wählt man die Teilräume  $X_n$  in diesem Sinne optimal als Menge von Linearkombination der ersten  $n$  Eigenelemente aus dem singulären System für  $A$ , so verhält sich die Näherungslösung im Sinne der Abschätzung (3.39) am stabilsten gegenüber Datenstörungen. Die Kehrwerte der singulären Werte  $\sigma_n$  spielen dann die Rolle der „Instabilitätsfaktoren“. Je schneller die Folge  $\{\sigma_n\}$  der Singulärwerte gegen Null abklingt, um so schneller wächst der Multiplikator  $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)}$  selbst im günstigsten Falle für  $n \rightarrow \infty$  ins Unendliche. So macht es Sinn, den Grad der Inkorrektheit einer Operatorgleichung (3.1) über die Abklingrate der Singulärwertfolge des Operators  $A$  gegen Null zu definieren.

**Definition 3.4** *Wir bezeichnen eine lineare Operatorgleichung (3.1) mit vollstetigem Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  in separablen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  als höchstens inkorrekt vom Grade  $\nu > 0$ , wenn für die Singulärwertfolge  $\{\sigma_n\}$  des Operators  $A$  eine Konstante  $\bar{C} > 0$  mit*

$$\frac{1}{\sigma_n} \leq \bar{C} n^\nu \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.45)$$

*existiert.*

Ergänzend zu Definition 3.4 können wir eine lineare Operatorgleichung (3.1) als **mindestens inkorrekt vom Grade  $\nu > 0$**  bezeichnen, wenn eine Konstante

$\underline{C} > 0$  mit

$$\underline{C} n^\nu \leq \frac{1}{\sigma_n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.46)$$

zu finden ist. Haben wir sogar  $\sigma_n \sim n^{-\nu}$ , so nennen wir die positive Zahl  $\nu$  **Grad der Inkorrektheit**. Die Proportionalität  $\sigma_n \sim n^{-\nu}$  entspricht dabei der Existenz zweier Konstanten  $0 < \underline{C} \leq \overline{C} < \infty$  mit

$$\underline{C} n^\nu \leq \frac{1}{\sigma_n} \leq \overline{C} n^\nu \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.47)$$

Gilt für jedes positive  $\nu$  eine Ungleichung (3.46), so sagen wir, daß die Operatorgleichung den Grad der Inkorrektheit  $\infty$  besitzt. Wenn eine Operatorgleichung höchstens inkorrekt vom Grade 1 ist, so nennt man sie auch **schwach inkorrekt**. Man spricht von **mäßig inkorrekten** Gleichungen, wenn es eine endliche Zahl  $\nu$  gibt, so daß (3.45) gilt, andernfalls heißen solche Gleichungen **stark inkorrekt**. Je höher der Grad der Inkorrektheit einer inversen Aufgabe (3.1) ausfällt, desto kleiner muß man die Diskretisierungsdimension  $n$  in (3.38) wählen, um bei festem Datenfehlerniveau  $\delta > 0$  noch einen akzeptablen Fehler (3.39) der Näherungslösung  $x_n^\delta$  zu erzwingen. Dieser Umstand läßt die folgende Interpretation zu: Will man ein gewisses fest vorgegebenes Fehlerniveau der Näherungslösung nicht überschreiten, so kann man bei stark inkorrekten Aufgaben nur eine sehr kleine Anzahl  $n$  von Parameterwerten aus den gegebenen fehlerhaften Daten rekonstruieren, während die entsprechende Anzahl bei schwach inkorrekten Gleichungen (3.1) deutlich größer ausfällt. Im Kapitel 4 werden wir mit Hilfe von Regularisierungsverfahren und auf der Grundlage einer wesentlichen Verallgemeinerung des Begriffs der Näherungslösung gegenüber dem Zugang (3.38) danach streben, auch bei stärker inkorrekten Problemen für eine größere Anzahl von Parameterwerten akzeptable Näherungslösungen zu erlangen. Aber auch bei diesen Zugängen spielt der Grad der Inkorrektheit einer Aufgabe für die Auswahl konkreter Verfahren und die Festlegung geeigneter numerischer Parameter eine gewisse Rolle.

Im vorigen Abschnitt haben wir im Raum  $X = Y = L^2(0, 1)$  bereits für den Operator  $A$  aus (3.35), der zum Problem (2.22) der Identifikation der ersten Ableitung einer Funktion aus deren Funktionswerten gehört, die Singulärwertfolge (3.36) bestimmt, für die offensichtlich

$$\sigma_n \sim n^{-1}$$

gilt. Wir haben es beim Differentiationsproblem also mit einem Grad  $\nu = 1$  der Inkorrektheit und damit mit einem Problem zu tun, das an der Grenze zwischen den schwach und mäßig inkorrekten Problemen angesiedelt ist. Weiter haben

wir in Beispiel 3.4 die Singulärwertfolge

$$\sigma_n = \exp(-n^2 \pi^2)$$

für das Wärmeleitungsproblem mit Zeitumkehr gefunden. Dieses in Operatorgleichung (3.37) formulierte inverse Problem ist stark inkorrekt und sein Grad der Inkorrektheit  $\infty$ , da die Folge der Singulärwerte schneller gegen Null fällt als jede Potenz  $n^{-\nu}$  für endliches positives  $\nu$ .

**Beispiel 3.5** In diesem Beispiel betrachten wir im Raum  $X = Y = L^2(0, 1)$  die für reelle Zahlen  $r > 0$  definierte Familie

$$[A_r x](s) := \int_0^s \frac{(s-t)^{r-1}}{\Gamma(r)} x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.48)$$

von speziellen linearen Integralgleichungen mit Operatoren  $A_r$  der **gebrochenen Integration**. Dabei bezeichnet  $\Gamma(r)$  den Wert der Gammafunktion zum Argument  $r$ . Die Familie (3.48) gehört zu den **linearen Volterraschen Integralgleichungen erster Art**

$$\int_0^s k(s, t) x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1), \quad (3.49)$$

einer Teilklasse der **linearen Fredholmschen Integralgleichungen erster Art**

$$\int_0^1 k(s, t) x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1), \quad (3.50)$$

wobei die im Quadrat  $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$  definierte Kernfunktion  $k(s, t)$  bei den Volterraschen Integralgleichungen im Dreieck  $\{(s, t) : 0 \leq s < t \leq 1\}$  identisch verschwindet. Unter den linearen Volterraschen Integralgleichungen erster Art gehört die Familie (3.48) wiederum zu den **linearen Faltungsgleichungen**

$$\int_0^s \kappa(s-t) x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1), \quad (3.51)$$

deren Kernfunktionen  $\kappa$  nur von der Differenz der Argumente  $s$  und  $t$  abhängen und die wir im nächsten Beispiel und den sich daran anschließenden Betrachtungen genauer studieren werden. Die Bezeichnung „gebrogene Integration“

im Zusammenhang mit dem Operator  $A_r$  läßt sich damit begründen, daß die Gleichung (3.48) für natürliche Zahlen  $r = l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) in der Form

$$\int_0^s \frac{(s-t)^{l-1}}{(l-1)!} x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.52)$$

dem Problem der **Identifikation der  $l$ -ten Ableitung**  $x(t) := y^{(l)}(t)$  einer Funktion  $y(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) aus Werten der Funktion entspricht. Dabei gibt es stetige Lösungen  $x$  von (3.52) natürlich nur für  $l$ -mal stetig differenzierbare Funktionen  $y \in C^l[0, 1]$  mit

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(l-1)}(0) = 0.$$

Die Gleichung (3.48) läßt sich als Verallgemeinerung dieses Problems (3.52) der  $l$ -maligen Differentiation in Richtung der **Identifikation von Ableitungen einer gebrochenen Ordnung**  $r$  der Funktion  $y$  ansehen.

Für den Zahlenbereich  $0 < r < 1$  wird (3.48) als **Abelsche Integralgleichung** bezeichnet, für die es zahlreiche Anwendungen bei inversen Problemen z.B. der Mechanik, Stereologie und Geophysik gibt. Eine Zusammenstellung dieser Anwendungen und umfassende Aussagen zur Theorie Abelscher Integralgleichungen findet man im Buch [GOVE91] von R. Gorenflo und S. Vessella. Bei solcher Wahl des Parameters  $r$  sind im Gegensatz zum Fall  $r \geq 1$  die Kernfunktionen des Integraloperators  $A_r$  nicht mehr stetig, sondern **schwach singulär**, d.h., sie weisen für  $s = t$  auf der Diagonale des Quadrats  $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$  eine Polstelle auf, die aber in dem Sinne schwach ausgeprägt ist, daß die entsprechende Kernfunktion  $\kappa$  in der Variante (3.51) die Darstellung

$$\kappa(\tau) = \frac{1}{\tau^{1-r}} \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

besitzt, für  $0 < r < 1$  integrierbar ist und somit zum Raum  $L^1(0, 1)$  gehört. Aus der **Ungleichung von Young** (s. [GOVE91, S.65]) ergibt sich für  $x \in L^2(0, 1)$  und  $\kappa \in L^1(0, 1)$  aber  $Ax \in L^2(0, 1)$  mit  $A$  aus (3.51), und es gilt eine Abschätzung  $\|Ax\|_{L^2(0,1)} \leq \|\kappa\|_{L^1(0,1)} \|x\|_{L^2(0,1)}$ . Daher haben wir in (3.48) für alle  $r > 0$  einen beschränkten linearen Operator  $A_r \in \mathcal{L}(L^2(0, 1), L^2(0, 1))$  vorliegen, der auch vollstetig ist. Aber nur für  $r > \frac{1}{2}$  ist der Kern des Integraloperators quadratisch integrierbar und damit  $A_r$  ein Hilbert-Schmidt-Operator. Allgemein läßt sich für die Singulärwerte von  $A_r$  in  $L^2(0, 1)$  zeigen, daß

$$\sigma_n \sim n^{-r} \quad \text{für alle } r > 0$$

gilt. Das Problem (3.52) der  $l$ -maligen Differentiation ist also vom Inkorrektheitsgrade  $l$  und damit mäßig inkorrekt, wobei mit wachsendem Differentiationsniveau  $l$  die Schwierigkeiten der Aufgabe steigen. Dagegen ist die Abelsche Integralgleichung mit einem Grad  $0 < r < 1$  nur schwach inkorrekt.  $\square$

**Beispiel 3.6 Lineare Faltungsgleichungen**

$$\int_0^s \kappa(s-t)x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq T) \quad (3.53)$$

als Spezialfall Volterrascher Integralgleichungen erster Art treten bei der Interpretation indirekter Messungen auf, wenn die Werte  $x(t)$  ( $0 \leq t \leq T$ ) einer von der Zeit  $t$  abhängigen und selbst nicht direkt meßbaren Größe aus den gemessenen Werten  $y(s)$  ( $0 \leq s \leq T$ ) der Faltung  $\int_0^s \kappa(s-t)x(t) dt$  der Funktion  $x$  mit einer Kernfunktion  $\kappa$  bestimmt werden sollen. Die Kernfunktion als „Apparaturfunktion“ definiert den inneren Mechanismus der indirekten Messung, wobei nur Werte  $x(t)$  ( $0 \leq t \leq s$ ) aus der Vergangenheit den Meßwert  $y(s)$  zu einem aktuellen Zeitpunkt  $s$  beeinflussen.

Anwendungen des Modells (3.53) gibt es in der Technik z.B. bei der Fluoreszenzspektroskopie zur Untersuchung der inneren Struktur komplexer Objekte. Dabei wird der Untersuchungsgegenstand durch einen optischen Probeimpuls erregt. Aus der molekularen Fluoreszenzreaktion können dann die gesuchten Strukturinformationen gewonnen werden. Der optische Eingangsimpuls, die sogenannte „Lampenfunktion“, bestimmt den Kern  $\kappa$ , der mittels Faltung die gesuchte Strukturfunktion  $x$  und die meßbare Fluoreszenzreaktion  $y$  verbindet. Eine weitere Anwendung findet man in der Nuklearmedizin bei der Bestimmung von Parameterfunktionen  $x$ , welche die Funktionstüchtigkeit innerer Organe des menschlichen Körpers beschreiben. Dabei untersucht man mit Hilfe von in die Blutbahn injizierten schwach radioaktiven Substanzen, deren aktuell vorhandene Substratmenge als zeitabhängige Funktion  $y$  gemessen wird, wie die Isotope von dem betroffenen Organ verarbeitet werden, um damit Stoffwechselstörungen diagnostizieren zu können. Die Kernfunktion  $\kappa$  charakterisiert dabei übliche Verarbeitungsraten für die jeweilige Substanz im menschlichen Körper.

Als drittes Beispiel sei eine geophysikalische Anwendung von Gleichung (3.53) bei der mathematischen Modellierung von Untergrundgasspeichern vom Aquifertyp erwähnt. Dabei geht es um die Bestimmung des „Speichergedächtnisses“  $x$  aus zeitabhängigen Gasdruckmessungen  $y$  im Untergrundgasspeicher. Der Funktionswert  $x(t)$  drückt aus, welche Druckänderungen eine zum Zeitpunkt  $t_0$  in den Speicher eingebrachte Einheitsmenge an Gas zum Zeitpunkt  $t + t_0$  bewirkt, wie also der Speicher auf die Vergangenheit reagiert. Wie bei jedem Gedächtnis kann man dabei davon ausgehen, daß die Wirkung um so mehr abnimmt, je weiter der Zeitpunkt  $t_0$  zurückliegt, daß  $x$  also eine monoton fallende Funktion repräsentiert. In diesem Modell leitet sich die Kernfunktion  $\kappa$  aus der zeitlichen Verlaufskurve der Volumina des in den Speicher eingebrachten oder des daraus entnommenen Gases her.  $\square$

Angeregt durch Beispiel 3.6 widmen wir uns nun etwas allgemeiner dem zu Gleichung (3.51) gehörigen **linearen Faltungsoperator**

$$[Ax](s) := \int_0^s \kappa(s-t)x(t) dt \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.54)$$

im Raum  $X = Y = L^2(0, 1)$ , wobei wir annehmen, daß die Kernfunktion  $\kappa$  den Bedingungen

$$\kappa \in L^2(0, 1) \quad \text{und} \quad \sup\{s : \kappa(\tau) = 0 \text{ für fast alle } \tau \in [0, s]\} = 0 \quad (3.55)$$

genügt. Die quadratisch integrierbare Kernfunktion  $\kappa$ , mit welcher der Operator  $A$  aus (3.54) sofort als Hilbert-Schmidt-Operator erkennbar wird, soll also für kein Intervall  $[0, s]$  ( $0 < s \leq 1$ ) identisch Null sein, wobei Mengen vom Lebesguemaß Null wie immer bei Untersuchungen im Raum  $L^2$  außer Betracht bleiben. Eine Bedingung, die für **fast alle** Zahlen eines Intervalls gilt, darf auf einer Teilmenge dieses Intervalls genau dann verletzt sein, wenn diese Teilmenge vom Lebesguemaß Null ist. Die zweite Bedingung in (3.55) sichert, wie der in der Literatur als **Satz von Titchmarsh** bekannte Hilfssatz 3.8 zeigen wird, die **Injektivität** von  $A$  und damit die Eindeutigkeit von Lösungen der linearen Faltungsgleichung (3.51).

**Hilfssatz 3.8** *Es seien  $f \in L^2(0, 1)$  und  $g \in L^2(0, 1)$  zwei Funktionen und  $\gamma \in (0, 1]$  eine positive reelle Zahl, so daß*

$$\int_0^s f(s-t)g(t) dt = 0 \quad \text{für fast alle } s \in [0, \gamma]$$

*gilt. Dann existieren Zahlen  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  mit  $\alpha + \beta \geq \gamma$  und  $f(t) = 0$  für fast alle  $t \in [0, \alpha]$  sowie  $g(t) = 0$  für fast alle  $t \in [0, \beta]$ .*

Gilt nun für den Faltungsoperator (3.54)  $Ax = \mathbf{0}$  in  $L^2(0, 1)$  und für kein  $0 < \varepsilon \leq 1$  die Beziehung  $\kappa(\tau) = 0$  für fast alle  $\tau \in [0, \varepsilon]$ , so muß wegen Hilfssatz 3.8  $x(t) = 0$  sein für fast alle  $t \in [0, 1]$ . Damit ist aber  $x = \mathbf{0}$  in  $L^2(0, 1)$ , und der in Formel (3.54) definierte Operator  $A \in \mathcal{L}(L^2(0, 1), L^2(0, 1))$  erweist sich als injektiv. Vorstellungen über den Grad der Inkorrektheit von Faltungsgleichungen (3.51) liefert der folgende Satz:

**Satz 3.6** *Im Raum  $X = Y = L^2(0, 1)$  ist jede Operatorgleichung (3.1) mit einem linearen Faltungsoperator (3.54), dessen Kern  $\kappa$  der Bedingung (3.55) genügt, mindestens inkorrekt vom Grade  $\nu = \frac{1}{2}$ . Ist für eine positive ganze Zahl  $l$  der Kern darüber hinaus  $(l - 1)$ -mal stetig differenzierbar und besitzt eine quadratisch integrierbare verallgemeinerte  $l$ -te Ableitung, d.h. gilt*

$$\kappa \in C^{l-1}[0, 1] \quad \text{und} \quad \kappa^{(l)} \in L^2(0, 1), \quad (3.56)$$

*so ist die Gleichung sogar mindestens inkorrekt vom Grade  $\nu = l + \frac{1}{2}$ , wenn zusätzlich für die Ableitungen des Kerns die Bedingung*

$$\kappa(0) = \kappa'(0) = \dots = \kappa^{(l-1)}(0) = 0 \quad (3.57)$$

*erfüllt ist.*

Sind  $\kappa \in C^{l-1}[0, 1]$  und (3.57) in Satz 3.6 für beliebig große Zahlen  $l$  erfüllt, so hat die Faltungsgleichung den Inkorrektheitsgrad  $\infty$  (s. z.B. Aufgabe 3.5). Je glatter der Kern  $\kappa$  wird, desto größer fällt der Grad der Inkorrektheit einer Faltungsgleichung (3.51) aus. Dies deckt sich mit den Erfahrungen aus Beispiel 3.5, wo im Falle der Abelschen Integralgleichung mit einer Polstelle im Kern die kleinsten Inkorrektheitsgrade festgestellt wurden, während die stetigen und mit wachsendem  $l$  an Glattheit zunehmenden Kerne in Gleichung (3.52) von ebenfalls wachsenden Inkorrektheitsgraden begleitet werden. Allerdings wachsen die Inkorrektheitsgrade bei den Faltungsgleichungen nur dann an, wenn im Sinne von Bedingung (3.57) immer höhere Ableitungen des Kerns an der Stelle  $t = 0$  verschwinden. Dies ist auch eine Glattheitsbedingung, aber jetzt an den Kern

$$k(s, t) = \begin{cases} \kappa(s - t) & (0 \leq t \leq s \leq 1) \\ 0 & (0 \leq s < t \leq 1) \end{cases}$$

des dazu gehörigen linearen Fredholmschen Integraloperators (2.44) mit  $a = c = 0$  und  $b = d = 1$  beim Übergang über die Diagonale  $s = t$  des Quadrats  $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .



**Satz 3.7** *Wir betrachten im Raum  $X = Y = L^2(0, 1)$  die lineare Fredholmsche Integralgleichung erster Art*

$$[Ax](s) := \int_0^1 k(s, t) x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.58)$$

mit  $k \in L^2((0, 1) \times (0, 1))$ . Dann gilt für die Singulärwerte des Operators  $A$

$$\sigma_n \leq C(n) n^{-\frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C(n) = 0.$$

Falls darüber hinaus die Funktionen

$$k, \frac{\partial k}{\partial s}, \frac{\partial^2 k}{\partial s^2}, \dots, \frac{\partial^{l-2} k}{\partial s^{l-2}}$$

stetig in  $s$  sind für fast alle  $t$  und

$$\frac{\partial^{l-1} k(s, t)}{\partial s^{l-1}} = \int_0^s g(\tau, t) d\tau + h(t)$$

mit  $g \in L^2((0, 1) \times (0, 1))$  und  $h \in L^1(0, 1)$  gilt, so haben wir sogar

$$\sigma_n \leq C(n) n^{-(l+\frac{1}{2})} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C(n) = 0. \quad (3.59)$$

Satz 3.6 ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3.7, der den Zusammenhang zwischen der Glattheit des quadratisch integrierbaren Kerns  $k(s, t)$  einer **linearen Fredholmschen Integralgleichung erster Art** (3.50) und den Abklingraten der Singulärwerte des entsprechenden linearen Integraloperators im Raum  $X = Y = L^2(0, 1)$  herstellt. Zur Literatur in bezug auf Satz 3.7 sei auf [ENG97, S.195] verwiesen. Ist bei den Faltungsgleichungen (3.51) die sehr einschneidende Kernbedingung (3.57) nicht realisiert, so liegt der Inkorrektheitsgrad niedriger als in Satz 3.6 behauptet, auch wenn (3.56) erfüllt ist. Allgemein sind bei vergleichbaren Differenzierbarkeitseigenschaften des Kernes Volterra'sche Integralgleichungen erster Art (3.49) weniger inkorrekt als Fredholmsche Integralgleichungen (3.50), falls nicht im Ausnahmefall alle Werte der Kernfunktion  $k(s, t)$  der Volterra'schen Gleichung und ihrer sämtlichen partiellen Ableitungen bis zur höchsten vorhandenen Ordnung für  $s = t$  verschwinden. Die Beziehung (3.57) charakterisiert gerade einen solchen Ausnahmefall für die Faltungsgleichung.

Unmittelbar aus Satz 3.7 erhalten wir für Fredholmsche Integralgleichungen (3.50) eine in Folgerung 3.3 formulierte Aussage über den in Abhängigkeit von der Kernglattheit **mindestens** auftretenden Inkorrekttheitsgrad.

**Folgerung 3.3** *Eine lineare Fredholmsche Integralgleichung (3.50) mit  $k \in L^2((0,1) \times (0,1))$  ist mindestens inkorrekt vom Grade  $\nu = \frac{1}{2}$ . Unter den in Satz 3.7 formulierten Glattheitsbedingungen an die Kernfunktion  $k$ , welche die Singulärwertabschätzung (3.59) nach sich ziehen, ist die Gleichung (3.50) sogar mindestens inkorrekt vom Grade  $\nu = l + \frac{1}{2}$ .*

Es sei erwähnt, daß man aus Kenntnissen der Kernglattheit einer linearen Integralgleichung leider nichts darüber aussagen kann, welchen Grad der Inkorrekttheit eine solche Integralgleichung **höchstens** aufweist.

Falls die Singulärwerte  $\{\sigma_n\}$  eines vollstetigen linearen Operators  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  bzw. deren Abklingraten und damit der Grad der Inkorrekttheit der entsprechenden Operatorgleichung (3.1) nicht unmittelbar verifizierbar sind, so kann man versuchen, den Operator  $A$  mit Hilfe eines anderen vollstetigen Operators  $B \in \mathcal{L}(X, Z)$  ( $X, Y, Z$  separable Hilberträume) in der Form

$$\underline{c} \|Bx\|_Z \leq \|Ax\|_Y \leq \bar{c} \|Bx\|_Z \quad \text{für alle } x \in X \quad (3.60)$$

und Konstanten  $0 < \underline{c} \leq \bar{c} < \infty$  abzuschätzen, wenn die Singulärwerte  $\{\tilde{\sigma}_n\}$  des Operators  $B$  oder wenigstens deren Abklingraten bekannt sind. Wegen Hilfsatz 3.7 folgen dann aus (3.60) und (3.43) die Ungleichungen

$$\underline{c} \tilde{\sigma}_n \leq \sigma_n \leq \bar{c} \tilde{\sigma}_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.61)$$

Ein Inkorrekttheitsgrad  $\nu > 0$ , der dem Operator  $B$  zuzuordnen ist, überträgt sich auf den Operator  $A$  und umgekehrt (s. auch Aufgabe 3.4). Wir demonstrieren diese Vorgehensweise am Beispiel des Operators aus (3.35) im Sobolevraum  $X = Y := H^1(0, 1)$ . Für das Differentiationsproblem

$$\int_0^s x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.62)$$

wissen wir aus Abschnitt 3.1.5, daß bei Betrachtung von Lösungen  $x$  und rechten Seiten  $y$  im Raum  $L^2(0, 1)$  der Inkorrekttheitsgrad  $\nu = 1$  auftritt (s. Formel (3.36)). Um den entsprechenden Inkorrekttheitsgrad im Sobolevraum  $H^1(0, 1)$  zu bestimmen, betrachten wir  $A \in \mathcal{L}(H^1(0, 1), H^1(0, 1))$  als den zu (3.62) gehörigen

Operator und nutzen die aus der Definition der Sobolevnorm (2.100) resultierende Darstellung

$$\|Ax\|_{H^1(0,1)} = \sqrt{\left(\int_0^s x(t) dt\right)^2 ds + \int_0^1 (x(t))^2 dt} = \sqrt{\|Ax\|_{L^2(0,1)}^2 + \|x\|_{L^2(0,1)}^2}.$$

Wegen (3.20) und (3.36) ergibt sich daraus mit

$$\|x\|_{L^2(0,1)} \leq \|Ax\|_{H^1(0,1)} \leq \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \|x\|_{L^2(0,1)} \quad \text{für alle } x \in H^1(0,1) \quad (3.63)$$

eine Ungleichung vom Typ (3.60). Dabei haben wir  $Z := L^2(0,1)$ ,  $\underline{c} = 1$ ,  $\bar{c} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}$  und einen Operator  $B \in \mathcal{L}(H^1(0,1), L^2(0,1))$  mit  $Bx = x$  für alle  $x \in H^1(0,1)$ , der die Einbettung des Raumes  $H^1(0,1)$  in den Raum  $L^2(0,1)$  beschreibt (s. Formel (2.102) in Abschn. 2.3.3). Nun läßt sich für diesen vollstetigen Einbettungsoperator  $B$  das singuläre System mit den Komponenten

$$\tilde{\sigma}_j = \frac{1}{\sqrt{1 + (j-1)^2\pi^2}} \quad (j = 1, 2, \dots),$$

$$\tilde{u}_1(t) = 1 \quad (0 \leq t \leq 1), \quad \tilde{u}_j(t) = \sqrt{\frac{2}{1+(j-1)^2\pi^2}} \cos(j-1)\pi t \quad (j = 2, 3, \dots; 0 \leq t \leq 1)$$

und

$$\tilde{v}_1(t) = 1 \quad (0 \leq t \leq 1), \quad \tilde{v}_j(t) = \sqrt{2} \cos(j-1)\pi t \quad (j = 2, 3, \dots; 0 \leq t \leq 1),$$

explizit aufschreiben, und wir haben eine Rate  $\tilde{\sigma}_n \sim n^{-1}$  für das Abklingen der Singulärwerte des Einbettungsoperators. Demzufolge gibt es Konstanten  $0 < \hat{c} \leq \bar{c} < \infty$  mit

$$\frac{\hat{c}}{n} \leq \sigma_n \leq \frac{\bar{c}}{n}$$

für die Singulärwertfolge  $\{\sigma_n\}$  von  $A \in \mathcal{L}(H^1(0,1), H^1(0,1))$ . Das Differentiationsproblem (3.62) ist also auch im Raum  $H^1(0,1)$  vom Inkorrektheitsgrad  $\nu = 1$ .

## 3.2 Nichtlineare Operatorgleichungen und ihr lokales Korrektheitsverhalten in Hilberträumen

Im Abschnitt 2.2.4 haben wir in Banachräumen die lokale Korrektheit bzw. Inkorrektheit (s. Definition 2.7) von nichtlinearen Identifikationsproblemen

$$F(x) = y, \quad x \in D \subseteq X, \quad y \in Y \quad (3.64)$$

studiert und Beispiele für lokal inkorrekte Aufgaben betrachtet. Wir wollen die Operatorgleichung (3.64) nun unter der Voraussetzung weiterverfolgen, daß  $X$  und  $Y$  separable Hilberträume darstellen. Dazu werden eingangs einige Begriffe zur genaueren Charakterisierung der nichtlinearen Operatoren  $F$  bereitgestellt.

### 3.2.1 Einige weitere Begriffe zu nichtlinearen Operatoren

In Definition 2.6 haben wir den Begriff des vollstetigen linearen Operators  $A$  eingeführt. Eine entsprechende Definition der **Vollstetigkeit** können wir auch für nichtlineare Operatoren  $F$  geben.

**Definition 3.5** *Ein nichtlinearer Operator  $F : D \subseteq X \rightarrow Y$ , der zwischen den Hilberträumen  $X$  und  $Y$  wirkt, heißt **vollstetig** auf der Teilmenge  $S \subseteq D$ , wenn  $F$  auf  $S$  stetig ist und jede in  $X$  beschränkte Teilmenge  $T \subseteq S$  in eine relativ kompakte Teilmenge  $F(T) = \{y \in Y : y = F(x), x \in T\}$  von  $Y$  abbildet.*

Eine weitere wichtige Eigenschaft nichtlinearer Operatoren, die wir hier betrachten wollen, ist die **schwache Abgeschlossenheit**.

**Definition 3.6** *Ein nichtlinearer Operator  $F : D \subseteq X \rightarrow Y$ , der zwischen den Hilberträumen  $X$  und  $Y$  wirkt, heißt **schwach abgeschlossen**, wenn für  $\{x_n\} \subset D$  die schwache Konvergenz der Folgen  $x_n \rightharpoonup x_0$  in  $X$  und  $F(x_n) \rightharpoonup y_0$  in  $Y$  die Beziehungen  $x_0 \in D$  und  $F(x_0) = y_0$  nach sich zieht.*

Eine Verbindung zwischen den Definitionen 3.5 und 3.6 liefert der folgende Hilfssatz:

**Hilfssatz 3.9** *Falls der schwach abgeschlossene Operator  $F : D \subseteq X \rightarrow Y$  auf  $S \subseteq D$  vollstetig ist, so transformiert  $F$  schwach konvergente Folgen  $x_n \rightharpoonup x_0$  in  $X$  mit  $\{x_n\} \subset S$  und  $x_0 \in S$  in stark konvergente Folgen  $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$  in  $Y$ .*

Um nichtlineare Operatoren  $F$  in **Taylorreihen** entwickeln zu können, wie wir es bei Funktionen einer oder mehrerer reeller Veränderlicher gewöhnt sind, benötigen wir den Begriff der Ableitung des Operators  $F$  im Punkt  $x_0 \in D$ . Dabei betrachten wir zwei Varianten einer solchen Ableitung, die **Fréchet-Ableitung** und die **Gâteaux-Ableitung**.

**Definition 3.7** Ein beschränkter linearer Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  heißt *Fréchet-Ableitung* des Operators  $F : D \subseteq X \rightarrow Y$  im Punkt  $x_0 \in \text{int}(D)$  (innerer Punkt von  $D$ ), wenn es eine offene Kugel  $B_r(x_0) \subseteq D$  und ein positives reelles Funktional  $\varepsilon : B_r(x_0) \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$  gibt, so daß für alle  $x \in B_r(x_0)$  gilt:

$$\|F(x) - F(x_0) - A(x - x_0)\|_Y \leq \varepsilon(x) \|x - x_0\|_X. \quad (3.65)$$

Der Operator  $F$  heißt auf der offenen Menge  $S \subseteq D$  *Fréchet-differenzierbar*, wenn er in allen Punkten  $x_0 \in S$  eine Fréchet-Ableitung  $F'(x_0) := A$  besitzt.

Gilt für  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  anstelle von Ungleichung (3.65) für hinreichend kleines  $t$  und beliebige Elemente  $h \in X$  mit  $\|h\|_X = 1$  sowie eine positive reelle Funktion  $\varepsilon$  mit  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$  die Beziehung

$$\|F(x_0 + th) - F(x_0) - t(Ah)\|_Y \leq \varepsilon(t) |t|, \quad (3.66)$$

so heißt  $F'(x_0) := A$  **Gâteaux-Ableitung** von  $F$  im Punkt  $x_0$ . Jede Fréchet-Ableitung  $F'(x_0)$  ist auch eine Gâteaux-Ableitung, und jeder auf einer offenen Menge  $S \subseteq D$  Fréchet-differenzierbare Operator  $F$  ist auf dieser Menge  $S$  auch stetig. Existiert  $F'(x_0)$  für alle  $x \in B_r(x_0)$  und ist als Abbildung  $x \in B_r(x_0) \subset X \mapsto F'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$  stetig, so gilt eine Darstellung

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^1 F'(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) dt \quad (x \in B_r(x_0)). \quad (3.67)$$

Ist außerdem

$$\|F'(x) - F'(x_0)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq L \|x - x_0\|_X \quad (x \in B_r(x_0)), \quad (3.68)$$

so erhalten wir aus (3.67) die Abschätzung

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \leq \frac{L}{2} \|x - x_0\|_X^2 \quad (x \in B_r(x_0)). \quad (3.69)$$

Es ist von einiger Bedeutung, daß sich die Vollstetigkeit eines nichtlinearen Operators  $F$  auf dessen Fréchet-Ableitungen überträgt (s. [COKR92, S.101]):

**Hilfssatz 3.10** Es sei  $F : D \subseteq X \rightarrow Y$  ein auf der offenen Menge  $S \subseteq D$  vollstetiger Operator, der im Punkt  $x_0 \in S$  Fréchet-differenzierbar ist. Dann stellt die Fréchet-Ableitung  $F'(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$  ebenfalls einen vollstetigen Operator dar.

### 3.2.2 Hinreichende Bedingungen für lokale Inkorrektheit und lokale Korrektheit

In den Abschnitten 2.2.3 und 3.1.4 haben wir gesehen, daß vollstetige lineare Operatoren  $A$  mit unendlichdimensionalem Bildraum  $R(A)$  stets auf inkorrekte Probleme führen, bei denen insbesondere die Hadamardsche Stabilitätsbedingung (2.20) nicht erfüllt ist. Weiter konnten wir uns im Abschnitt 2.2.4 davon überzeugen, daß die lokale Korrektheit einer nichtlinearen inversen Aufgabe einer lokalen Variante der Stabilitätsbedingung (2.20) entspricht. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß vollstetige nichtlineare Operatoren  $F$  mit lokal inkorrekten Problemen eng verbunden sind. Dies wollen wir im Satz 3.8 zeigen. Vorher formulieren wir aber noch einige Voraussetzungen, die uns in diesem Abschnitt stets begleiten sollen: Wir nehmen an, daß der Definitionsbereich  $D$  von  $F$  wenigstens eine abgeschlossene Kugel

$$\bar{B}_r(x_0) := \{x \in X : \|x - x_0\|_X \leq r\} \subseteq D(F) \quad (3.70)$$

mit positivem Radius  $r$  enthält und der Operator  $F$  im Inneren  $B_r(x_0)$  der Kugel **stetige Fréchet-Ableitungen**  $F'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$  besitzt, die der Glattheitsbedingung (3.68) genügen.

**Satz 3.8** *Der Definitionsbereich  $D$  des zwischen den unendlichdimensionalen separablen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  wirkenden schwach abgeschlossenen Operators  $F$  erfülle für einen Kugelradius  $r > 0$  die Bedingung (3.70). Weiter sei  $F$  auf  $\bar{B}_r(x_0)$  vollstetig. Dann ist die nichtlineare Operatorgleichung (3.64) in  $x_0$  lokal inkorrekt.*

Wählt man sich nämlich in  $X$  ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem  $\{e_n\} \subset X$ , von dem bekannt ist, daß schwache Konvergenz  $e_n \rightharpoonup \mathbf{0}$  in  $X$  vorliegt, so gilt  $x_n := x_0 + \rho e_n \in \bar{B}_r(x_0)$  mit  $\|x_n - x_0\|_X = \rho$  und  $x_n \rightharpoonup x_0$ , aber  $x_n \not\rightarrow x_0$  in  $X$  für beliebige  $0 < \rho \leq r$ , woraus wegen Hilfssatz 3.9 die starke Konvergenz der Bildfolge  $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$  in  $Y$  folgt. Dies entspricht gerade der lokalen Inkorrektheit in  $x_0$ .

Unter den in Satz 3.8 geforderten Bedingungen ist die Vollstetigkeit von  $F$  hinreichend für die lokale Inkorrektheit von (3.64) in  $x_0$ . Aussagen darüber, wie weit man die Kugelbedingung (3.70) abschwächen kann, so daß trotzdem lokale Inkorrektheit auftritt, findet man in der Arbeit [EKN89].

Um eine nichtlineare Gleichung (3.64) in der Umgebung eines Punktes  $x_0$  näherungsweise mit Hilfe einer einfacheren linearen Gleichung lösen zu können, betrachtet man gern die **Linearisierung**, die sich ergibt, wenn man  $F(x)$  in  $x_0$

in eine Taylorreihe bis zum linearen Glied  $F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$  entwickelt. So entsteht als Näherung für (3.64) eine lineare Operatorgleichung

$$F'(x_0)x = \tilde{y}, \quad x \in D \subseteq X, \quad \tilde{y} \in Y, \quad F'(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y) \quad (3.71)$$

vom Typ (2.10) mit  $\tilde{y} := y - F(x_0) + F'(x_0)x_0$ . Wegen Hilfssatz 3.10 ist für  $F$  vollstetig auf  $\bar{B}_r(x_0)$  auch die Fréchet-Ableitung  $F'(x_0)$  vollstetig. Aufgrund der Ergebnisse von Abschnitt 3.1 erweist sich die lineare Operatorgleichung (3.71) genau dann als korrekt nach Nashed, wenn  $\dim(R(F'(x_0))) < \infty$  gilt. Für vollstetige Operatoren  $F$  und unendlichdimensionale Hilberträume  $X$  und  $Y$  führt das in  $x_0$  lokal instabile nichtlineare Problem (3.64) entweder auf ein ebenfalls instabiles linearisiertes Problem (3.71) mit  $\dim(R(F'(x_0))) = \infty$  und einer unbeschränkten Moore-Penrose-Inverse  $F'(x_0)^\dagger$  der Fréchet-Ableitung oder aber  $F'(x_0)$  ist ausgeartet mit  $F'(x_0)^\dagger \in \mathcal{L}(Y, X)$  und einer stabilen linearisierten Gleichung (3.71). Für beide Fälle lassen sich Beispiele angeben.

Man kann die lokale Korrektheit einer nichtlinearen Gleichung (3.64) allerdings erzwingen, indem man den Bereich der zulässigen Lösungen auf eine Menge

$$\tilde{D} = \{x \in D : x - x_0 = F'(x_0)^* w, \quad w \in Y, \quad \|w\|_Y \leq \tau\} \quad (3.72)$$

einschränkt. Alle Elemente einer solchen Menge lassen eine **Quelldarstellung**

$$x - x_0 = F'(x_0)^* w \quad (w \in Y) \quad (3.73)$$

zu, wobei  $F'(x_0)^*$  der zu  $F'(x_0)$  adjungierte Operator ist.

**Satz 3.9** *Unter den in diesem Abschnitt formulierten Voraussetzungen an das lokale Verhalten des Operators  $F$  in der Umgebung des Punktes  $x_0$  ist die Operatorgleichung*

$$F(x) = y, \quad x \in \tilde{D} \subseteq X, \quad y \in Y \quad (3.74)$$

*mit einem gegenüber der Ausgangsgleichung (3.64) im Sinne von (3.72) eingeschränkten Bereich  $\tilde{D}$  zulässiger Lösungen stets lokal korrekt in  $x_0$ .*

Wir betrachten zum Beweis des Satzes die für alle  $x \in \tilde{D}$  gültige und aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung resultierende Abschätzung

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|_X^2 &= \langle x - x_0, F'(x_0)^* w \rangle_X = \langle F'(x_0)(x - x_0), w \rangle_Y \\ &\leq \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \|w\|_Y \leq \tau \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich für  $x \in \widetilde{D} \cap B_r(x_0)$  mit (3.69) und  $\theta := \frac{L\tau}{2}$

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \leq \theta \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y$$

und somit wegen der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y &\leq \|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \\ &\quad + \|F(x) - F(x_0)\|_Y \leq (1 + \theta) \|F(x) - F(x_0)\|_Y. \end{aligned}$$

Folglich gilt für alle  $x \in \widetilde{D} \cap B_r(x_0)$  die Stabilitätsabschätzung

$$\|x - x_0\|_X \leq \sqrt{\tau(1 + \theta)} \sqrt{\|F(x) - F(x_0)\|_Y},$$

aus der die lokale Korrektheit von (3.74) folgt.

Gelingt es bei der näherungsweise Lösung von Gleichung (3.64) in einer Umgebung von  $x_0$  stets solche Näherungslösungen auszuwählen, die der Quelldarstellung (3.73) genügen, so kann man die Instabilität des Problems überwinden. Manche iterativen Näherungsverfahren zur Lösung von (3.64) lassen sich in dieser Weise handhaben.

**Beispiel 3.7** Wir betrachten für eine lichtdurchlässige Materialschicht der Dicke  $d = 1$ , in welcher der reelle Parameter  $t$  den Abstand eines entsprechenden Schichtpunktes von der Unterkante der Schicht beschreibt, die Profilkurve  $x(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) einer physikalischen Größe, deren nicht direkt meßbaren Werte nur von  $t$  abhängen. Bei der Schicht kann es sich um einen dünnen Film, aber auch um eine Luftschicht in der Erdatmosphäre handeln, wobei  $x$  dann z.B. ein Refraktionsprofil oder ein Temperaturprofil verkörpern kann. Aus integralen Meßdaten  $y(s)$  ( $0 \leq s \leq 1$ ), die bei Durchstrahlung der Schicht gewonnen werden, soll im Sinne eines Identifikationsproblems die Materialfunktion  $x$  rekonstruiert werden. Diese Daten können Intensitätswerte der Strahlung nach Durchlaufen der Schicht als Funktion der Wellenlänge oder des Einfallswinkels  $s$  der Strahlung sein. Kennt man die Reaktionsfunktion  $k(s, t, x)$  der Schichtbestandteile in der jeweiligen Höhe  $t$  auf die jeweilige Strahlung  $s$ , die auch noch von der dazugehörigen Profilkurve abhängen darf, so ist das inverse Problem als nichtlineare **Urysohnsche Integralgleichung**

$$[F(x)](s) := \int_0^1 k(s, t, x(t)) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.75)$$

zu schreiben. Wenn mit  $f \in L^2((0, 1) \times (0, 1))$

$$|k(s, t, x)| \leq f(s, t) (c_1 + c_2 |x|) \quad (s, t \in [0, 1], x \in \mathbb{R})$$



gilt, so ist der Operator  $F : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$  auf dem ganzen Raum  $L^2(0, 1)$  vollstetig und die Gleichung (3.75) damit überall lokal inkorrekt. Falls weiterhin die zweiten partiellen Ableitungen  $\frac{\partial^2 k(s, t, x)}{\partial x^2}$  nach der dritten Variablen der Kernfunktion überall existieren und gleichmäßig beschränkt sind, so gibt es für alle  $x_0 \in L^2(0, 1)$  die Fréchet-Ableitung  $F'(x_0)$  des Operators  $F$  mit der Darstellung

$$[F'(x_0)h](s) = \int_0^1 \frac{\partial k(s, t, x_0(t))}{\partial x} h(t) dt \quad (0 \leq s \leq 1; h \in L^2(0, 1)). \quad (3.76)$$

Der Operator  $F'(x_0)$  aus (3.76) ist dann für alle  $x_0 \in L^2(0, 1)$  ein vollstetiger linearer Fredholmscher Integraloperator mit quadratisch integrierbarem Kern. Auch das in Beispiel 3.1 vorgestellte Identifikationsproblem der Satellitenmeteorologie führt bei strenger Modellierung erst einmal auf eine Integralgleichung (3.75). Meist wird jedoch für die näherungsweise Bestimmung vertikaler Temperaturprofile in der Erdatmosphäre eine Linearisierung (s. Formel (3.71)) dieser nichtlinearen Gleichung verwendet, die wiederum durch Diskretisierung auf ein lineares Gleichungssystem (3.7) gebracht wird, welches wir in Beispiel 3.1 diskutiert haben.  $\square$

Betrachtet man dagegen nochmals den nichtlinearen **Selbstfaltungsoperator**  $F : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$  aus Formel (2.67), so erweist sich dieser als schwach abgeschlossen, aber nicht vollstetig auf jeder Kugel  $B_r(\mathbf{0})$  (s. [GOHO94]). Von der Nichtvollstetigkeit des Operators  $F$  überzeugt man sich leicht anhand der Folge

$$x_n(t) = r \sin nt \quad (0 \leq t \leq 1)$$

mit  $\{x_n\} \subset B_r(\mathbf{0})$ ,  $x_n \rightharpoonup \mathbf{0}$ ,  $\|x_n\|_{L^2(0,1)} \rightarrow \frac{r}{2}\sqrt{2} \neq 0$  und

$$[F(x_n)](s) = r^2 \left( -\frac{s \cos ns}{2} + \frac{\sin ns}{2n} \right) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

sowie  $F(x_n) \rightharpoonup \mathbf{0}$ , aber  $\|F(x_n)\|_{L^2(0,1)} \rightarrow \frac{r}{12}\sqrt{6} \neq 0$ . Die Bildfolge  $\{F(x_n)\}$  in  $L^2(0, 1)$  kann also keine konvergente Teilfolge besitzen, und es liegt keine Vollstetigkeit vor. Interessanterweise ist trotzdem die Fréchet-Ableitung

$$[F'(x_0)h](s) = 2 \int_0^s x_0(s-t) h(t) dt \quad (0 \leq s \leq 1; h \in L^2(0, 1)) \quad (3.77)$$

für alle  $x_0 \in L^2(0, 1)$  ein vollstetiger linearer Faltungsoperator.

### 3.2.3 Der lokale Grad der Inkorrektheit

Um für ein nichtlineares Identifikationsproblem (3.64) in sinnvoller Weise einen **lokalen Grad der Inkorrektheit** im Punkt  $x_0 \in D$  einführen zu können (s. [HOF94]), bilden vollstetige lineare Operatoren  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , die das lokale Verhalten des Operators  $F$  in einer Umgebung von  $x_0$  hinreichend widerspiegeln, ein gutes Hilfsmittel. Insbesondere leistet dies in optimaler Weise eine vollstetige Fréchet-Ableitung  $F'(x_0)$ , wovon wir uns in Satz 3.10 überzeugen werden. Unter dem lokalen Grad der Inkorrektheit von (3.64) im Punkt  $x_0$  wollen wir daher den Grad der Inkorrektheit der entsprechenden linearisierten Gleichung (3.71) verstehen. In der Arbeit [HOSR94] wurde gezeigt, daß es allerdings unterschiedlich enge Verbindungen der Fréchet-Ableitung  $F'(x_0)$  mit dem nichtlinearen Operator  $F$  im Punkt  $x_0$  gibt. Wenn eine  $\eta$ -**Bedingung** (s. [EHN96, S.279])

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \leq \eta \|F(x) - F(x_0)\|_Y \quad (3.78)$$

für eine Konstante  $\eta > 0$  und alle  $x$  aus einer Kugel  $\bar{B}_r(x_0)$  erfüllt wird, ist diese Bindung so eng, daß die Fréchet-Ableitung die wesentlichen Eigenschaften des nichtlinearen Operators  $F$  in einer Umgebung von  $x_0$  zum Ausdruck bringt. Gilt nur eine Abschätzung (3.69), so kann dieser Zusammenhang wesentlich schwächer sein. Aber auch in diesem Fall liefert der Satz 3.9 gute Argumente, um den lokalen Grad der Inkorrektheit über die Abklingrate der Singulärwerte von  $F'(x_0)$  zu motivieren.

Um Aufschlüsse über das Stabilitätsverhalten einer nichtlinearen Operatorgleichung (3.64) im Punkt  $x_0$  zu gewinnen, kann man auch danach fragen, welche linearen Operatoren  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  eine Ungleichung des Typs

$$\|A(x - x_0)\|_Y \leq K \|F(x) - F(x_0)\|_Y \quad (x \in B_r(x_0)) \quad (3.79)$$

befriedigen. Betrachtet man solche Operatoren  $A$ , so gilt für diese mit  $\|z\|_z := \|Az\|_Y$  ( $z \in X$ ) eine Stabilitätsabschätzung

$$\|x - x_0\|_z \leq K \|F(x) - F(x_0)\|_Y \quad (x \in B_r(x_0)).$$

Dabei erfüllt  $\|\cdot\|_z$  die ersten beiden Normaxiome (s. Abschn. 2.1.1), das dritte Axiom jedoch nur für injektive Operatoren  $A$ . Wir sprechen daher von einer **Seminorm**  $\|\cdot\|_z$ . Mißt man die Abstände in  $X$  in dieser Seminorm, so ist die nichtlineare Aufgabe (3.64) diesbezüglich lokal korrekt, wenn (3.79) gilt. Wir suchen unter allen solchen Operatoren  $A$  nun denjenigen Operator  $A_{max}$ , der **maximal** ist im Sinne der **Halbordnung**

$$A_1 \prec A_2 \quad \Leftrightarrow \quad \|A_1 h\|_Y \leq c \|A_2 h\|_Y \quad (h \in X), \quad (3.80)$$

d.h. für den stets  $A \prec A_{max}$  gilt. Dieser gesuchte Operator ist derjenige mit dem „kleinsten Nullraum“ und mit den „geringsten Glättungseigenschaften“ unter allen Operatoren  $A$ , die (3.79) erfüllen. Es sollte erwähnt werden, daß die Halbordnung (3.80) sich auf Äquivalenzklassen bezieht. Zwei Operatoren  $A_1$  und  $A_2$  werden als zu einer Äquivalenzklasse gehörend „identifiziert“, falls sie der Beziehung  $A_1 \sim A_2$  mit

$$A_1 \sim A_2 \Leftrightarrow c_{min} \|A_2 h\|_Y \leq \|A_1 h\|_Y \leq c_{max} \|A_2 h\|_Y \quad (h \in X) \quad (3.81)$$

für Konstanten  $0 < c_{min} \leq c_{max} < \infty$  genügen.

**Satz 3.10** *Der Operator  $F$  erfülle für  $x \in \bar{B}_r(x_0)$  eine  $\eta$ -Bedingung (3.78). Dann ist die Fréchet-Ableitung  $F'(x_0)$  ein Repräsentant der eindeutig bestimmten Äquivalenzklasse maximaler Operatoren  $A_{max}$  zur Halbordnung (3.80) bezüglich aller beschränkten linearen Operatoren  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , die eine Ungleichung (3.79) befriedigen.*

Die Aussage von Satz 3.10 ergibt sich aus der Tatsache, daß die betrachtete Fréchet-Ableitung  $F'(x_0)$  auch eine Gâteaux-Ableitung mit

$$F'(x_0)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t}$$

ist. Dann folgt nämlich für alle  $h \in X$  und hinreichend kleines  $t$  die Ungleichung  $\|A(th)\|_Y \leq K \|F(x_0 + th) - F(x_0)\|_Y$  und beim Übergang zur Grenze  $t \rightarrow 0$  auch  $\|Ah\|_Y \leq K \|F'(x_0)h\|_Y$  sowie  $A \prec F'(x_0)$  für alle Operatoren  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , die (3.79) erfüllen.  $F'(x_0)$  erfüllt aber selbst (3.79), da wegen der Dreiecksungleichung und der  $\eta$ -Bedingung für  $x \in \bar{B}_r(x_0)$  die Abschätzung  $\|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \leq \|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y + \|F(x) - F(x_0)\|_Y \leq (\eta + 1) \|F(x) - F(x_0)\|_Y$  gilt. Somit ist  $F'(x_0) = A_{max}$  und die Fréchet-Ableitung maximaler Operator im Sinne der eingeführten Halbordnung.

Im Anschluß an die Beispiele 2.4 sowie 2.5 und durch diese angeregt wurde in Abschnitt 2.2.4 der nichtlineare Operator (2.66) diskutiert und die lokale Inkorrektheit der entsprechenden nichtlinearen Gleichungen gezeigt. Wir betrachten für  $X = Y = L^2(0, 1)$  diesen auf ganz  $L^2(0, 1)$  definierten Operator

$$[F(x)](s) := c_0 \exp \left( c_1 \int_0^s x(t) dt \right) \quad (0 \leq s \leq 1; c_0 > 0, c_1 \neq 0) \quad (3.82)$$

mit der Fréchet-Ableitung

$$[F'(x_0)h](s) := c_1 [F(x_0)](s) \int_0^s h(t) dt \quad (0 \leq s \leq 1; h \in L^2(0, 1)) \quad (3.83)$$

im Punkt  $x_0 \in L^2(0, 1)$ . Wegen der Positivität, Stetigkeit und damit Beschränktheit der Funktion  $[F(x_0)](s)$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) (s. Aufgabe 2.3) haben wir Äquivalenz  $F'(x_0) \sim A$  im Sinne von Formel (3.81) zwischen der Fréchet-Ableitung (3.83) und dem Integraloperator  $A$  des Differentiationsproblems (s. Formel (3.35)), von dem wir wissen, daß ein Grad  $\nu = 1$  der Inkorrektheit vorliegt. Dann ist  $\nu = 1$  auch der im ganzen Raum  $L^2(0, 1)$  einheitliche lokale Grad der Inkorrektheit von (3.64) für  $F$  aus (3.82) (s. Hilfssatz 3.7 und Formeln (3.60) sowie (3.61)). Der in (3.83) definierte Operator  $F'(x_0)$  ist wegen Satz 3.10 für alle  $x_0 \in L^2(0, 1)$  auch maximaler Operator für die Halbordnung (3.80) unter allen linearen Operatoren  $A$ , die einer Ungleichung (3.79) genügen, denn er befriedigt selbst eine  $\eta$ -Bedingung (3.78). Dies erkennt man bei Betrachtung der für  $0 \leq s \leq 1$  gültigen Beziehungen

$$[F(x) - F(x_0)](s) = [F(x_0)](s) (\exp(\psi(s)) - 1),$$

$$[F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)](s) = [F(x_0)](s) (\exp(\psi(s)) - 1 - \psi(s))$$

sowie schließlich

$$|[F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)](s)| \leq |\psi(s)| |[F(x) - F(x_0)](s)|$$

mit  $\psi(s) := c_1 \int_0^s (x(t) - x_0(t)) dt$  und  $|\exp(\psi) - 1 - \psi| \leq |\psi| |\exp(\psi) - 1|$  ( $\psi \in \mathbb{R}$ ), aus denen

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_{L^2(0,1)} \leq c_1 \|x - x_0\|_{L^2(0,1)} \|F(x) - F(x_0)\|_{L^2(0,1)}$$

folgt.

Aber nicht jeder nichtlineare Operator führt wie  $F$  aus (3.82) auf einen in allen Punkten  $x_0$  einheitlichen Grad der Inkorrektheit. Wie in [GOHO94] ausführlich dargestellt wird, kann der Grad der Inkorrektheit für den Selbstfaltungsoperator (2.67) in Abhängigkeit vom Punkt  $x_0$  stark variieren. Satz 3.6 zeigt nämlich, daß für einen Faltungsoperator (3.77), der in diesem Fall die Fréchet-Ableitung bildet, schwache, mäßige und starke Inkorrektheiten möglich sind, je nachdem wie glatt die Funktion  $x_0$  ist und welches Verhalten diese Funktion an der Stelle  $t = 0$  aufweist (s. auch Aufgabe 3.6).

## Aufgaben

**Aufgabe 3.1** Zeigen Sie, daß für Elemente  $y \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$  keine Minimum-Norm-Lösungen der linearen Operatorgleichung (3.1) im Sinne der Formeln (3.4) und (3.5) existieren, also die Moore-Penrose-Inverse  $A^\dagger$  auf diese Elemente nicht anwendbar ist. Zeigen Sie dazu, daß das Funktional  $J(x) = \|Ax - y\|_Y^2$  des Defektnormquadrats für  $y \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$  zwar ein endliches Infimum  $\inf_{x \in X} J(x) > -\infty$  besitzt, jedoch für solche rechten Seiten  $y$  kein Element  $x_{mn} \in X$  mit  $J(x_{mn}) = \inf_{x \in X} J(x)$  existiert.

**Aufgabe 3.2** Wir betrachten in Bsp. 3.1 den Fall eines unterbestimmten linearen Gleichungssystems (3.7) mit  $m < n$  und  $\text{rang}(\underline{A}) = m$ . Man finde in diesem Fall eine Darstellung der Minimum-Norm-Lösung  $\underline{x}_{mn}$  von (3.7) als Gegenstück zu der für den Vollrangfall  $\text{rang}(\underline{A}) = n$  gültigen Formel (3.9).

**Aufgabe 3.3** Ist die Lösung  $x \in L^2(0, L)$  der Integralgleichung (3.15) aus Bsp. 3.3, sofern eine solche für gegebenes  $y \in L^2(0, L)$  überhaupt existiert, stets eindeutig bestimmt?

**Aufgabe 3.4** Im Falle separabler unendlichdimensionaler Hilberträume  $X, Y$  und  $Z$  gelte für zwei injektive beschränkte lineare Operatoren  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  und  $B \in \mathcal{L}(X, Z)$  sowie eine Konstante  $C > 0$  die Abschätzung

$$\|Ax\|_Y \leq C \|Bx\|_Z \quad \text{für alle } x \in X.$$

Man zeige, daß die folgenden beiden Aussagen gelten: Falls  $B$  vollstetig ist, so ist auch  $A$  vollstetig. Wenn  $A$  und  $B$  vollstetige Operatoren sind und sich die Operatorgleichung  $Ax = y$  als höchstens inkorrekt vom Grade  $\nu > 0$  erweist, so ist auch die Operatorgleichung  $Bx = z$  höchstens inkorrekt vom Grade  $\nu$ .

**Aufgabe 3.5** Welchen Grad der Inkorrektheit besitzt die Faltungsgleichung

$$\int_0^s \exp\left(-\frac{1}{s-t}\right) x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

im Raum  $X = Y = L^2(0, 1)$ ?

**Aufgabe 3.6** Für welche Elemente  $x_0 \in L^2(0, 1)$  erfüllt der in Formel (2.67) definierte Selbstfaltungsoperator  $F : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$  eine  $\eta$ -Bedingung (3.78) für alle  $x$  aus einer Kugel  $\bar{B}_r(x_0)$  im Raum  $L^2(0, 1)$  mit Mittelpunkt  $x_0$  und Radius  $r > 0$ ?

## 4 Regularisierungsmethoden

Dieses Kapitel soll nun Antworten auf die Frage liefern, wie man inkorrekte inverse Aufgaben, deren Lösungen insbesondere nicht stabil von den Eingangsdaten abhängen, näherungsweise stabil lösen kann. Methoden, die einen solchen Zweck erfüllen, heißen allgemein **Regularisierungsmethoden**. Wir wollen im folgenden einen Überblick über diesen Methodenkomplex geben und wichtige Prinzipien der Theorie der Regularisierung vorstellen. Die aufgabenbezogene analytische und numerische Umsetzung dieser Theorie mit dem Ziel der Lösung konkreter angewandter inverser Probleme aus allen Zweigen der Naturwissenschaft und Technik ist in zahlreichen Büchern und Zeitschriftenartikeln nachzulesen, die in den letzten 40 Jahren entstanden sind und von denen eine kleine Auswahl im Literaturverzeichnis aufgeführt ist.

Die Einbeziehung von Zusatzinformationen begegnete uns als grundlegende Technik der Regularisierung bereits im Abschnitt 2.3. Dabei haben wir auch die als **deskriptive Regularisierung** bezeichnete Variante der Regularisierungsmethoden im Zusammenhang mit dem Satz von Tichonov (s. Satz 2.5) kennengelernt. Diese Variante beruht auf der Nutzung objektiver Apriori-Informationen über die Gestalt der gesuchten Lösung, die für die Einschränkung des Bereichs  $D$  zulässiger Lösungen auf eine kompakte Menge in  $X$  ausreichen. Uns interessiert in diesem Kapitel der leider häufiger auftretende Fall, daß eine so weitgehende Lösungseinschränkung für das Identifikationsproblem nicht erreicht wird. Der Einfachheit halber konzentrieren wir uns hier wie im vorangegangenen Kapitel 3 auf Identifikationsprobleme, die sich als lineare bzw. nichtlineare Operatorgleichungen (3.1) bzw. (3.64) in separablen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  schreiben lassen. Es sei erwähnt, daß sich die im weiteren vorgestellten Regularisierungszugänge modifiziert und manchmal mit gewissen Einschränkungen versehen auch in Banachräumen formulieren lassen.

Wie wir aus der bisherigen Diskussion des Inkorrekttheitsphänomens in Hilberträumen entnehmen können, ist **für inkorrekte Aufgaben** in unendlichdimensionalen Räumen  $X$  und  $Y$  die **Methode der kleinsten Quadrate**, die auf der Minimierung des Defektnormquadrats

$$\|F(x) - y_\delta\|_Y^2 = \min!, \quad x \in D \subseteq X \quad (4.1)$$

für allgemeine nichtlineare Operatorgleichungen bzw.

$$\|Ax - y_\delta\|_Y^2 = \min!, \quad x \in X \quad (4.2)$$

für den Spezialfall der unrestringierten linearen Operatorgleichungen beruht, **praktisch zum Scheitern verurteilt**. Diese in der englischsprachigen Literatur unter dem Begriff **output least-squares** eingeführte Methode verfolgt das

Ziel, das gesuchte Lösungselement  $x$  ideal an die gegebenen fehlerbehafteten Daten  $y_\delta$  anzupassen, die mit den exakten Daten  $y$  über die Beziehung

$$\|y_\delta - y\|_Y \leq \delta \quad (4.3)$$

verbunden sind. Zum einen existieren für Elemente  $y_\delta$ , die nicht im Wertebereich der Operatoren  $F$  bzw.  $A$  liegen, im Normalfall gar keine die Defektnormquadrate minimierenden Elemente, zum anderen entspricht eine derartige Minimierung der Bestimmung von  $x = F^{-1}(y)$  bzw.  $x = A^{-1}y$ , falls solche inversen Operatoren  $F^{-1}$  bzw.  $A^{-1}$  existieren. Wir wissen aber, daß diese Inversen (oder wie im Falle der Moore-Penrose-Inversen  $A^\dagger$  deren Verallgemeinerungen) bei Verletzung der Stabilitätsbedingung (2.20) unstetig sind. Kleine Veränderungen in den Daten rufen so unkontrollierbare Fehler hervor.

Nicht viel günstiger sieht es für **schlechtkonditionierte Probleme** in endlichdimensionalen Räumen aus, die durch Diskretisierung, also z.B. durch Einschränkung der zulässigen Lösungen auf endlichdimensionale Teilräume  $X_n$  mit relativ großer Dimension  $n$ , entstanden sind (s. Abschn. 3.1.6). Dann existieren zwar Kleinste-Quadrate-Lösungen  $x_n$  aus Problem (3.38) und hängen stetig von den Daten ab, aber der Datenfehler multipliziert sich beim Übergang zum Fehler in der Lösung mit dem Faktor  $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)}$ , der wiederum für  $n \rightarrow \infty$  selbst ins Unendliche strebt (s. Hilfssatz 3.6). Für große Dimensionen  $n$  sind die Stabilitätsprobleme bei der Lösung eines endlichdimensionalen schlechtkonditionierten Problems, welches durch Diskretisierung aus einem inkorrekten Problem im unendlichdimensionalen Raum entstanden ist, von der gleichen Qualität wie beim inkorrekten Ausgangsproblem.

Das Prinzip der Regularisierung besteht daher für inkorrekte und schlechtkonditionierte korrekte Probleme darin, die Bildelemente  $F(x)$  bzw.  $Ax$  zu potentiellen Lösungen  $x$  **nicht so genau wie möglich** an die Daten  $y_\delta$  anzupassen, **sondern nur so genau wie nötig**, um damit Spielraum für eine Einbeziehung subjektiver Apriori-Informationen in den Lösungsvorgang zu erhalten (s. Abschn. 2.3.1). Die notwendige Anpassung an die Daten ist so zu verstehen, daß nur Elemente  $x$  als Lösungen in Frage kommen, die „datenkompatibel“ sind, d.h. deren Abweichung  $\|F(x) - y_\delta\|_Y$  bzw.  $\|Ax - y_\delta\|_Y$  die Größenordnung des Datenfehlerniveaus  $\delta$  nicht überschreitet. Falls die Operatoren  $F$  bzw.  $A$  selbst nur näherungsweise bekannt sind, muß der dadurch zusätzlich verursachte Fehler in den Bildelementen noch zum Datenfehlerniveau  $\delta$  hinzugezählt werden. Mit dieser Situation werden wir uns hier nicht befassen (s. aber z.B. [HOF86, Abschn. 4.1.3]).

Die Menge der datenkompatiblen Elemente, die auch alle gegebenen objektiven Apriori-Informationen berücksichtigen, ist aber in der Regel ungeheuer umfangreich. Die Regularisierung kennt nun zwei Wege, um in dieser Menge

eine **regularisierte Lösung** als Näherungslösung auszuwählen. Der erste Weg, den wir nicht weiter verfolgen wollen, weil er theoretisch kaum beherrscht wird, ist die **ungesteuerte Regularisierung**. Man kann dabei ein instabiles Minimierungsproblem (4.1) bzw. (4.2) durch **unvollständige Minimierung** stabilisieren, indem man das Minimierungsproblem (in der Regel nach vorheriger Diskretisierung) mit Hilfe eines Iterationsverfahrens löst, die Iteration einfach nach einer vorher subjektiv festgelegten Anzahl von Iterationsschritten abbricht und die letzte Iterierte als regularisierte Lösung verwendet. Die Instabilität tritt nämlich im Iterationsprozeß erst auf, wenn die Iterierten sich den Minimalelementen von (4.1) bzw. (4.2) stark annähern. Ebenso kann man eine diskretisierte inverse Aufgabe, etwa im Sinne eines Gleichungssystems mit  $m$  Gleichungen in  $n$  Unbekannten, durch Zulassung von **Rundungsfehlern** in der numerischen Lösung stabilisieren. In beiden Fällen ist aber trotz möglicherweise erreichter Stabilität der Näherungslösung absolut unklar, welche Eigenschaften die gewonnene Approximation besitzt und wie weit sie von der tatsächlichen Lösung eines Identifikationsproblems entfernt ist.

Wenigstens die Eigenschaften der Näherungslösung hat man in der Hand, wenn man den zweiten Weg geht und **gesteuert regularisiert**. Dies kann zum Beispiel geschehen, indem man (s. Formel (2.76) in Abschn. 2.3.1) bei der Auswahl der regularisierten Lösung über der Menge der datenkompatiblen Elemente ein Sympathiefunktional minimiert bzw. bei der iterativen Minimierung von (4.1) bzw. (4.2) den Iterationsabbruch vom Datenfehlerniveau  $\delta$  oder von erreichten Eigenschaften der Näherungslösung abhängig macht. Ebenso kann man regularisierte Lösungen in endlichdimensionalen Teilräumen suchen (s. Formel (3.38) in Abschn. 3.1.6), wobei hier die maximal zu wählende Raumdimension  $n$  wiederum durch die erreichten Eigenschaften der Näherungslösung bestimmt sein sollte. Verschiedenartige Methoden für diese Art der Regularisierung und Stabilitäts- sowie Approximationseigenschaften der damit erreichten Näherungslösungen werden uns in diesem Kapitel im weiteren interessieren.

## 4.1 Regularisierung linearer Operatorgleichungen mit vollstetigen Operatoren

In diesem Abschnitt wollen wir ein allgemeines Regularisierungsschema für die stabile näherungsweise Lösung unrestringierter linearer Operatorgleichungen (3.1) mit vollstetigen Operatoren  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  vorstellen. Diese Operatoren  $A$  sollen mit  $\dim(R(A)) = \infty$  zwischen den unendlichdimensionalen separablen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  wirken. Damit sind die betrachteten linearen inversen Probleme nach Nashed inkorrekt vom Typ II (s. Definition 3.1 in Abschn. 3.1.3). In dieses allgemeine Schema können verschiedenartige Regularisierungsverfah-



ren eingeordnet werden, deren spezielle Eigenschaften wir im Anschluß betrachten werden. Darüber hinaus kann das vorgestellte Regularisierungsschema auch auf Gleichungen (3.1) verallgemeinert werden, die nach Nashed inkorrekt vom Typ I sind, also nicht vollstetige Operatoren  $A$  aufweisen. Mit der dazu notwendigen **Spektraltheorie** solcher Operatoren wollen wir uns hier aber nicht befassen (s. [EHN96, S.42ff]).

#### 4.1.1 Ein allgemeines Regularisierungsschema

Unter der exakten Lösung von Gleichung (3.1) werden wir im weiteren die Minimum-Norm-Lösung  $x_{mn} = A^\dagger y$  für eine exakte rechte Seite  $y \in R(A)$  verstehen. Anhand von gestörten Daten  $y_\delta \in Y$ , welche die Ungleichung (4.3) befriedigen, soll diese exakte Lösung durch eine lineare Transformation der Daten näherungsweise so berechnet werden, daß die Näherungslösungen stetig von den Daten abhängen und einen möglichst kleinen Fehler aufweisen.

**Definition 4.1** Eine Familie  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$  von beschränkten linearen Operatoren  $R_\alpha \in \mathcal{L}(Y, X)$  heißt *lineare Regularisierung* für den Operator  $A^\dagger$ , wenn

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha y = A^\dagger y \quad \text{für alle } y \in R(A) \quad (4.4)$$

gilt. Der Operator  $R_\alpha$  heißt *linearer Regularisierungsoperator* für  $A^\dagger$  mit dem Regularisierungsparameter  $\alpha > 0$ .

Die Operatoren  $R_\alpha$  in Definition 4.1 approximieren für  $\alpha \rightarrow 0$  punktweise die Moore-Penrose-Inverse  $A^\dagger$ . Es gilt dabei der folgende Hilfssatz (s. [EHN96, S.53]):

**Hilfssatz 4.1** Wenn der Wertebereich  $R(A)$  des Operators  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  in  $Y$  nicht abgeschlossen ist, so folgt für eine Familie  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$  von beschränkten linearen Regularisierungsoperatoren  $R_\alpha \in \mathcal{L}(Y, X)$ , welche die Grenzwertbeziehung (4.4) befriedigen, die Divergenz der Operatornormen

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y, X)} = \infty. \quad (4.5)$$

Wendet man die Operatoren  $R_\alpha$  für einen festen Wert  $\alpha > 0$  auf die Daten  $y$  bzw.  $y_\delta$  an, so entstehen **regularisierte Lösungen**  $x_\alpha := R_\alpha y$  bzw.  $x_\alpha^\delta := R_\alpha y_\delta$ , die wegen der Beschränktheit von  $R_\alpha$  stetig von den Daten abhängen. Weiter

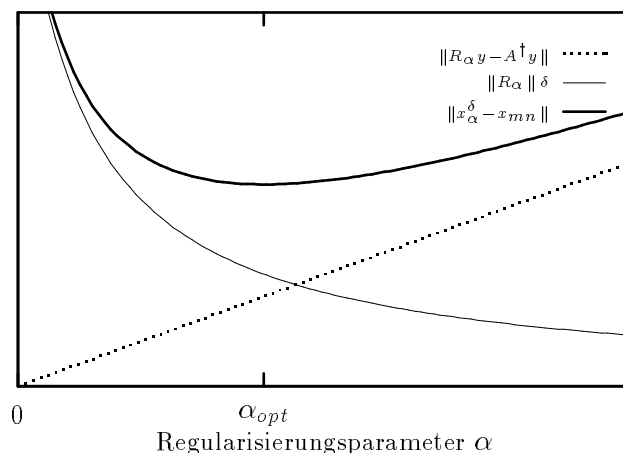
erhält man aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X &= \|R_\alpha y_\delta - A^\dagger y\|_X \leq \|R_\alpha y_\delta - R_\alpha y\|_X + \|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X \\ &\leq \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|y_\delta - y\|_Y + \|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X \end{aligned}$$

und damit im Ergebnis eine Abschätzung

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \delta + \|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X \quad (4.6)$$

des totalen Regularisierungsfehlers bestehend aus einer Stabilitätskomponente  $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \delta$ , die den Einfluß des Datenfehlers ausdrückt und einer Approximationsfehlerkomponente  $\|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X$ , die für den Fall exakter Daten ein Maß für den Abstand des über die Vorschrift  $x_\alpha = R_\alpha y$  gelösten stabilen „Nachbarproblems“ vom instabilen Ausgangsproblem der Berechnung von  $x_{mn} = A^\dagger y$  darstellt. Für kleine  $\alpha$  ist die zweite Komponente  $\|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X$  des Regularisierungsfehlers klein und strebt für  $\alpha \rightarrow 0$  selbst gegen Null, während die erste Fehlerkomponente  $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \delta$  wegen (4.5) bei festem Datenfehlerniveau  $\delta > 0$  für  $\alpha \rightarrow 0$  ins Unendliche tendiert. Vergrößert man den Regularisierungsparameter  $\alpha$ , so wird eine bessere Stabilität, die in einem fallenden Fehlerfaktor  $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$  zum Ausdruck kommt, durch einen wachsenden Approximationsfehler  $\|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X$  erkauft. Das prinzipielle Verhalten der Regularisierungsfehlerkomponenten ist in Bild 4.1 schematisch dargestellt.



**Bild 4.1** Verhalten der Komponenten des Regularisierungsfehlers

Die Wahl eines **optimalen Regularisierungsparameters**  $\alpha_{opt}$ , der den Gesamtfehler  $\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X$  minimiert, wird wieder auf der Grundlage eines Kompromisses zwischen Stabilität und Approximation gewonnen. Leider hängt dieser optimale Regularisierungsparameter von der Lösung  $x_{mn}$  selbst ab und ist

daher anhand der Daten nicht a priori bestimmbar. Für die Wahl eines geeigneten Regularisierungsparameters  $\alpha$ , der bei festen Daten  $y_\delta$  dem Optimalwert  $\alpha_{opt}$  nahekommen soll, wurden aber **heuristische Parameterwahlstrategien** entwickelt, auf die wir an späterer Stelle noch detailliert eingehen werden.

Hier soll uns nunmehr die Frage beschäftigen, ob man für eine Folge von Daten, deren Datenfehlerniveau  $\delta$  gegen Null strebt, die also die exakten Daten in der Grenze beliebig genau approximieren, eine zugehörige Folge von Regularisierungsparametern  $\alpha = \alpha(\delta)$  finden kann, so daß auch der Regularisierungsfehler  $\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X$  gegen Null strebt.

**Definition 4.2** *Im Zusammenhang mit der Bestimmung von Minimum-Norm-Lösungen  $x_{mn}$  einer linearen Operatorgleichung (3.1) in Hilberträumen  $X$  und  $Y$  sei eine lineare Regularisierung  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$  für den Operator  $A^\dagger$  im Sinne von Definition 4.1 gegeben. Dann heißt diese Regularisierung für eine Vorschrift  $\alpha = \alpha(\delta, y_\delta)$  zur Auswahl des positiven Regularisierungsparameters *k o n v e r g e n t*, wenn für alle  $y \in R(A)$*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \left\{ \|R_{\alpha(\delta, y_\delta)} y_\delta - x_{mn}\|_X : y_\delta \in Y, \|y_\delta - y\|_Y \leq \delta \right\} = 0 \quad (4.7)$$

*gilt.*

Wir sprechen von einer **Apriori-Parameterwahl**  $\alpha = \alpha(\delta)$ , wenn der Regularisierungsparameter  $\alpha$  nur vom Datenfehlerniveau  $\delta$  abhängig gemacht wird, andernfalls von einer **Apriori-Parameterwahl**, bei der z.B.  $\alpha$  so gewählt werden kann, daß die aktuelle Defektnorm  $\|Ax_\alpha^\delta - y_\delta\|_Y$  einer gewünschten Größe entspricht, die von  $\delta$  abhängen darf. Eine interessante Tatsache, die in der Literatur manchmal als Bakushinsky-Veto bezeichnet wird, ist die Nichtexistenz von konvergenten linearen Regularisierungen für nach Nashed inkorrekte lineare Operatorgleichungen, bei denen mit  $\alpha = \alpha(y_\delta)$  die Parameterwahlvorschrift nur von den Daten  $y_\delta$  abhängt, ohne das Datenfehlerniveau  $\delta$  explizit zu berücksichtigen. Vorschriften zur Regularisierungsparameterwahl, die ohne Kenntnis von  $\delta$  auskommen, liefern daher niemals konvergente lineare Regularisierungen (s. [EHN96, S. 51f]).

Eine direkt aus Formel (4.6) resultierende Apriori-Parameterwahl, die auf eine konvergente Regularisierung führt, liefert der folgende Satz:

**Satz 4.1** Eine lineare Regularisierung  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$  für  $A^\dagger$  ist konvergent, wenn der Regularisierungsparameter  $\alpha = \alpha(\delta)$  so gewählt wird, daß die Grenzwertbeziehungen

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad (4.8)$$

und

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|R_\alpha(\delta)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \delta = 0 \quad (4.9)$$

erfüllt sind.

Es ergeben sich nun als Fragen, wie man eine lineare Regularisierung überhaupt konstruieren kann, wie die Größen  $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)}$  dementsprechend beschaffen sind und welche Forderungen dies an die Apriori-Parameterwahl  $\alpha = \alpha(\delta)$  stellt, so daß die Bedingung (4.9) erfüllt wird. Zur Beantwortung dieser Fragen betrachten wir lineare Regularisierungen für  $A^\dagger$ , wenn der Operator  $A$  mit  $\dim(R(A)) = \infty$  vollstetig ist, die auf der Grundlage des singulären Systems  $\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j=1}^\infty$  (s. Definition 3.2) für den Operator  $A$  konstruiert werden. Wir gehen dazu von der Reihendarstellung der Minimum-Norm-Lösung

$$A^\dagger y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_j} \langle y, v_j \rangle_Y u_j, \quad y \in R(A) \quad (4.10)$$

(s. Formel (3.27)) aus und führen **Filterfaktoren**  $f(\alpha, \sigma_j)$  zur Dämpfung der die Instabilität verursachenden Vorfaktoren  $1/\sigma_j$  in (4.10) ein. Als lineare Näherungsvorschrift für  $A^\dagger y$  angewandt auf gestörte Daten  $y_\delta$  wählt man dabei

$$R_\alpha y_\delta := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(\alpha, \sigma_j)}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j, \quad y_\delta \in Y, \quad (4.11)$$

wobei die Filterfunktion  $f : (0, \infty) \times (0, \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}) \rightarrow \mathbb{R}$  für eine nichtnegative Funktion  $K : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  die Bedingungen

$$0 \leq f(\alpha, \sigma) \leq 1 \quad \text{für alle } \alpha > 0 \text{ und } 0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}, \quad (4.12)$$

$$|f(\alpha, \sigma)| \leq K(\alpha) \sigma \quad \text{für alle } 0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \quad (4.13)$$

sowie

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha, \sigma) = 1 \quad \text{für alle } 0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \quad (4.14)$$

erfülle.

**Satz 4.2** *Es sei  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  ein vollstetiger Operator mit dem singulären System  $\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j=1}^{\infty}$ . Dann ist die über die Vorschrift (4.11) definierte Familie  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$  von beschränkten linearen Operatoren aus  $\mathcal{L}(Y, X)$  eine lineare Regularisierung für  $A^\dagger$ , wenn für die Filterfunktion  $f$  die Bedingungen (4.12), (4.13) und (4.14) erfüllt sind. Dabei gilt  $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leq K(\alpha)$ , und die Regularisierung ist konvergent für eine Apriori-Parameterwahl  $\alpha = \alpha(\delta)$ , wenn  $\delta \rightarrow 0$  die Grenzwertbeziehungen  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  und  $\delta K(\alpha) \rightarrow 0$  nach sich zieht.*

Man überzeugt sich anhand der aus (4.13) folgenden und für alle  $y_\delta \in Y$  gültigen Beziehung

$$\|R_\alpha y_\delta\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f(\alpha, \sigma_j))^2}{\sigma_j^2} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 \leq (K(\alpha))^2 \sum_{j=1}^{\infty} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 \leq (K(\alpha))^2 \|y_\delta\|_Y^2$$

sofort von der Beschränktheit des Operators  $R_\alpha$  und der dabei auftretenden Eigenschaft  $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leq K(\alpha)$ . Die Grenzwertbeziehung (4.4) resultiert für  $x = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle_X u_j$ ,  $x_0 \in N(A)$  und  $y = Ax$  aus der Reihendarstellung

$$\|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X^2 = \|R_\alpha Ax - A^\dagger Ax\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (f(\alpha, \sigma_j) - 1)^2 \langle x, u_j \rangle_X^2, \quad (4.15)$$

wobei wegen  $\sum_{j=1}^{\infty} (f(\alpha, \sigma_j) - 1)^2 \langle x, u_j \rangle_X^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle_X^2 \leq \|x\|_X^2$  (s. (4.12)) das Weierstraßsche Majorantenkriterium für Reihen anwendbar ist und die Vertauschung des Grenzübergangs für  $\alpha \rightarrow 0$  mit der Summation ermöglicht, so daß mit (4.14) und  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (f(\alpha, \sigma_j) - 1)^2 \langle x, u_j \rangle^2 = 0$  auch  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X = 0$  für alle  $y \in R(A)$  folgt. Die Konvergenzaussage für die Regularisierung in Satz 4.2 ist dann eine direkte Folgerung aus Satz 4.1.

Wir bemerken noch, daß die in Satz 4.2 auftretende Konvergenz des Approximationsfehlers  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha Ax - A^\dagger Ax\|_X = 0$  nicht gleichmäßig über alle  $x \in X$  erfolgt. So existiert keine positive Funktion  $C(\alpha)$  mit  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} C(\alpha) = 0$ , die eine Konvergenzrate bezüglich des Regularisierungsparameters  $\alpha$  für diese Komponente des Regularisierungsfehlers zum Ausdruck bringen würde, derart daß

$$\|R_\alpha Ax - A^\dagger Ax\|_X \leq C(\alpha) \|x\|_X \quad \text{für alle } \alpha > 0 \text{ und alle } x \in X \quad (4.16)$$

gilt. Wegen Formel (4.15) folgt aus (4.16) nämlich  $\sup_{j \in \mathbb{N}} |f(\alpha, \sigma_j) - 1| \leq C(\alpha)$ . Dies kann aber nicht gelten, denn mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_j = 0$  folgt aus der Ungleichung (4.13) für alle  $\alpha > 0$  die Grenzwertbeziehung  $\lim_{j \rightarrow \infty} f(\alpha, \sigma_j) = 0$  und damit  $\sup_{j \in \mathbb{N}} |f(\alpha, \sigma_j) - 1| = 1$ .

### 4.1.2 Die Methode der Tichonov-Regularisierung

Aus den Betrachtungen des Abschnitts 3.1.4 im Anschluß an Formel (3.5) ergibt sich, daß Lösungen des Kleinste-Quadrate-Problems (4.2) auch Lösungen der **Normalgleichung**

$$A^* A x = A^* y_\delta, \quad x \in X \quad (4.17)$$

sind und umgekehrt. Die Normalgleichung weist aber kaum bessere Eigenschaften auf als die lineare Operatorgleichung (3.1) selbst. Für  $y_\delta \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$  besitzt (4.17) keine Lösungen und für  $y_\delta \in R(A) \oplus R(A)^\perp$  gibt es unendlich viele Lösungen, wenn der Operator  $A$  nicht injektiv ist. Da aus  $R(A) \neq \overline{R(A)}$  auch  $R(A^* A) \neq \overline{R(A^* A)}$  folgt, ist (4.17) gleichermaßen inkorrekt nach Nashed wie das Ausgangsproblem (3.1). Wenn für vollstetige Operatoren  $A$  mit der Singulärwertfolge  $\{\sigma_j\}$  die Gleichung (3.1) einen Grad  $\nu > 0$  der Inkorrektheit besitzt, so hat die Normalgleichung mit der Singulärwertfolge  $\{\sigma_j^2\}$  des Operators  $A^* A$  sogar einen doppelt so hohen Inkorrektheitsgrad  $2\nu$  (s. Formel (3.47)). Jedoch läßt sich unter Verwendung des Einheitsoperators  $I$  in  $X$  zu (4.17) leicht eine **Familie von Nachbaraufgaben**

$$(A^* A + \alpha I) x = A^* y_\delta, \quad x \in X \quad (4.18)$$

angeben, wobei jede solche zu einem festen Parameter  $\alpha > 0$  gehörige lineare Operatorgleichung (4.18) **korrekt nach Hadamard** ist. Auf der Bestimmung von Lösungen  $x_\alpha^\delta$  (s. im folgenden auch Formel (4.22)) solcher korrekter Ersatzprobleme beruht die **Methode der Tichonov-Regularisierung**. Aufbauend auf Arbeiten von A. N. Tichonov aus den 60er Jahren (s. [TIAR77]) wurde diese Methode in den letzten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts zum Standardwerkzeug der praktischen Behandlung inkorrektur Probleme weiterentwickelt und in viele Richtungen modifiziert bzw. verallgemeinert.

**Hilfssatz 4.2** *Ein selbstadjungierter Operator  $B \in \mathcal{L}(X, X)$ , der im Hilbertraum  $X$  positiv definit ist, d.h. für den mit einer Konstanten  $\beta > 0$  die Ungleichung  $\langle Bx, x \rangle_X \geq \beta \|x\|_X^2$  für alle  $x \in X$  gilt, besitzt einen stetigen inversen Operator  $B^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$  mit  $\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \frac{1}{\beta}$ . Weiterhin ist für jedes feste  $z \in X$  das Extremalproblem*

$$\langle Bx, x \rangle_X - 2 \langle x, z \rangle_X = \min!, \quad x \in X \quad (4.19)$$

*äquivalent zur Operatorgleichung*

$$Bx = z, \quad x \in X \quad (4.20)$$

*und besitzt wie diese die eindeutig bestimmte Lösung  $x = B^{-1}z$ .*

Setzt man  $B := A^*A + \alpha I$  und  $z := A^*y_\delta$ , so liefert der Hilfssatz 4.2 mit  $\beta = \alpha$  sofort die Korrektheit der Operatorgleichung (4.18) nach Hadamard, d.h., die Existenzbedingung, die Eindeutigkeitsbedingung und die Stabilitätsbedingung von Definition 2.3 sind für diese Gleichung erfüllt. Mehr noch, (4.18) ist äquivalent zur Minimierung des Funktionals

$$\langle (A^*A + \alpha I)x, x \rangle_X - 2 \langle x, A^*y_\delta \rangle_X = \|Ax - y_\delta\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2 - \|y_\delta\|_Y^2$$

über alle  $x \in X$ . Da der konstante Summand  $\|y_\delta\|_Y^2$  dabei keine Rolle spielt, betrachtet man

$$T_\alpha(x) := \|Ax - y_\delta\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2 \quad (4.21)$$

als **Tichonov-Funktional**, und die **regularisierte Lösung** nach Tichonov

$$x_\alpha^\delta := R_\alpha y_\delta := (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*y_\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \alpha} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j \quad (4.22)$$

ist die für alle  $y_\delta \in Y$  eindeutig bestimmte Lösung des Extremalproblems

$$T_\alpha(x) := \|Ax - y_\delta\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2 = \min!, \quad x \in X. \quad (4.23)$$

Die Tichonov-Regularisierung liefert wegen (4.22) eine Näherungsvorschrift (4.11) mit der positiven Filterfunktion

$$f(\alpha, \sigma) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha} \quad \text{für alle } \alpha > 0 \text{ und } 0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)}. \quad (4.24)$$

Die Filterfunktion (4.24) erfüllt offensichtlich die Bedingungen (4.12) und (4.14) sowie wegen  $\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha} \leq \frac{\sigma}{2\sqrt{\alpha}}$  mit  $K(\alpha) := \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$  auch die Bedingung (4.13). Wählt

man den Regularisierungsparameter der Tichonov-Regularisierung  $\alpha(\delta)$  so aus, daß  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  und  $\frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} \rightarrow 0$  bzw. damit gleichwertig  $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$  für  $\delta \rightarrow 0$  erreicht wird, so erfüllt eine solche Apriori-Parameterwahl die Grenzwertbeziehungen (4.8) und (4.9) aus Satz 4.1. Als Konsequenz von Satz 4.2 ergibt sich dann:

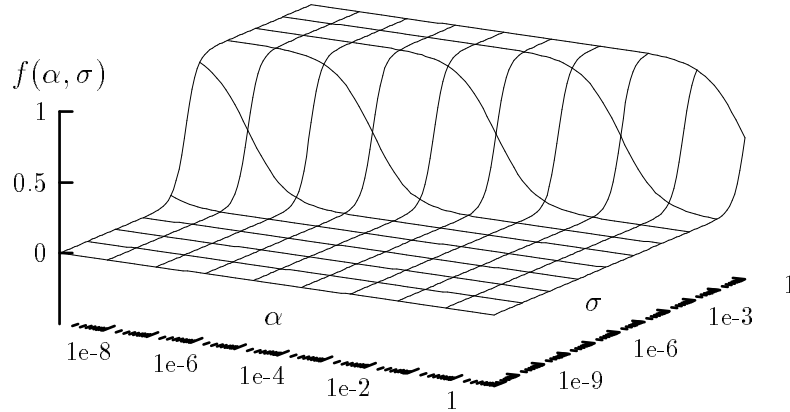
**Folgerung 4.1** *Die zur Methode der Tichonov-Regularisierung in Formel (4.22) definierte Operatorfamilie  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$  ist eine lineare Regularisierung für den Operator  $A^\dagger$  mit  $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ . Sofern eine Apriori-Parameterwahl  $\alpha = \alpha(\delta)$  die Bedingungen*

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \delta \rightarrow 0 \quad (4.25)$$

*befriedigt, ist diese Regularisierung auch konvergent.*

Um die Konvergenzbedingung (4.25) zu erfüllen, muß der Regularisierungsparameter  $\alpha$  zwar mit  $\delta$  gegen Null gehen. Dies darf jedoch im Sinne von  $\frac{\delta^2}{\alpha} \rightarrow 0$  nicht zu schnell geschehen. Die in Bild 4.2 grafisch dargestellte Filterfunktion (4.24) hat die Eigenschaften eines „Tiefpaßfilters“. Bei festem Regularisierungsparameter  $\alpha > 0$  fällt der Dämpfungsfaktor  $f(\alpha, \sigma_j)$  um so kleiner aus, je größer  $j$  wird, da die Singulärwertfolge  $\{\sigma_j\}$  von  $A$  eine fallende Nullfolge verkörpert. Die Summanden der Reihe (4.10) mit großem  $j$  werden beim Übergang zu (4.22) stark gedämpft. Dies betrifft in der Regel die hochfrequenten Anteile der Lösung, also z.B. Vielfache der Sinusfunktion  $\sin \omega t$  mit hoher Frequenz  $\omega$  (s. Beispiele für singuläre Systeme in Abschn. 3.1.5). Dagegen werden die vorderen Reihenglieder oder Hauptkomponenten der Lösung mit kleinem  $j$  wegen  $\frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + \alpha} \approx 1$  für genügend kleine  $\alpha$  fast unverändert gelassen. Diese Hauptkomponenten verkörpern in der Regel niederfrequente Anteile der Lösungsfunktion. Man rekonstruiert also mit Hilfe der Tichonov-Regularisierung die niederfrequenten Anteile in der Minimum-Norm-Lösung  $x_{mn} = A^\dagger y$  recht genau und auch stabil in bezug auf Fehler in den gegebenen Daten, während auf die hochfrequenten Anteile in der Näherungslösung mit zunehmender Frequenz immer mehr verzichtet wird. Dieser Philosophie bedienen sich die meisten Regularisierungsverfahren. Insofern ist es natürlich kein Wunder, daß standardmäßig eingesetzte Regularisierungsverfahren keine großen Erfolge zeigen, wenn gerade hochfrequente Lösungen gesucht werden. Spezielle Informationen über die Lösung oder über die Datenstruktur erfordern insofern manchmal besondere Regularisierungszugänge (s. dazu z.B. Abschn. 4.1.6).





**Bild 4.2** Filterfunktion  $f(\alpha, \sigma)$  der Tichonov-Regularisierung

Wir betrachten nun einige weitere Eigenschaften der Tichonov-Regularisierung. Die regularisierte Lösung  $x_\alpha^\delta$  (s. Formel (4.22)) hängt wegen der Beschränktheit des linearen Operators  $R_\alpha$  stetig von den Daten  $y_\delta$  ab. Ebenso ist aber auch eine stetige Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter  $\alpha > 0$  festzustellen, denn die regularisierte Lösung genügt für  $\alpha > 0$  der Gleichung

$$(A^*A + \alpha I) x_\alpha^\delta = A^* y_\delta. \quad (4.26)$$

Betrachtet man zusätzlich  $(A^*A + (\alpha + h)I) x_{\alpha+h}^\delta = A^* y_\delta$  mit  $\alpha + h > 0$ , so gilt

$$(A^*A + \alpha I)(x_{\alpha+h}^\delta - x_\alpha^\delta) = -h x_{\alpha+h}^\delta = \frac{h}{\alpha + h} A^*(Ax_{\alpha+h}^\delta - y_\delta)$$

und

$$\begin{aligned} \|x_{\alpha+h}^\delta - x_\alpha^\delta\|_X &\leq \frac{|h|}{\alpha + h} \|(A^*A + \alpha I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X)} \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|Ax_{\alpha+h}^\delta - y_\delta\|_Y \\ &\leq \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)}}{\alpha} \frac{|h|}{\alpha + h} (\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|x_{\alpha+h}^\delta\|_X + \|y_\delta\|_Y). \end{aligned}$$

Nun ist wegen  $T_\alpha(x_\alpha^\delta) \leq T_\alpha(\mathbf{0})$  für alle  $\alpha > 0$  auch

$$(\alpha + h) \|x_{\alpha+h}^\delta\|_X^2 \leq T_{\alpha+h}(x_{\alpha+h}^\delta) \leq \|y_\delta\|_Y^2$$

und damit

$$\|x_{\alpha+h}^\delta - x_\alpha^\delta\|_X \leq \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}{\alpha} \frac{|h|}{\alpha+h} \left( \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}{\sqrt{\alpha+h}} + 1 \right) \|y_\delta\|_Y \rightarrow 0 \quad \text{für } |h| \rightarrow 0.$$

Dann existiert wegen

$$(A^*A + \alpha I) \frac{x_{\alpha+h}^\delta - x_\alpha^\delta}{h} = -x_{\alpha+h}^\delta$$

sogar ein Ableitungselement  $\frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_{\alpha+h}^\delta - x_\alpha^\delta}{h} \in X$ , welches die lineare Operatorgleichung

$$(A^*A + \alpha I) x = -x_\alpha^\delta \quad (4.27)$$

löst und folglich die Darstellung

$$\frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} = -(A^*A + \alpha I)^{-1} x_\alpha^\delta \quad (4.28)$$

besitzt. Die regularisierte Lösung hängt also sogar stetig differenzierbar vom Regularisierungsparameter  $\alpha$  ab.

Für die Entwicklung sinnvoller Strategien einer A-posteriori-Parameterwahl bei der Tichonov-Regularisierung ist es nützlich, die Funktionen

$$\varphi(\alpha) := \|Ax_\alpha^\delta - y_\delta\|_Y^2 \quad \text{und} \quad \psi(\alpha) := \|x_\alpha^\delta\|_X^2 \quad (4.29)$$

näher zu betrachten. Die erste Funktion charakterisiert das Defektnormquadrat der regularisierten Lösung als Funktion des Regularisierungsparameters  $\alpha$ , während die zweite Funktion wieder in Abhängigkeit von  $\alpha$  das Normquadrat der regularisierten Lösung selbst zum Ausdruck bringt.

Wir studieren nun das Monotonieverhalten der Funktionen  $\varphi(\alpha)$  und  $\psi(\alpha)$ . Es gilt

$$\varphi'(\alpha) = 2 \left\langle A \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha}, Ax_\alpha^\delta - y_\delta \right\rangle_Y = 2 \left\langle \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha}, A^*(Ax_\alpha^\delta - y_\delta) \right\rangle_X = -2\alpha \left\langle \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha}, x_\alpha^\delta \right\rangle_X$$

und damit

$$\varphi'(\alpha) = 2\alpha^2 \left\| \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} \right\|_X^2 + 2\alpha \left\| A \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} \right\|_Y^2 \geq 0, \quad (4.30)$$

d.h., die Funktion  $\varphi(\alpha)$  ist **monoton nichtfallend**. Für  $y_\delta \notin N(A^*)$  gilt mit  $\varphi'(\alpha) > 0$  sogar die strenge Monotonie für  $\varphi$ . Andererseits ist

$$\psi'(\alpha) = 2 \left\langle \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha}, x_\alpha^\delta \right\rangle_X = -2\alpha \left\| \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} \right\|_X^2 - 2 \left\| A \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} \right\|_Y^2 \leq 0,$$

d.h., die Funktion  $\psi(\alpha)$  ist **monoton nichtwachsend**, und für  $y_\delta \notin N(A^*)$  gilt wegen  $\psi'(\alpha) < 0$  wieder die strenge Monotonie.

Wir setzen in den weiteren Betrachtungen dieses Abschnitts  $N(A^*) = \{\mathbf{0}\}$  und damit streng monotone Funktionen  $\varphi(\alpha)$  und  $\psi(\alpha)$  voraus. Offensichtlich haben wir dann wegen  $\|y_\delta\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2$ ,

$$\|Ax_\alpha^\delta - y_\delta\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + \alpha} - 1 \right)^2 \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\sigma_j^2 + \alpha)^2} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 \leq \|y_\delta\|_Y^2$$

und der daraus resultierenden Vertauschbarkeit von Summation und Grenzwertbildung für  $\alpha \rightarrow 0$  und  $\alpha \rightarrow \infty$  in der Reihendarstellung von  $\|Ax_\alpha^\delta - y_\delta\|_Y^2$  die Grenzwertbeziehungen

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \varphi(\alpha) = \|y_\delta\|_Y^2. \quad (4.31)$$

Die entsprechenden Grenzwertbeziehungen für die Funktion  $\psi(\alpha)$  werden in Aufgabe 4.1 formuliert.

**Definition 4.3** Gegeben seien ein Datenfehlerniveau  $\delta > 0$  und eine gestörte rechte Seite  $y_\delta \in Y$  der linearen Operatorgleichung (3.1) mit exakter rechter Seite  $y \in R(A)$ , wobei die Ungleichung

$$\|y_\delta - y\|_Y \leq \delta < \|y_\delta\|_Y \quad (4.32)$$

erfüllt werde. Unter dem *Diskrepanzprinzip* verstehen wir dann eine A-posteriori-Parameterwahl  $\alpha_{dis} = \alpha_{dis}(\delta, y_\delta)$  des Regularisierungsparameters  $\alpha > 0$  der Tichonov-Regularisierung (4.22), die auf der Lösung der Gleichung

$$\|Ax_{\alpha_{dis}} - y_\delta\|_Y = \delta \quad (4.33)$$

beruht.

Mit  $N(A^*) = \{\mathbf{0}\}$  und (4.32) liefert das Diskrepanzprinzip wegen der strengen Monotonie der Funktion  $\varphi(\alpha)$  ( $\alpha > 0$ ) und der Grenzwertbeziehungen (4.31) stets einen eindeutig bestimmten Regularisierungsparameter  $\alpha_{dis} > 0$  als Lösung von Gleichung (4.33). Das in Definition 4.3 eingeführte **Diskrepanzprinzip** geht auf V. A. Morozov (s. [MOR84]) zurück. Es beruht auf der heuristisch motivierten Idee, daß unter den im Sinne von  $\|Ax - y_\delta\|_Y \leq \delta$  mit den Daten  $y_\delta$  verträglichen Elementen  $x$  solche bevorzugt werden sollten, bei denen diese Ungleichung sogar als Gleichung  $\|Ax - y_\delta\|_Y = \delta$  gilt. Natürlich sind sehr wohl

auch Situationen denkbar, wo regularisierte Lösungen  $x_\alpha^\delta$  mit  $\|Ax_\alpha^\delta - y_\delta\|_Y < \delta$  die Minimum-Norm-Lösung  $A^\dagger y$  besser approximieren als  $x_{\alpha_{dis}}^\delta$ . In diesen Fällen ist das Diskrepanzprinzip **überregularisierend**. Es produziert zu große Regularisierungsparameter  $\alpha > 0$  und damit zu glatte regularisierte Lösungen. Im Gegensatz dazu führt Unterregularisierung mit zu klein gewählten Parametern  $\alpha$  zu Näherungslösungen, die eine zu kleine Defektnorm aufweisen und in der Regel stärker als gewünscht oszillieren.

Eine Motivation für das Diskrepanzprinzip liefert die Tatsache, daß eine regularisierte Lösung  $x_{\alpha_{dis}}^\delta$  mit  $\|Ax_{\alpha_{dis}}^\delta - y_\delta\|_Y = \delta$  das **restringierte Extremalproblem**

$$\|x\|_X = \min!, \quad x \in X : \|Ax - y_\delta\|_Y \leq \delta \quad (4.34)$$

löst. Wäre nämlich  $\|\hat{x}\|_X < \|x_{\alpha_{dis}}^\delta\|_X$  für ein  $\hat{x} \in X$  mit  $\|A\hat{x} - y_\delta\|_Y \leq \delta$ , so müßte auch

$$T_{\alpha_{dis}}(\hat{x}) = \|A\hat{x} - y_\delta\|_Y^2 + \alpha_{dis}\|\hat{x}\|_X^2 < \|Ax_{\alpha_{dis}}^\delta - y_\delta\|_Y^2 + \alpha_{dis}\|x_{\alpha_{dis}}^\delta\|_X^2 = T_{\alpha_{dis}}(x_{\alpha_{dis}}^\delta)$$

gelten. Dies widerspricht aber der Eigenschaft  $T_{\alpha_{dis}}(x_{\alpha_{dis}}^\delta) \leq T_{\alpha_{dis}}(x)$  für alle  $x \in X$  der regularisierten Lösung  $x_{\alpha_{dis}}^\delta$ . Umgekehrt ist übrigens auch jede Lösung von (4.34) eine regularisierte Lösung (s. Aufgabe 4.2).

Mit  $\Omega(x) := \|x\|_X$  und  $D := X$  ist das Extremalproblem (4.34) eine Konkretisierung von Problem (2.76) aus Abschnitt 2.3.1, wobei wegen (4.3) solche Elemente  $x \in X$  als datenkompatibel bezeichnet werden, die die Ungleichung  $\|Ax - y_\delta\|_Y \leq \delta$  erfüllen. Wenn der Regularisierungsparameter über das Diskrepanzprinzip bestimmt wird, so minimiert jede nach Tichonov regularisierte Lösung  $x_{\alpha_{dis}}^\delta$  das Sympathiefunktional  $\Omega(x)$  unter allen mit den Daten verträglichen Elementen  $x \in X$ . Die Tichonov-Regularisierung erzwingt also nicht nur Näherungslösungen, die stabil von den Daten abhängen, sondern sie beeinflusst auch die Eigenschaften der Näherungslösungen zielgerichtet. Es darf nicht unerwähnt bleiben, daß eine regularisierte Lösung  $x_{\alpha_0}^\delta$  mit  $\|x_{\alpha_0}^\delta\|_X = K$  auch Lösung eines Extremalproblems

$$\|Ax - y_\delta\|_Y = \min!, \quad x \in X : \|x\|_X \leq K \quad (4.35)$$

ist. Die regularisierten Lösungen haben also minimale Defektnormen, wenn bei einer solchen Minimierung nur Elemente aus einer Kugel im Hilbertraum  $X$  mit festem Radius  $K > 0$  zugelassen werden.

Wir wollen uns nun noch der Frage zuwenden, welchen Aufwand die Bestimmung der regularisierten Lösung  $x_{\alpha_{dis}}$  auf der Grundlage des Diskrepanzprinzips erfordert. Für jeden festen Regularisierungsparameter  $\alpha > 0$  muß eine korrekte lineare Operatorgleichung (4.18) gelöst werden, um  $x_\alpha^\delta$  zu bestimmen. Unter Ausnutzung des streng monotonen Wachstums der Funktion  $\varphi(\alpha)$  kann

man die Gleichung (4.33) näherungsweise mit hinreichender Genauigkeit lösen. Ausgehend von einem Startwert  $\alpha_0 > 0$  wird dazu eine geeignete Folge von Regularisierungsparametern  $\{\alpha_n\}$  konstruiert, welche Glieder enthält, die den Regularisierungsparameter  $\alpha_{dis}$  gut approximieren.

Mit  $\varphi(\alpha_0) > \delta^2$  kann man eine Parameterfolge  $\alpha_n := 2^{-n}\alpha_0$  als einfachste Variante betrachten und dabei das eindeutig bestimmte Folgeelement  $\alpha_k$  als Näherung für  $\alpha_{dis}$  verwenden, das der Beziehung

$$\varphi(\alpha_k) \leq \delta^2 < \varphi(\alpha_{k-1})$$

genügt. Da aber die Berechnung eines Funktionswertes  $\varphi(\alpha_n)$  immer die Lösung einer Operatorgleichung (4.18) erfordert, sollte die Anzahl von benötigten Regularisierungsparametern möglichst klein gehalten werden. Dies legt die Benutzung eines schnell konvergierenden Iterationsverfahrens für die Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$\tilde{\varphi}(\alpha) := \varphi(\alpha) - \delta^2 = 0 \quad (4.36)$$

in einer reellen Veränderlichen  $\alpha > 0$  nahe, wobei aufgrund der expliziten Berechenbarkeit von  $\varphi'(\alpha)$  nach Formel (4.30) auf den ersten Blick das Newton-Verfahren geeignet erschiene. Dessen direkte Anwendung auf Gleichung (4.36) macht jedoch Probleme, weil die Funktion  $\tilde{\varphi}(\alpha)$  für kleine  $\alpha$  konvex, für große  $\alpha$  aber konkav ist. Wesentlich günstiger ist es, mit  $\beta := 1/\alpha$  von der Gleichung

$$\hat{\varphi}(\beta) := \|Ax_{\frac{1}{\beta}}^{\delta} - y_{\delta}\|_Y^2 - \delta^2 = 0 \quad (4.37)$$

auszugehen. Da die Funktion  $\hat{\varphi}(\beta)$  für alle  $\beta > 0$  monoton fallend und streng konvex ist (s. Aufgabe 4.3), liefert die **Newton-Iteration**

$$\beta_{n+1} := \beta_n - \frac{\hat{\varphi}(\beta_n)}{\hat{\varphi}'(\beta_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.38)$$

ausgehend von einem kleinen  $\beta_0$  mit  $\hat{\varphi}(\beta_0) > 0$  eine monoton gegen die einzige Nullstelle  $\beta_{dis} := 1/\alpha_{dis}$  von Gleichung (4.37) wachsende Iterationsfolge. Der wesentliche Aufwand eines Newton-Schrittes besteht dabei jeweils in der zur Berechnung von  $\hat{\varphi}(\beta_n)$  bzw.  $\hat{\varphi}'(\beta_n)$  erforderlichen Lösung der beiden linearen Operatorgleichungen (4.18) und (4.27) mit entsprechendem Regularisierungsparameter.

Bevor wir uns dem Konvergenzverhalten des Diskrepanzprinzips zuwenden, sei mit dem Prinzip der **Quasioptimalität** noch ein weiteres Kriterium zur Auswahl des Regularisierungsparameters  $\alpha > 0$  bei der Tichonov-Regularisierung

kurz erwähnt, welches nicht selten sehr brauchbare regularisierte Lösungen  $x_{\alpha_{q_0}}^\delta$  liefert. Der Parameter  $\alpha_{q_0}$  löst dabei das Extremalproblem

$$\xi(\alpha) := \left\| \alpha \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} \right\|_X \rightarrow \min!, \quad \alpha > 0. \quad (4.39)$$

Aus Gleichung (4.28) erhält man die Beziehung

$$\alpha \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} = -\alpha (A^*A + \alpha I)^{-1} x_\alpha^\delta.$$

Eine Motivation für das Extremalproblem (4.39) entnimmt man der auf der **Neumannschen Reihe** (s. [GORI94, S.73]) beruhenden und für  $y \in R(A)$  gültigen Gleichung

$$A^\dagger y = x_\alpha + \alpha (A^*A + \alpha I)^{-1} x_\alpha + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha^j (A^*A + \alpha I)^{-j} x_\alpha, \quad (4.40)$$

bei welcher unter Vernachlässigung der unendlichen Summe in (4.40) ohne Berücksichtigung von Datenfehlern die Differenz  $\|x_\alpha - A^\dagger y\|_X$  klein bleibt, wenn  $\left\| \alpha \frac{dx_\alpha}{d\alpha} \right\|_X$  minimiert wird.

Die Funktion  $\xi(\alpha)$  weist häufig einen ähnlichen Verlauf auf wie die Fehlerfunktion  $\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X$  (s. Bild 4.1) und besitzt mit  $\alpha_{q_0}$  in diesen Fällen ein globales Minimum, das dem optimalen Regularisierungsparameter  $\alpha_{opt}$  sehr nahekommt. Leider zeigt die Funktion  $\xi(\alpha)$  manchmal einen „welligen“ Verlauf und besitzt zahlreiche relative Minima, was die sichere Parameterwahl nach dem Prinzip der Quasioptimalität erschwert. Praktisch löst man gern eine diskrete Version von (4.39), indem man aus einer Parameterfolge  $\alpha_n = 2^{-n} \alpha_0$  das Folgeelement  $\alpha_k$  auswählt, welches  $\|x_{\alpha_{k+1}}^\delta - x_{\alpha_k}^\delta\|_X$  minimiert. Man wählt also in der zu einer solchen Parameterfolge gehörigen Folge regularisierter Lösung eine solche aus, die sich von ihrem Nachbarerlement wenig unterscheidet, die also am wenigsten sensibel auf Parameteränderungen reagiert. Deshalb wird dieses Prinzip auch manchmal als **Sensitivitätsprinzip** bei der Wahl des Regularisierungsparameters bezeichnet.

**Satz 4.3** *Unter den Voraussetzungen  $N(A^*) = \{\mathbf{0}\}$  und (4.32) ist die Methode der Tichonov-Regularisierung (4.22) mit Regularisierungsparametern  $\alpha_{dis} = \alpha_{dis}(\delta, y_\delta)$ , die nach dem Diskrepanzprinzip (4.33) ausgewählt werden, eine konvergente Regularisierung für  $A^\dagger$ .*

Wir betrachten dazu Folgen  $\delta_n \rightarrow 0$  und  $y_n := y_{\delta_n} \rightarrow y \in R(A)$  für  $n \rightarrow \infty$  sowie  $x_n := x_{\alpha_{dis}(\delta_n, y_n)}$ . Die Aussage von Satz 4.3 ist gültig, wenn für  $n \rightarrow \infty$  stets  $x_n \rightarrow A^\dagger y$  gilt. Nun haben wir  $\|Ax_n - y_n\|_Y = \delta_n$  und folglich  $Ax_n \rightarrow y$  für  $n \rightarrow \infty$ . Weiter ist

$$\begin{aligned} T_{\alpha_{dis}(\delta_n, y_n)}(x_n) &= \|Ax_n - y_n\|_Y^2 + \alpha_{dis}(\delta_n, y_n) \|x_n\|_X^2 \\ &= \delta_n^2 + \alpha_{dis}(\delta_n, y_n) \|x_n\|_X^2 \\ &\leq T_{\alpha_{dis}(\delta_n, y_n)}(A^\dagger y) = \|y - y_n\|_Y^2 + \alpha_{dis}(\delta_n, y_n) \|A^\dagger y\|_X^2 \\ &\leq \delta_n^2 + \alpha_{dis}(\delta_n, y_n) \|A^\dagger y\|_X^2 \end{aligned}$$

und damit  $\|x_n\|_X \leq \|A^\dagger y\|_X$  für alle  $n$ . Eine Teilfolge  $\{x_{n_k}\}$  konvergiert in  $X$  dann schwach gegen ein Element  $\bar{x} \in X$ . Wegen der schwachen Stetigkeit von  $A$  und der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwerts gilt  $A\bar{x} = y$ . Aus  $\|\bar{x}\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\|_X$  folgt  $\bar{x} = A^\dagger y$  und damit insgesamt  $x_n \rightarrow A^\dagger y$ . Nun haben wir mit

$$\|A^\dagger y\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X \leq \|A^\dagger y\|_X$$

noch  $\|x_n\|_X \rightarrow \|A^\dagger y\|_X$  und damit  $x_n \rightarrow A^\dagger y$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Im Abschnitt 3.2.2 hatten wir im Zusammenhang mit nichtlinearen inversen Problemen den Begriff der Quelldarstellung kennengelernt (s. Formel (3.73)). Es ergab sich, daß inkorrekte Probleme durch Einschränkung auf Lösungsbereiche, in denen solche Quelldarstellungen gelten, korrekt werden. Mit dem gleichen Hintergrund lassen sich, wie im folgenden ausgeführt wird, für die Tichonov-Regularisierung linearer inkorrektur Operatorgleichungen bei Gültigkeit geeigneter Quelldarstellungen **Konvergenzraten** erreichen (zu weiteren Details s.[GRO84]).

**Satz 4.4** *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.3 gibt es eine Konstante  $C > 0$ , so daß die auf der Grundlage des Diskrepanzprinzips gewonnenen regularisierten Lösungen  $x_{\alpha_{dis}^\delta}$  mit  $\alpha_{dis} = \alpha_{dis}(\delta, y_\delta)$  die Abschätzung*

$$\|x_{\alpha_{dis}^\delta} - x_{mn}\|_X \leq C \sqrt{\delta} \quad (4.41)$$

*befriedigen, falls die Minimum-Norm-Lösung  $x_{mn} = A^\dagger y$  von Gleichung (3.1) einer Quelldarstellung*

$$x_{mn} = A^* w \quad (w \in Y) \quad (4.42)$$

*genügt.*

Wir zeigen die Gültigkeit des Satzes, indem wir uns an die Ungleichung  $\|x_{\alpha_{dis}}^\delta\|_X \leq \|x_{mn}\|_X$  aus dem Beweis von Satz 4.3 erinnern. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x_{\alpha_{dis}}^\delta - x_{mn}\|_X^2 &\leq 2 \left( \|x_{mn}\|_X^2 - \langle x_{\alpha_{dis}}^\delta, x_{mn} \rangle_X \right) = 2 \langle x_{mn} - x_{\alpha_{dis}}^\delta, x_{mn} \rangle_X = \\ &2 \langle x_{mn} - x_{\alpha_{dis}}^\delta, A^* w \rangle_X = 2 \langle A(x_{mn} - x_{\alpha_{dis}}^\delta), w \rangle_X = 2 \langle y - y_\delta, w \rangle_X + 2 \langle y_\delta - Ax_{\alpha_{dis}}^\delta, w \rangle_X \\ &\leq 2 \left( \|y - y_\delta\|_Y \|w\|_Y + \|y_\delta - Ax_{\alpha_{dis}}^\delta\|_Y \|w\|_Y \right) = 4 \|w\|_Y \delta. \end{aligned}$$

Dies liefert die Ungleichung (4.41) mit der Konstanten  $C = 2\sqrt{\|w\|_Y}$ .

Falls die Gleichung (3.1) inkorrekt nach Nashed ist, so kann der Regularisierungsfehler  $\|x_{\alpha_{dis}}^\delta - x_{mn}\|_X$  des Diskrepanzprinzips für  $\delta \rightarrow 0$  auch nicht schneller als  $\sqrt{\delta}$  gegen Null streben. Jedoch gibt es Quelldarstellungen, die eine Apriori-Parameterwahl  $\alpha = \alpha(\delta)$  ermöglichen, so daß sich der Regularisierungsfehler proportional zu  $\delta^{\frac{2}{3}}$  verhält.

**Satz 4.5** *Es seien  $c$  und  $C$  positive Konstanten. Dann erhält man für die Apriori-Parameterwahl  $\alpha = \alpha(\delta) = c \delta^{\frac{2}{3}}$  eine Abschätzung*

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq C \delta^{\frac{2}{3}} \quad (4.43)$$

*des Regularisierungsfehlers, wenn die Minimum-Norm-Lösung  $x_{mn} = A^\dagger y$  von Gleichung (3.1) einer Quelldarstellung*

$$x_{mn} = A^* A v \quad (v \in X) \quad (4.44)$$

*genügt.*

Wir überzeugen uns von der Gültigkeit einer Ungleichung (4.43), indem wir von der Tatsache ausgehen, daß die Norm des zusammengesetzten Operators  $(A^* A + \alpha I)^{-1} A^* A$  nicht größer als 1 sein kann. Es gilt nämlich wegen (4.44)

$$\begin{aligned} R_\alpha y - x_{mn} &= (A^* A + \alpha I)^{-1} A^* A x_{mn} - x_{mn} \\ &= -\alpha (A^* A + \alpha I)^{-1} x_{mn} = -\alpha (A^* A + \alpha I)^{-1} A^* A v \end{aligned}$$

und damit  $\|R_\alpha y - x_{mn}\|_X \leq \alpha \|v\|_X$ . Auf der Grundlage von Formel (4.6) schätzen wir nun den Regularisierungsfehler ab. Wir haben dann

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \delta + \alpha \|v\|_X \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \delta + \alpha \|v\|_X$$



und mit  $\alpha(\delta) = c \delta^{\frac{2}{3}}$  eine Ungleichung

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq C \delta^{\frac{2}{3}},$$

wobei  $C = \frac{1}{2\sqrt{c}} + c \|v\|_X$  gilt. Dies zeigt die Gültigkeit von Satz 4.5.

Im Zusammenhang mit Satz 4.5 läßt sich allerdings auch ein **Sättigungssatz** beweisen, der besagt, daß für nach Nashed inkorrekte lineare Gleichungen (3.1) keine Apriori-Parameterwahl  $\alpha = \alpha(\delta)$  existiert, so daß der Fehler der Tichonov-Regularisierung für  $\delta \rightarrow 0$  schneller als  $\delta^{\frac{2}{3}}$  gegen die Minimum-Norm-Lösung  $x_{mn} \neq \mathbf{0}$  konvergiert.

Am Ende dieses Abschnitts wollen wir uns nun am Beispiel der **linearen Fredholmschen Integralgleichung erster Art**

$$[Ax](s) := \int_a^b k(s,t) x(t) dt = y(s) \quad (c \leq s \leq d) \quad (4.45)$$

anschauen, welche konkreten Probleme bei der Bestimmung einer regularisierten Lösung  $x_\alpha$  aus der Gleichung

$$(A^*A + \alpha I) x_\alpha = A^*y \quad (4.46)$$

zu lösen sind. Wir betrachten in diesem Zusammenhang zwei verschiedene Fälle der Wahl des Lösungsraumes  $X$ , wobei der Raum der Daten mit  $Y := L^2(c, d)$  festgehalten wird. Im ersten Fall sei

$$X := L^2(a, b), Y := L^2(c, d) \quad \text{und} \quad k \in L^2((c, d) \times (a, b)). \quad (4.47)$$

Wir wissen aus Hilfssatz 2.4, daß der dann betrachtete lineare Fredholmsche Integraloperator  $A \in \mathcal{L}(L^2(a, b), L^2(c, d))$  vollstetig ist. Der zu  $A$  adjungierte Operator  $A^*$  besitzt die Form

$$[A^*y](t) = \int_c^d k(s,t) y(s) ds \quad (a \leq t \leq b),$$

der zusammengesetzte Operator  $A^*A \in \mathcal{L}(L^2(a, b), L^2(a, b))$  läßt sich als

$$[A^*Ax](t) = \int_a^b \tilde{k}(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (a \leq t \leq b)$$

mit dem iterierten Kern

$$\tilde{k}(t, \tau) := \int_c^d k(s,t) k(s, \tau) ds \quad ((t, \tau) \in [a, b] \times [a, b]) \quad (4.48)$$

schreiben. Damit erhält die Gleichung (4.46) für alle  $\alpha > 0$  die Gestalt einer **linearen Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art**

$$\int_a^b \tilde{k}(t, \tau) x_\alpha(\tau) d\tau + \alpha x_\alpha(t) = \int_c^d k(s, t) y(s) ds \quad (a \leq t \leq b), \quad (4.49)$$

die für alle  $y \in L^2(c, d)$  eindeutig bestimmte Lösungen  $x_\alpha \in L^2(a, b)$  liefert. Im zweiten Fall werde

$$X := H^1(a, b), \quad Y := L^2(c, d) \quad \text{und} \quad k \in C([c, d] \times [a, b]) \quad (4.50)$$

betrachtet, d.h., der Lösungsraum ist der in Abschnitt 2.3.3 eingeführte Sobolevraum  $H^1(a, b)$  mit der Norm (2.100). Um die beiden Fälle besser unterscheiden zu können, bezeichnen wir im zweiten Fall die regularisierte Lösung mit  $\tilde{x}_\alpha$  und den vollstetigen Integraloperator aus (4.45) mit  $\tilde{A} \in \mathcal{L}(H^1(a, b), L^2(c, d))$ , wobei mit der Darstellung  $\tilde{A} = AB$  der Zusammenhang zum Integraloperator  $A \in \mathcal{L}(L^2(a, b), L^2(c, d))$  aus dem ersten Fall hergestellt wird. Dabei ist  $B$  der im Anschluß an Formel (3.63) betrachtete vollstetige Einbettungsoperator vom Raum  $H^1(a, b)$  in den Raum  $L^2(a, b)$ . Die Gleichung (4.46) mit  $\tilde{A}$  anstelle von  $A$  läßt sich dann in einer **schwachen Formulierung**

$$\langle \tilde{A}^* \tilde{A} \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{H^1(a, b)} + \alpha \langle \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{H^1(a, b)} = \langle \tilde{A}^* y, z \rangle_{H^1(a, b)} \quad \text{für alle } z \in H^1(a, b)$$

und damit gleichwertig in der Form

$$\langle A \tilde{x}_\alpha, A z \rangle_{L^2(a, b)} + \alpha \langle \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{H^1(a, b)} = \langle y, A z \rangle_{L^2(a, b)} \quad \text{für alle } z \in H^1(a, b)$$

bzw.

$$\langle A^* A \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{L^2(a, b)} + \alpha \langle \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{H^1(a, b)} = \langle A^* y, z \rangle_{L^2(a, b)} \quad \text{für alle } z \in H^1(a, b) \quad (4.51)$$

aufschreiben. Mit  $\tilde{x}_\alpha \in H^1(a, b)$  gilt auch  $\tilde{x}_\alpha \in C[a, b]$  und  $\tilde{x}'_\alpha \in L^2(a, b)$ . Wir betrachten die Funktionen

$$f(t) := \int_t^b \{ [A^* A \tilde{x}_\alpha](s) + \alpha \tilde{x}_\alpha(s) - [A^* y](s) \} ds \quad (a \leq t \leq b)$$

und

$$g(t) := \int_a^t [\alpha \tilde{x}'_\alpha(s) + f(s)] ds \quad (a \leq t \leq b).$$

Es ist  $f \in C^1[a, b]$  wegen der Stetigkeit des Kernes  $k$  und  $g \in H^1(a, b)$ . Wegen  $f(b) = g(a) = 0$  und Formel (4.51) erhalten wir durch partielle Integration die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_a^b [\alpha \tilde{x}'_\alpha(t) + f(t)]^2 dt &= \int_a^b g'(t) [\alpha \tilde{x}'_\alpha(t) + f(t)] dt = \alpha \int_a^b g'(t) \tilde{x}'_\alpha(t) dt \\ &- \int_a^b g(t) f'(t) dt = \alpha \langle \tilde{x}_\alpha, g \rangle_{H^1(a,b)} + \langle A^* A \tilde{x}_\alpha, g \rangle_{L^2(a,b)} - \langle A^* y, g \rangle_{L^2(a,b)} = 0. \end{aligned}$$

Also haben wir  $\alpha \tilde{x}'_\alpha = -f \in C^1[a, b]$  und damit  $\tilde{x}_\alpha \in C^2[a, b]$ . Jede solche regularisierte Lösung ist zweimal stetig differenzierbar. Mit

$$\alpha \tilde{x}_\alpha'' = -f' = A^* A \tilde{x}_\alpha + \alpha \tilde{x}_\alpha - A^* y$$

gilt daher die **Integrodifferentialgleichung**

$$\int_a^b \tilde{k}(t, \tau) \tilde{x}_\alpha(\tau) d\tau + \alpha (\tilde{x}_\alpha(t) - \tilde{x}_\alpha''(t)) = \int_c^d k(s, t) y(s) ds \quad (a \leq t \leq b). \quad (4.52)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \langle \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{H^1(a,b)} &= \int_a^b (\tilde{x}_\alpha(t) z(t) + \tilde{x}'_\alpha(t) z'(t)) dt \\ &= \langle \tilde{x}_\alpha - \tilde{x}_\alpha'', z \rangle_{L^2(a,b)} + \tilde{x}'_\alpha(b) z(b) - \tilde{x}'_\alpha(a) z(a) \end{aligned}$$

liefert die Gleichung (4.51)

$$\begin{aligned} \langle A^* y, z \rangle_{L^2(a,b)} &= \langle A^* A \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{L^2(a,b)} + \alpha \langle \tilde{x}_\alpha - \tilde{x}_\alpha'', z \rangle_{L^2(a,b)} + \alpha \tilde{x}'_\alpha(b) z(b) \\ &- \alpha \tilde{x}'_\alpha(a) z(a) = \langle A^* y, z \rangle_{L^2(a,b)} + \alpha \tilde{x}'_\alpha(b) z(b) - \alpha \tilde{x}'_\alpha(a) z(a) \end{aligned}$$

und damit

$$x'_\alpha(b) z(b) - x'_\alpha(a) z(a) = 0 \quad \text{für alle } z \in H^1(a, b).$$

Hieraus ergeben sich die **natürlichen Randbedingungen**

$$\tilde{x}'_\alpha(a) = \tilde{x}'_\alpha(b) = 0. \quad (4.53)$$

Jede in  $H^1(a, b)$  regularisierte Lösung  $\tilde{x}_\alpha$  von (4.45) befriedigt auch automatisch homogene Randbedingungen für die erste Ableitung an beiden Intervallenden. Dies ist eine durch die Tichonov-Regularisierung subjektiv in die

Näherungslösung hineingetragene Eigenschaft, die gegebenenfalls zu wesentlichen Verzerrungen der regularisierten Lösung an den Rändern des Intervalls  $[a, b]$  führen kann. Abschließend sei zum Fall  $X = H^1(a, b)$  erwähnt (s. Formel (4.35)), daß eine regularisierte Lösung  $\tilde{x}_\alpha$  mit  $\|\tilde{x}_\alpha\|_{H^1(a,b)} = K$  auch Lösung des restringierten Kleinste-Quadrate-Problems

$$\|\tilde{A}x - y_\delta\|_{L^2(c,d)}^2 = \min!, \quad x \in D := \{x \in H^1(a, b) : \|x\|_{H^1(a,b)} \leq K\} \quad (4.54)$$

ist. Die dabei in Formel (4.54) auftretende Restriktionsmenge  $D$  ist relativ kompakt in  $L^2(a, b)$  (s. Hilfssatz 2.8).

Die hier in Ansätzen vorgestellte Theorie der Tichonov-Regularisierung für lineare Operatorgleichungen kann auch auf den Fall zugeschnitten werden, daß anstelle von (4.23) ein Extremalproblem der Gestalt

$$T_\alpha(x) := \|Ax - y_\delta\|_Y^2 + \alpha \Omega(x) = \min!, \quad x \in X, \quad (4.55)$$

mit  $\Omega$  aus einer allgemeineren Klasse von **Sympathiefunktionalen** betrachtet wird (s. [TIAR77]). Zur möglichen Wahl solcher Sympathiefunktionale sei auf den Abschnitt 2.3.1 verwiesen. Weiterhin ist eine Einbeziehung restringierter Probleme in der Form

$$T_\alpha(x) := \|Ax - y_\delta\|_Y^2 + \alpha \Omega(x) = \min!, \quad x \in D \subset X \quad (4.56)$$

mit **konvexen abgeschlossenen** Mengen  $D$  möglich (s. [NEUB86]). Die Tichonov-Regularisierung erweist sich dabei stets als eine **Strafenmethode** (s. [JOH48]), bei der das Defektnormquadrat auf der Grundlage eines nichtnegativen Sympathiefunktionals  $\Omega$  mit einer Strafe beauftragt wird. Der Regularisierungsparameter  $\alpha$  spielt die Rolle eines Strafparameters. Je größer dieser gewählt wird, um so härter fällt die Strafe aus.

### 4.1.3 Alternative Regularisierungsmethoden

Nachdem wir die Tichonov-Regularisierung ausführlich betrachtet haben, wollen wir uns in diesem Abschnitt drei weiteren linearen Regularisierungen  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$  für den Operator  $A^\dagger$  im Sinne von Definition 4.1 zuwenden, die sich bei der Wahl alternativer Filterfunktionen  $f(\alpha, \sigma)$  ebenfalls in das allgemeine Regularisierungsschema (4.11) einordnen lassen. Der an darüber hinausgehenden Methoden und weiteren Details interessierte Leser sei in diesem Zusammenhang auf die Bücher [EHN96] von H.W. Engl, M. Hanke und A. Neubauer sowie [KIR96] von A. Kirsch verwiesen.

Eine theoretisch besonders ausgezeichnete Variante liefert die **Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung**

$$x_\alpha^\delta := R_\alpha y_\delta := \sum_{\sigma_j \geq \alpha} \frac{\langle y_\delta, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j, \quad y_\delta \in Y. \quad (4.57)$$

Die Formel (4.57) orientiert sich an der Darstellung (3.27) der Moore-Penrose-Inversen, wobei solche Summanden weggelassen werden, deren zugehörige Singulärwerte  $\sigma_j$  kleiner sind als der Regularisierungsparameter  $\alpha > 0$ . Die Zahl der in (4.57) auftretenden Summanden ist offensichtlich endlich. Wir haben es mit einem Spezialfall von Formel (4.11) unter Verwendung der nichtnegativen Filterfunktion

$$f(\alpha, \sigma) = \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma \geq \alpha \\ 0 & \text{für } \sigma < \alpha \end{cases} \quad (4.58)$$

zu tun. Die Filterfunktion genügt wegen  $0 \leq f(\alpha, \sigma) \leq 1$ ,  $|f(\alpha, \sigma)| \leq K(\alpha)\sigma$  mit  $K(\alpha) := \frac{1}{\alpha}$  und  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha, \sigma) = 1$  den Bedingungen (4.12) – (4.14). Als Folgerung von Satz 4.2 ergibt sich:

**Folgerung 4.2** *Die zur Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung in Formel (4.57) definierte Operatorfamilie  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$  ist eine lineare Regularisierung für den Operator  $A^\dagger$  mit  $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \frac{1}{\alpha}$ . Sofern eine Apriori-Parameterwahl  $\alpha = \alpha(\delta)$  die Bedingungen*

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \delta \rightarrow 0 \quad (4.59)$$

*befriedigt, ist diese Regularisierung auch konvergent.*

Der entscheidende Vorteil der Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung besteht darin, daß die mittels (4.57) gelöste korrekte Ersatzaufgabe zur inkorrekten linearen Operatorgleichung (3.1) bezüglich aller Lösungskomponenten, die zu singulären Werten  $\sigma_j \geq \alpha$  gehören, exakt mit der Ausgangsaufgabe übereinstimmt. In diesen wesentlichen Lösungsanteilen tritt kein Approximationsfehler auf. Dafür werden die übrigen meist hochfrequenten Lösungsanteile gänzlich vernachlässigt. Der auch hier wieder auf der Grundlage heuristischer Kriterien zu bestimmende Regularisierungsparameter  $\alpha$  legt dabei die Anzahl der relevanten Lösungskomponenten fest. Leider erfordert die Realisierung der Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung umfassende Kenntnisse über das singuläre System des Operators  $A$ . Außer den relevanten singulären Werten  $\sigma_j$  werden auch die zugehörigen Eigenelemente  $u_j$  und  $v_j$

explizit benötigt, um Formel (4.57) auswerten zu können. So treten die theoretischen Vorteile der Methode aufgrund des damit verbundenen enormen Realisierungsaufwandes oft in den Hintergrund, und man entscheidet sich in der Regel für eine aufwandsärmere Regularisierungsmethode.

Besonders günstig erscheinen unter diesem Gesichtspunkt iterative Methoden, von denen wir hier speziell die **Methode der Landweber-Iteration** betrachten wollen. Wir gehen dazu von der Normalgleichung (4.17) aus, die wir unter Verwendung einer Relaxationskonstante  $\omega$  mit  $0 < \omega < \frac{1}{\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^2}$  als Fixpunktgleichung  $x = (I - \omega A^* A)x + \omega A^* y_\delta$  in einer iterierfähigen Form schreiben können. Dabei gilt  $q := \|I - \omega A^* A\|_{\mathcal{L}(X,X)} < 1$ . Den zugehörigen Iterationsprozeß

$$x_{n+1} = (I - \omega A^* A)x_n + \omega A^* y_\delta, \quad x_0 = \mathbf{0} \quad (4.60)$$

bezeichnet man als Landweber-Iteration. Durch Induktion erhält man für die  $n$ -te Iterierte die Darstellung

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} (I - \omega A^* A)^i \omega A^* y_\delta \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.61)$$

Wir betrachten zuerst den Fall  $y_\delta \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ . In diesem Fall ist die Normalgleichung (4.17) lösbar, wobei  $x_{mn}^\delta := A^\dagger y_\delta$  mit  $A^* y_\delta = A^* A x_{mn}^\delta$  die normkleinste Lösung der Normalgleichung ist. Es gilt dann wegen der Identität

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (I - \omega A^* A)^i \omega A^* A &= I - (I - \omega A^* A)^n \\ x_{mn}^\delta - x_n &= (I - \omega A^* A)^n x_{mn}^\delta \end{aligned}$$

und damit

$$\|x_{mn}^\delta - x_n\|_X \leq q^n \|x_{mn}^\delta\|_X \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

In diesem Fall konvergiert die Landweber-Iteration gegen das Element  $x_{mn}^\delta = A^\dagger y_\delta$ , welches aber wegen der Unbeschränktheit des Operators  $A^\dagger$  auch für kleine  $\delta > 0$  weit von der tatsächlichen Minimum-Norm-Lösung  $x_{mn} = A^\dagger y$  entfernt sein kann. Noch ungünstiger sieht es im Fall  $y_\delta \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$  aus. Wir setzen in diesem Fall wieder die Vollstetigkeit des Operators  $A$  mit  $\dim(R(A)) = \infty$  voraus und schreiben

$$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \omega \sigma_j^2)^i \omega \sigma_j \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - (1 - \omega \sigma_j^2)^n}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j.$$

Wegen  $0 < 1 - \omega \sigma_j^2 < 1$  strebt  $\|x_n\|_X^2$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen die Reihe  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2}{\sigma_j^2}$ , die aber gegen  $\infty$  divergiert, weil für  $y_\delta \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$  die Picardsche Bedingung (3.25) verletzt ist.

Es hat also für inkorrekte Probleme keinen Sinn, eine möglichst große Zahl von Schritten der Landweber-Iteration auszuführen. Wir konzentrieren uns daher auf eine endliche Zahl  $N$  von Iterationsschritten, wobei diese Zahl hier die Rolle des Regularisierungsparameters spielt. Um den Zusammenhang zum allgemeinen Regularisierungsschema herzustellen, setzen wir  $\alpha := \frac{1}{N}$ . Mit

$$x_\alpha^\delta := R_N y_\delta := x_N := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - (1 - \omega \sigma_j^2)^N}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - (1 - \omega \sigma_j^2)^{\frac{1}{\alpha}}}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j \quad (4.62)$$

erweist sich die  $N$ -schrittige Landweber-Iteration als Spezialfall von Formel (4.11), wobei wir für  $0 < \omega < \frac{1}{\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^2}$

$$f(\alpha, \delta) = 1 - (1 - \omega \sigma^2)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{für } \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad 0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \quad (4.63)$$

als positive Filterfunktion haben. Diese erfüllt wegen  $0 < f(\alpha, \sigma) < 1$  und  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha, \sigma) = 1$  die Bedingungen (4.12) und (4.14). Auch die Bedingung (4.13) ist erfüllt, denn es gilt die Ungleichung

$$1 - (1 - \tau)^N \leq \sqrt{\tau N} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (4.64)$$

Mit  $\tau = \omega \sigma^2$  ergibt sich aus (4.64) aber

$$\frac{1 - (1 - \omega \sigma^2)^N}{\sigma} \leq \sqrt{\omega N} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad 0 < \omega < \frac{1}{\sigma^2}.$$

So ist mit  $\alpha = \frac{1}{N}$  und  $K(\alpha) := \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}$  die Ungleichung  $|f(\alpha, \sigma)| \leq K(\alpha) \sigma$  für  $0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$  erfüllt. Wiederum ergibt sich als Folgerung aus Satz 4.2:

**Folgerung 4.3** *Die zur Methode der Landweber-Iteration in Formel (4.62) definierte Operatorfamilie  $\{R_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  ist eine lineare Regularisierung für den Operator  $A^\dagger$  mit  $\|R_N\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \sqrt{\omega N}$ . Sofern eine Apriori-Parameterwahl  $N = N(\delta)$  die Bedingungen*

$$N(\delta) \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \delta^2 N(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{für } \delta \rightarrow 0 \quad (4.65)$$

*befriedigt, ist diese Regularisierung auch konvergent.*

Um eine Konvergenz der regularisierten Lösung  $x_{N(\delta)}$  gegen  $x_{mn} = A^\dagger y$  zu erreichen, muß für  $\delta \rightarrow 0$  die Zahl der durchgeführten Iterationsschritte zwar ins Unendliche wachsen. Dies darf im Sinne von  $\delta^2 N(\delta) \rightarrow 0$  in Abhängigkeit von  $\delta$  aber nicht zu schnell geschehen.

Auch bei der Landweber-Iteration können heuristische Strategien zur Wahl des Regularisierungsparameters  $N = \frac{1}{\alpha}$  eingesetzt werden. Vorzugsweise verwendet man ein auf Iterationen zugeschnittenes Diskrepanzprinzip. Man wählt dazu  $N_{dis}$  für eine gegebene Konstante  $\tau > 1$  so, daß

$$\|Ax_{N_{dis}} - y_\delta\|_Y \leq \tau\delta < \|Ax_{N_{dis}-1} - y_\delta\|_Y \quad (4.66)$$

erfüllt wird. Da  $\|Ax_n - y_\delta\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \omega\sigma_j^2)^{2n} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt, ist für  $\tau\delta < \|y_\delta\|_Y$  der Regularisierungsparameter  $N_{dis}$  aus Formel (4.66) immer eindeutig bestimmt. Die regularisierten Lösungen  $x_N$  der Methode der Landweber-Iteration werden im Vergleich zur Tichonov-Regularisierung und zur abgebrochenen Singulärwertentwicklung mit sehr geringem Aufwand erhalten, da weder Operatorgleichungen zu lösen noch Eigenelemente zu bestimmen sind. Der Aufwand reduziert sich im wesentlichen auf die einmalige Auswertung von  $A^*y_\delta$  und die Auswertung des Operatorbildes  $A^*Ax_n$  in jedem Landweber-Iterationsschritt. Das Diskrepanzprinzip (4.66) ist ebenfalls sehr kostengünstig zu realisieren, da es zusätzlich nur die Defektberechnung der Iterierten von (4.60) erfordert.

Eine dritte Alternative zur Tichonov-Regularisierung bildet die **Methode der asymptotischen Regularisierung**. Diese geht wieder von der Normalgleichung (4.17) aus und stört dieselbe durch Hinzufügen eines Ableitungsterms, wobei mit

$$x'(t) + A^*Ax(t) = A^*y_\delta, \quad x(0) = \mathbf{0} \quad (4.67)$$

ein Anfangswertproblem zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit Lösungselementen  $x(t)$  ( $t \geq 0$ ) im Hilbertraum  $X$  betrachtet wird, deren Variable  $t$  sich als Zeit interpretieren läßt. Für den vollstetigen Operator  $A$  kann man unter Verwendung seines singulären Systems die Lösungen von (4.67) als Reihe in der Form

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-t\sigma_j^2)}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j \quad (t \geq 0) \quad (4.68)$$

schreiben. Man erkennt sofort, daß es keinen Sinn macht, diese Lösungen für große Zeiten  $t$  zu bestimmen, denn für  $t \rightarrow \infty$  strebt  $\|x(t)\|_Y^2$  wieder gegen die Reihe  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2}{\sigma_j^2}$ . Man wählt daher eine Endzeit  $T$ , die hier die Rolle des Regularisierungsparameters übernimmt, und betrachtet mit  $\alpha := \frac{1}{T}$  regularisierte Lösungen

$$x_\alpha^\delta := R_T y_\delta := x(T) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-T\sigma_j^2)}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-\sigma_j^2/\alpha)}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j. \quad (4.69)$$



Diese Methode ordnet sich ebenfalls in das allgemeine Regularisierungsschema (4.11) ein. Als Filterfunktion haben wir dabei

$$f(\alpha, \delta) = 1 - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{\alpha}\right) \quad \text{für } \alpha > 0 \quad \text{und} \quad 0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}. \quad (4.70)$$

Mit  $0 < f(\alpha, \sigma) < 1$  und  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha, \sigma) = 1$  sind wieder die Bedingungen (4.12) und (4.14) erfüllt. Wir nutzen die für alle positiven  $\alpha$  und  $\sigma$  erfüllte Ungleichung

$$\frac{1 - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{\alpha}\right)}{\sigma} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (4.71)$$

(s. Aufgabe 4.4) und erhalten damit weiterhin die Bedingung (4.13) in der Form  $|f(\alpha, \sigma)| \leq K(\alpha)\sigma$  mit  $K(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ . Auch hier läßt sich eine entsprechende Folgerung von Satz 4.2 ableiten:

**Folgerung 4.4** *Die zur Methode der asymptotischen Regularisierung in Formel (4.69) definierte Operatorfamilie  $\{R_T\}_{T>0}$  ist eine lineare Regularisierung für den Operator  $A^\dagger$  mit  $\|R_T\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \sqrt{T}$ . Sofern eine Apriori-Parameterwahl  $T = T(\delta)$  die Bedingungen*

$$T(\delta) \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \delta^2 T(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{für } \delta \rightarrow 0 \quad (4.72)$$

*befriedigt, ist diese Regularisierung auch konvergent.*

Die Endzeit  $T(\delta)$ , bis zu der das Anfangswertproblem (4.67) gelöst wird, sollte also wachsen, wenn  $\delta > 0$  kleiner wird, aber ebenfalls wiederum nicht zu schnell. Abschließend sei der enge Zusammenhang zwischen der asymptotischen Regularisierung und der Landweber-Iteration vermerkt. Betrachtet man nämlich  $t_n := n\omega$ ,  $x_n := x(t_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) und ersetzt (4.67) näherungsweise durch die Differenzenformel

$$\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\omega} + A^* A x(t_n) = A^* y_\delta, \quad x(t_0) = \mathbf{0},$$

so erhält man durch Umstellung nach  $x_{n+1} = x(t_{n+1})$  die Vorschrift (4.60) der Landweber-Iteration. Die asymptotische Regularisierung ist also offensichtlich ein stetiges Analogon zur Landweber-Iteration.

#### 4.1.4 Regularisierung durch endlichdimensionale Approximation

Wir haben bereits zwei Methoden der Behandlung von nach Nashed inkorrekten linearen Operatorgleichungen (3.1) durch endlichdimensionale Approximation

kennengelernt. Zum einen beruht die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellte Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung auf einer Einschränkung möglicher Lösungen auf den endlichdimensionalen Raum  $X_n = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$ , wobei dieser Raum aus den Linearkombinationen der Eigenelemente  $u_j$  zu den  $n$  größten singulären Werten  $\sigma_j$  des Operators  $A$  gebildet wird. Die Zahl  $n$  ergibt sich dabei nach Vorgabe des Regularisierungsparameters  $\alpha > 0$  in eindeutiger Weise aus der Bedingung

$$\sigma_{n+1} < \alpha \leq \sigma_n. \quad (4.73)$$

Zum anderen haben wir uns im Abschnitt 3.1.6 für injektive und vollstetige Operatoren  $A$  ausgehend von einem vollständigen Orthonormalsystem  $\{w_j\}$  in  $X$  mit der auf  $n$ -dimensionale Teilräume  $X_n = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$  eingeschränkten **Methode der kleinsten Quadrate** (3.38) beschäftigt. Die dabei als Lösung des Extremalproblems (3.38) betrachteten Näherungslösungen  $x_n^\delta = A_n^\dagger y_\delta$  für  $x_{mn} = A^\dagger y$  genügen der Ungleichung

$$\|Ax_n^\delta - y_\delta\|_Y^2 \leq \|Ax - y_\delta\|_Y^2 \quad \text{für alle } x \in X_n \quad (4.74)$$

und wegen der Orthogonalität des Defektelements  $Ax_n^\delta - y_\delta$  zu allen Linearkombinationen der Gestalt  $\sum_{i=1}^n \lambda_i Aw_i$  außerdem den Gleichungen

$$\langle Ax_n^\delta, Ax \rangle_Y = \langle y_\delta, Ax \rangle_Y \quad \text{für alle } x \in X_n$$

bzw. damit gleichwertig

$$\langle Ax_n^\delta, Aw_j \rangle_Y = \langle y_\delta, Aw_j \rangle_Y \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.75)$$

Wegen der Injektivität von  $A$  ist (4.75) und das dazu äquivalente lineare Gleichungssystem

$$\underline{M} \underline{\lambda} = \underline{r} \quad (4.76)$$

mit  $x_n^\delta := \sum_{i=1}^n \underline{\lambda}_i w_i$ ,  $\underline{\lambda} := (\underline{\lambda}_1, \dots, \underline{\lambda}_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{r} := (\langle y_\delta, Aw_1 \rangle_Y, \dots, \langle y_\delta, Aw_n \rangle_Y)^T \in \mathbb{R}^n$  und der Systemmatrix  $\underline{M} := (\langle Aw_i, Aw_j \rangle_Y)_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eindeutig lösbar. Nun steht die Frage, ob es sich bei dieser Modifikation  $x_n^\delta := R_n y_\delta := A_n^\dagger y_\delta$  der Methode der kleinsten Quadrate um eine Regularisierung für den Operator  $A^\dagger$  handelt, der in unserem injektiven Fall dem Operator  $A^{-1}$  entspricht, und ob sich die Methode mit dem Regularisierungsparameter  $n := \frac{1}{\alpha}$  in das in Abschnitt 4.1.1 eingeführte allgemeine Regularisierungsschema einordnen läßt. Zunächst einmal spricht dafür die in Abschnitt 3.1.6 abgeleitete Abschätzung (3.39), die sich als Spezialfall der Ungleichung (4.6) im allgemeinen Regularisierungsschema erweist. Außerdem fällt unter unserer Voraussetzung der Vollstetigkeit von  $A$  für  $\{w_j\} := \{u_j\}$  diese spezielle Kleinste-Quadrate-Methode

mit der Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung zusammen (s. Aufgabe 4.5) und erweist sich somit als eine Regularisierung. Leider ist dies aber für beliebig gewählte Systeme  $\{w_j\}$  zur Erzeugung der endlichdimensionalen Räume  $X_n$  nicht generell der Fall, sondern nur, wenn das Operatorprodukt  $A_n^\dagger A$  bezüglich der Norm gleichmäßig beschränkt ist, d.h. wenn  $\|A_n^\dagger A\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq K < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wie T.I. Seidman (s. [SEI80]) mit Hilfe eines Gegenbeispiels zeigte, ist eine solche gleichmäßige Beschränktheit nicht allgemeingültig.

Jedoch kann man auch ohne explizite Kenntnis des singulären Systems des Operators  $A$  eine Regularisierung für  $A^\dagger$  durch endlichdimensionale Approximation erhalten. Wir gehen dazu von allgemeinen **Galerkin-Verfahren** aus, die auf die Bestimmung der Elemente  $x_n^\delta \in X_n = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$  mit

$$\langle Ax_n^\delta, \tilde{w}_j \rangle_Y = \langle y_\delta, \tilde{w}_j \rangle_Y \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.77)$$

gerichtet sind, wobei  $\{w_j\}$  bzw.  $\{\tilde{w}_j\}$  Systeme linear unabhängiger Elemente in den Räumen  $X$  bzw.  $Y$  darstellen. Mit  $\tilde{w}_j := Aw_j$  ist die auf  $n$ -dimensionale Teilräume  $X_n = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$  eingeschränkte Methode der kleinsten Quadrate (4.75) ein spezielles solches Galerkin-Verfahren, welches allerdings nicht notwendigerweise regularisierende Eigenschaften besitzt. Wesentlich günstiger sieht es mit der **dualen Methode der kleinsten Quadrate** aus, bei der  $w_j := A^* \tilde{w}_j$  für den Zusammenhang der beiden Elementesysteme verwendet wird. Als Charakterisierungen der dualen Methode findet man wieder ein lineares Gleichungssystem (4.76), wobei aber jetzt mit  $x_n^\delta := R_n y_\delta := \sum_{i=1}^n \underline{\lambda}_i A^* \tilde{w}_i$ ,  $\underline{\lambda} := (\underline{\lambda}_1, \dots, \underline{\lambda}_n)^T \in \mathbb{R}^n$  die Darstellungen  $\underline{r} := (\langle y_\delta, \tilde{w}_1 \rangle_Y, \dots, \langle y_\delta, \tilde{w}_n \rangle_Y)^T \in \mathbb{R}^n$  für den Vektor der rechten Seite und  $\underline{M} := (\langle A^* \tilde{w}_i, A^* \tilde{w}_j \rangle_X)_{i,j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  für die reguläre Systemmatrix gelten. Wir erhalten den folgenden Satz, dessen Beweis man in [ENG97, S. 183] findet:

**Satz 4.6** Falls das Elementesystem  $\{\tilde{w}_j\} \subset Y$  so gewählt wird, daß für alle  $\varepsilon > 0$  und  $z \in \overline{R(A)}$  eine Zahl  $m \in \mathbb{N}$  und reelle Multiplikatoren  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  existieren mit  $\|z - \sum_{j=1}^m \lambda_j \tilde{w}_j\|_Y < \varepsilon$ , so ist die über die duale Methode der kleinsten Quadrate definierte Operatorfamilie  $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine lineare Regularisierung für den Operator  $A^\dagger$ , d.h., es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n y = A^\dagger y \quad \text{für alle } y \in R(A).$$

### 4.1.5 Probleme in $L^2(-\infty, \infty)$

In diesem Abschnitt wollen wir nun den Fall betrachten, daß die lineare Operatorgleichung (3.1) im Raumpaar  $X := Y := L^2(-\infty, \infty)$  wirkt. Das Symbol  $L^2(-\infty, \infty)$  bezeichne dabei den separablen Hilbertraum der auf ganz  $\mathbb{R}$  definierten quadratisch integrierbaren reellen Funktionen  $u(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) mit der Norm

$$\|u\|_{L^2(-\infty, \infty)} := \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (u(t))^2 dt} < \infty \quad (4.78)$$

und dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2(-\infty, \infty)} := \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt. \quad (4.79)$$

Unter  $L^2_{\mathbb{C}}(-\infty, \infty)$  wollen wir dagegen den mit der Norm

$$\|u\|_{L^2_{\mathbb{C}}(-\infty, \infty)} := \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt} < \infty \quad (4.80)$$

und dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2_{\mathbb{C}}(-\infty, \infty)} := \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{v(t)} dt \quad (4.81)$$

ausgestatteten entsprechenden Raum der quadratisch integrierbaren komplexen Funktionen einer reellen Veränderlichen verstehen, wobei  $\bar{z}$  die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl bedeutet. Funktionen, die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind, spielen in technischen Modellen eine wichtige Rolle, z.B. bei der mathematischen Modellierung von elektrischen Signalen, mechanischen Schwingungsamplituden oder von Temperaturverläufen, deren Zeitvariable  $t$  sowohl beliebig weit zurückliegende Zeiten wie auch beliebig in die Zukunft gerichtete Zeiten durchlaufen kann. Die in keiner Richtung eingeschränkte Zeit erlaubt die Nutzung der **Fouriertransformation** (s. [TTB95, S. 319ff])

$$(\mathcal{F}u)(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (-\infty < \omega < \infty), \quad (4.82)$$

um mit Hilfe dieser linearen Abbildung  $u \mapsto \mathcal{F}u$  die Probleme aus dem **Zeitbereich**, der durch die reelle Variable  $t$  charakterisiert wird, in den

**Frequenzbereich** der reellen Variablen  $\omega$  zu transformieren. Für derart transformierte Funktionen  $\varphi(\omega) := (\mathcal{F}u)(\omega)$  ( $-\infty < \omega < \infty$ ) stellt

$$u(t) = (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (-\infty < t < \infty) \quad (4.83)$$

die entsprechende Rücktransformation dar. Die Fouriertransformation kann man dabei als stetiges Analogon der Entwicklung einer Funktion in eine Fourierreihe betrachten. Bezeichnet man mit  $L^1(-\infty, \infty)$  den Banachraum der auf  $\mathbb{R}$  absolut integrierbaren reellen Funktionen  $u(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) mit der Norm

$$\|u\|_{L^1(-\infty, \infty)} := \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty, \quad (4.84)$$

so ist  $\mathcal{F}u$  nach Formel (4.82) für alle  $u \in L^1(-\infty, \infty)$  eine beschränkte und stetige komplexe Funktion der reellen Variablen  $\omega$  mit  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} (\mathcal{F}u)(\omega) = 0$ . Dabei gelten für  $u \in L^2(-\infty, \infty) \cap L^1(-\infty, \infty)$  die Beziehungen  $\mathcal{F}u \in L^2_c(-\infty, \infty)$  sowie

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^2_c(-\infty, \infty)} = \|u\|_{L^2(-\infty, \infty)}.$$

Man kann außerdem den linearen Operator  $\mathcal{F}$  der Fouriertransformation auf der Grundlage von Formel (4.82) auch auf komplexe Funktionen  $u$  anwenden und so auf den ganzen Raum  $L^2_c(-\infty, \infty)$  erweitern (s. [ENG97, S.199ff]), daß  $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^2_c(-\infty, \infty), L^2_c(-\infty, \infty))$  einen sowohl injektiven als auch surjektiven Operator mit

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^2_c(-\infty, \infty)} = \|u\|_{L^2_c(-\infty, \infty)} \quad \text{für alle } u \in L^2_c(-\infty, \infty) \quad (4.85)$$

bildet, wodurch dann der stetige inverse Operator  $\mathcal{F}^{-1}$  der **inversen Fouriertransformation** ebenfalls auf ganz  $L^2_c(-\infty, \infty)$  definiert ist. Die Fouriertransformierte einer quadratisch integrierbaren (verallgemeinerten) Ableitung  $u'$  einer Funktion  $u \in L^2_c(-\infty, \infty)$  genügt im übrigen der Formel

$$(\mathcal{F}u')(\omega) = i\omega (\mathcal{F}u)(\omega) \quad (-\infty < \omega < \infty). \quad (4.86)$$

Weiter gilt der folgende in der Literatur als **Faltungssatz** bekannte Hilfssatz, der zeigt, daß eine Faltung zweier reeller Funktionen durch Fouriertransformation in eine Multiplikation komplexer Funktionen überführt wird.

**Hilfssatz 4.3** *Es seien  $u \in L^1(-\infty, \infty)$  und  $v \in L^2(-\infty, \infty)$ . Dann gelten für die Faltung*

$$w(s) := \int_{-\infty}^{\infty} u(s-t)v(t) dt \quad (-\infty < s < \infty) \quad (4.87)$$

*die Beziehungen*

$$w \in L^2(-\infty, \infty) \quad \text{mit} \quad \|w\|_{L^2(-\infty, \infty)} \leq \|u\|_{L^1(-\infty, \infty)} \|v\|_{L^2(-\infty, \infty)}$$

*und*

$$(\mathcal{F}w)(\omega) = \sqrt{2\pi} (\mathcal{F}u)(\omega) \cdot (\mathcal{F}v)(\omega) \quad (-\infty < \omega < \infty). \quad (4.88)$$

Faltungen vom Typ (4.87) traten im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsdichten bereits in Beispiel 2.6 auf.

**Beispiel 4.1** Wir betrachten das Problem der Rekonstruktion eines tatsächlichen Signals  $x(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) aus der Aufzeichnung desselben mit Hilfe eines Meßgeräts. Gemessen wird dann die Funktion  $y(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ), die über eine **lineare Faltungsgleichung**

$$[Ax](s) := \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(s-t)x(t) dt = y(s) \quad (-\infty < s < \infty) \quad (4.89)$$

mit dem Signal verbunden ist, wobei die Apparatfunktion  $\kappa(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) als bekannt vorausgesetzt wird. Das Ziel dieses inversen Problems ist praktisch die Entzerrung des gemessenen Signals. Häufig ist die Apparatfunktion symmetrisch bezüglich  $t = 0$  und näherungsweise eine **Glockenkurve**

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\eta} \exp\left(-\frac{t^2}{2\eta^2}\right) \quad (-\infty < t < \infty).$$

Je kleiner  $\eta > 0$  ausfällt, um so „nadelförmiger“ ist die Glockenkurve und um so weniger verzerrt sind die Meßdaten. Für  $\eta \rightarrow 0$  strebt die Kernfunktion  $\kappa$  gegen die sogenannte „Deltafunktion“, die in Physik und Technik eine wichtige Rolle spielt, im Sinne der Mathematik aber keine Funktion, sondern eine **Distribution** ist (s. [GORI94, S. 92]). Mit wachsendem  $\eta$  wächst die Verzerrung, und es fallen damit die Chancen einer genauen Rekonstruktion des Signals  $x$  aus zusätzlich verrauschten Meßdaten  $y_\delta$  mit  $\|y - y_\delta\|_{L^2(-\infty, \infty)} \leq \delta$ . Sind die

Apparatfunktion  $\kappa$  und die Signalfunktion  $x$  nur auf der positiven Halbachse von Null verschieden und wird  $y(s)$  nur für  $s \in [0, T]$  gemessen, so nimmt (4.89) die Gestalt (3.53) einer speziellen linearen Volterraschen Integralgleichung erster Art an, die wir in Beispiel 3.6 ausführlich behandelt haben.  $\square$

Wir betrachten nun (4.89) mit  $\kappa \in L^1(-\infty, \infty)$  als lineare Operatorgleichung (3.1) in den Räumen  $X := Y := L^2(-\infty, \infty)$ , deren linearer Operator  $A$  wegen Hilfssatz 4.3 beschränkt ist mit  $\|A\|_{\mathcal{L}(L^2(-\infty, \infty), L^2(-\infty, \infty))} \leq \|\kappa\|_{L^1(-\infty, \infty)}$ . Es läßt sich zeigen, daß  $A$  hier **kein vollstetiger** Operator ist, obwohl auch **kein abgeschlossener Wertebereich**  $R(A)$  in  $L^2(-\infty, \infty)$  vorliegt. Wir haben es daher mit einem linearen inversen Problem zu tun, das **nach Nashed inkorrekt vom Typ I** ist (s. Definition 3.1). Die stabile näherungsweise Lösung von Gleichung (4.89) erfordert also den Einsatz von Regularisierungsmethoden. Im Frequenzbereich erscheint die Gleichung (4.89) in der Gestalt

$$(\mathcal{F}\kappa)(\omega) \cdot (\mathcal{F}x)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}y)(\omega) \quad (-\infty < \omega < \infty). \quad (4.90)$$

Setzt man voraus, daß die Fouriertransformierte  $(\mathcal{F}\kappa)(\omega)$  der Kernfunktion Nullstellen nur für solche Zahlen  $\omega$  besitzt, die eine Menge vom Lebesguemaß Null bilden, so hat diese Gleichung genau dann eine Lösung  $\mathcal{F}x \in L^2_c(-\infty, \infty)$ , wenn die Bedingung

$$\frac{(\mathcal{F}y)(\omega)}{(\mathcal{F}\kappa)(\omega)} \in L^2_c(-\infty, \infty) \quad (4.91)$$

gilt. Diese Bedingung ist ein Analogon zu der für Operatorgleichungen (3.1) mit vollstetigen Operatoren  $A$  gültigen Picardschen Bedingung (3.25). Die Bedingung (4.91) ist gewiß verletzt, wenn  $(\mathcal{F}y)(\omega)$  für  $|\omega| \rightarrow \infty$  nicht schneller fällt als  $(\mathcal{F}\kappa)(\omega)$ . Wegen der normerhaltenden Eigenschaft der Fouriertransformation bestimmt die Abklinggeschwindigkeit der Funktion  $(\mathcal{F}\kappa)(\omega) \rightarrow 0$  für  $|\omega| \rightarrow \infty$  in Analogie zur Abklingrate der Singulärwerte bei vollstetigen Operatoren den Grad der Inkorrektheit des linearen inversen Problems (4.89). Je schneller  $(\mathcal{F}\kappa)(\omega)$  abklingt, um so instabiler reagieren die Lösungen auf Störungen in den Daten. Bei Erfüllung von (4.91) läßt sich die Lösung der Gleichung (4.89) in der Form

$$x(t) = \left[ \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\mathcal{F}y)(\omega)}{(\mathcal{F}\kappa)(\omega)} \right) \right] (t) \quad (-\infty < t < \infty) \quad (4.92)$$

schreiben.

Kommen wir nun zur Regularisierung der linearen Operatorgleichung (4.89) im Raum  $L^2(-\infty, \infty)$ . Um die Methode der Tichonov-Regularisierung auf diese

Gleichung anwenden zu können, nutzt man die Formeln (4.85) und (4.88). Das Tichonov-Funktional nimmt dann die Gestalt

$$T_\alpha(\mathcal{F}x) = \|(\mathcal{F}\kappa) \cdot (\mathcal{F}x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}y_\delta)\|_{L_C^2(-\infty, \infty)}^2 + \alpha \|\mathcal{F}x\|_{L_C^2(-\infty, \infty)}^2$$

an. Unter Verwendung des über die Vorschrift

$$[\mathcal{A}_\mathcal{F}(\mathcal{F}u)](\omega) := (\mathcal{F}\kappa)(\omega) \cdot (\mathcal{F}u)(\omega) \quad (-\infty < \omega < \infty) \quad (4.93)$$

definierten linearen **Multiplikationsoperators**  $\mathcal{A}_\mathcal{F}$  erhält man

$$T_\alpha(\mathcal{F}x) = \|\mathcal{A}_\mathcal{F}(\mathcal{F}x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}y_\delta)\|_{L_C^2(-\infty, \infty)}^2 + \alpha \|\mathcal{F}x\|_{L_C^2(-\infty, \infty)}^2$$

und damit als regularisierte Lösung im Frequenzbereich

$$\mathcal{F}x_\alpha^\delta = (\mathcal{A}_\mathcal{F}^* \mathcal{A}_\mathcal{F} + \alpha I)^{-1} \mathcal{A}_\mathcal{F}^* \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}y_\delta).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_\mathcal{F}(\mathcal{F}u), \mathcal{F}v \rangle_{L_C^2(-\infty, \infty)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\kappa)(\omega) (\mathcal{F}u)(\omega) \overline{(\mathcal{F}v)(\omega)} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}u)(\omega) \overline{[(\mathcal{F}\kappa)(\omega) (\mathcal{F}v)(\omega)]} d\omega = \langle \mathcal{F}u, \mathcal{A}_\mathcal{F}^*(\mathcal{F}v) \rangle_{L_C^2(-\infty, \infty)} \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_\mathcal{F}^*(\mathcal{F}v)](\omega) &= \overline{(\mathcal{F}\kappa)(\omega)} \cdot (\mathcal{F}v)(\omega), \\ [(\mathcal{A}_\mathcal{F}^* \mathcal{A}_\mathcal{F})(\mathcal{F}u)](\omega) &= |(\mathcal{F}\kappa)(\omega)|^2 \cdot (\mathcal{F}u)(\omega) \end{aligned}$$

und damit

$$(\mathcal{F}x_\alpha^\delta)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\overline{(\mathcal{F}\kappa)(\omega)} \cdot (\mathcal{F}y_\delta)(\omega)}{|(\mathcal{F}\kappa)(\omega)|^2 + \alpha} \in L_C^2(-\infty, \infty), \quad (4.94)$$

woraus sich mit  $x_\alpha^\delta = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}x_\alpha^\delta)$  die eindeutig bestimmte und stabil von den Daten  $y_\delta$  abhängige regularisierte Lösung von Gleichung (4.89) bestimmen läßt. Dabei muß aber bemerkt werden, daß diese Regularisierung in der Regel eine komplexe Funktion  $x_\alpha^\delta \in L_C^2(-\infty, \infty)$  liefert. Als reellwertige Näherung der exakten Lösung  $x$  von (4.89) kann man jedoch z.B. den Realteil von  $x_\alpha^\delta$  verwenden. Konvergieren die regularisierten Lösungen  $x_\alpha^\delta$  für  $\delta \rightarrow 0$  und  $\alpha \rightarrow 0$  gegen die



exakte Lösung von Gleichung (4.89), so konvergieren auch die Realteile von  $x_\alpha^\delta$  gegen die reellwertige Lösungsfunktion  $x$  von (4.89).

Das Analogon zur  $H^1$ -Regularisierung aus Gleichung (4.52) ergibt sich für unser Problem (4.89) durch Minimierung von

$$T_\alpha(\mathcal{F}x) = \|\mathcal{A}\mathcal{F}(\mathcal{F}x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}y_\delta)\|_{L^2_C(-\infty, \infty)}^2 + \alpha (\|\mathcal{F}x\|_{L^2_C(-\infty, \infty)}^2 + \|\mathcal{F}x'\|_{L^2_C(-\infty, \infty)}^2).$$

Wegen Formel (4.86) erhalten wir daraus

$$(\mathcal{F}x_\alpha^\delta)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\overline{(\mathcal{F}\kappa)(\omega)} \cdot (\mathcal{F}y_\delta)(\omega)}{|(\mathcal{F}\kappa)(\omega)|^2 + \alpha(1 + \omega^2)} \in L^2_C(-\infty, \infty). \quad (4.95)$$

Betrachtet man exakte rechte Seiten  $y = Ax$ , so werden in beiden Varianten (4.94) und (4.95) in  $\mathcal{F}x_\alpha$  große Frequenzen  $|\omega|$  im Vergleich zu  $\mathcal{F}x$  stark gedämpft. Wir haben es hier wieder mit einer Tiefpaßfilterung zu tun. Extreme Dämpfung durch Annullieren von Frequenzen oberhalb einer Grenzfrequenz liefert eine regularisierte Lösung  $x_\alpha^\delta$ , deren Fouriertransformierte in der Form

$$(\mathcal{F}x_\alpha^\delta)(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\mathcal{F}y_\delta)(\omega)}{(\mathcal{F}\kappa)(\omega)} & \text{für } |\omega| \leq \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \text{für } |\omega| > \frac{1}{\alpha} \end{cases} \quad (4.96)$$

gebildet wird. Die Vorgehensweise (4.96) erfolgt in Anlehnung an die Methode der abgebrochenen Sigulärwertentwicklung mit der Filterfunktion (4.58).

Inverse Probleme im Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung wurden schon in Beispiel 1.1 betrachtet. Weiterhin bildete das zeitlich inverse Wärmeleitproblem den Gegenstand der Untersuchungen von Beispiel 3.4. Nun wollen wir schließlich der Arbeit [TAU97] von U. Tautenhahn folgend auch dem **Seitwärtsproblem zur Wärmeleitungsgleichung** (s. [TAU97]) einige Aufmerksamkeit schenken:

**Beispiel 4.2** Wir betrachten einen örtlich eindimensionalen Wärmeleitvorgang derart, daß Temperaturen  $u(\rho, t)$  für alle nichtnegativen Werte der Ortsveränderlichen  $\rho$  sowie für beliebige reelle Werte der Zeitveränderlichen  $t$  erklärt sind und der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u(\rho, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(\rho, t)}{\partial \rho^2} \quad (0 \leq \rho < \infty, -\infty < t < \infty) \quad (4.97)$$

genügen, wobei die Temperaturen in der Grenze für  $\rho \rightarrow \infty$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  beschränkt bleiben sollen. Das **Seitwärtsproblem** besteht nun in der Identifikation des zeitabhängigen Temperaturprofils  $x(t) := u(0, t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) am

linken Rand  $\rho = 0$  des betrachteten Ortsbereichs aus Temperaturbeobachtungen  $y(t) := u(L, t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) an einem weiter rechts liegenden Ortspunkt mit  $\rho = L > 0$ , wobei die Funktionen  $x$  und  $y$  beide als Elemente des Raumes  $X := Y := L^2(-\infty, \infty)$  aufgefaßt werden.

Bezeichnet  $U(\rho, \omega) := (\mathcal{F}u(\rho, \cdot))(\omega)$  ( $-\infty < \omega < \infty$ ) die Fouriertransformation der Temperatur  $u(\rho, t)$  bezüglich der Zeit  $t$  bei fixiertem Ort  $\rho > 0$ , so genügt diese Funktion der aus (4.97) hervorgehenden Differentialgleichung

$$i\omega U(\rho, \omega) = \frac{\partial^2 U(\rho, \omega)}{\partial \rho^2} \quad (0 \leq \rho < \infty, -\infty < \omega < \infty) \quad (4.98)$$

und bleibt für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  auch beim Übergang  $\rho \rightarrow \infty$  beschränkt. Daraus ergibt sich der Zusammenhang

$$U(\rho, \omega) = \exp(-\theta(\omega)\rho)U(0, \omega) \quad (-\infty < \omega < \infty) \quad (4.99)$$

für die Lösungen  $U(\rho, \omega)$  dieser Differentialgleichung, wobei

$$\theta(\omega) = (1 + \operatorname{sgn}(\omega)i)\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \quad \text{mit} \quad \operatorname{sgn}(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \geq 0 \\ -1 & \text{für } \omega < 0 \end{cases} \quad (4.100)$$

gilt. □

Im Frequenzbereich geschrieben erhält man als lineare Operatorgleichung des Seitwärtsproblems aufgrund der Beziehung (4.99)

$$[\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}x)](s) := \exp(-\theta(\omega)L) \cdot (\mathcal{F}x)(\omega) = (\mathcal{F}y)(\omega) \quad (-\infty < \omega < \infty). \quad (4.101)$$

Der lineare Operator  $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$  ist im Raum  $L_c^2(-\infty, \infty)$  wieder ein (nicht vollstetiger) Multiplikationsoperator, der wegen  $\exp(-\theta(\omega)L) \neq 0$  injektiv ist, aber mit  $\exp(-\theta(\omega)L) \rightarrow 0$  für  $|\omega| \rightarrow \infty$  eine unbeschränkte Inverse  $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{-1}$  besitzt. Somit ist die Gleichung (4.101) inkorrekt. Wegen der normerhaltenden Eigenschaft der Fouriertransformation kann das Seitwärtsproblem selbst als Operatorgleichung (3.1) mit einem injektiven, nicht vollstetigen und nicht stetig invertierbaren linearen Operator  $A \in \mathcal{L}(L^2(-\infty, \infty), L^2(-\infty, \infty))$  geschrieben werden und ist daher **inkorrekt nach Nashed vom Typ I**. Da der Grad der Inkorrektheit solcher Probleme mit Multiplikationsoperatoren im Prinzip durch die Abklinggeschwindigkeit der Multiplikatorfunktion bestimmt wird, haben wir es beim Seitwärtsproblem wegen des sehr schnellen (exponentiellen) Abklingens von  $\exp(-\theta(\omega)L)$  mit einem stark inkorrekten Problem zu tun, dessen Inkorrektheit mit wachsendem  $L$  offensichtlich noch zunimmt.

In vollständiger Anlehnung an den soeben behandelten Fall der Faltungsgleichung im Raum  $L^2(-\infty, \infty)$  können wir nun die Tichonov-Regularisierung für das Seitwärtsproblem über die Beziehung

$$\mathcal{F}x_\alpha^\delta = (\mathcal{M}_\mathcal{F}^* \mathcal{M}_\mathcal{F} + \alpha I)^{-1} \mathcal{M}_\mathcal{F}^* (\mathcal{F}y_\delta)$$

realisieren. Wegen

$$[\mathcal{M}_\mathcal{F}^* (\mathcal{F}v)](\omega) = \exp(-\overline{\theta(\omega)} L) (\mathcal{F}v)(\omega)$$

und

$$[\mathcal{M}_\mathcal{F}^* \mathcal{M}_\mathcal{F} (\mathcal{F}u)](\omega) = \exp(-(\overline{\theta(\omega)} + \theta(\omega))L) (\mathcal{F}u)(\omega) = \exp(-\sqrt{2\omega}L) (\mathcal{F}u)(\omega)$$

erhalten wir als Fouriertransformierte

$$(\mathcal{F}x_\alpha^\delta)(\omega) = \frac{\exp(\theta(\omega)L) \cdot (\mathcal{F}y_\delta)(\omega)}{1 + \alpha \exp(\sqrt{2|\omega|}L)} \in L^2_C(-\infty, \infty). \quad (4.102)$$

Die Anwendung der inversen Fouriertransformation  $\mathcal{F}^{-1}$  auf (4.102) liefert eine stabil von den Eingangsdaten  $y_\delta$  abhängige regularisierte Lösung  $x_\alpha^\delta$  des Seitwärtsproblems zur Wärmeleitungsgleichung. Diese ist in der Regel wieder eine komplexwertige Funktion. Die Beträge der Funktionswerte von  $x_\alpha^\delta$  können jedoch als sinnvolle Näherung für die gesuchten Temperaturen benutzt werden.

#### 4.1.6 Regularisierung bei der Interpretation periodischer Daten

Auch Aufgabenstellungen der **Analyse von Zeitreihen** sind ihrer Natur nach inverse Probleme. Wir wollen uns dazu in diesem Abschnitt mit der Interpretation periodischer Daten beschäftigen (s. auch [HOFM94]). Interpretation bedeutet dabei die Identifikation signifikanter Schwingungsanteile in diesen Daten und die Bestimmung charakteristischer Frequenzen, um daraus gegebenenfalls den weiteren prinzipiellen Verlauf der Zeitreihe in der Zukunft vorhersagen zu können. Periodische Daten treten als gemessene Signale in vielfältiger Weise in der Technik auf. Wir finden sie aber auch als Tages-, Wochen- oder Monatsdaten in allen Zweigen der Wirtschaft, im Finanzwesen und an der Börse.

Als Zeitreihen betrachten wir reelle Funktionen  $y(t)$ , deren Werte zu den diskreten Zeitpunkten  $t = 1, 2, \dots, m$  beobachtet wurden. Wir können diese Werte im Vektor  $\underline{y} = (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_m)^T$  zusammenfassen, dessen Dimension  $m$  dem Umfang der Datenstichprobe entspricht. Die Werte  $y(t)$  betrachten wir näherungsweise als Realisierungen eines **stationären stochastischen Prozesses** (s. [LEX91, S.368 und 415]). Das heißt, die Werte  $y(t)$  schwanken für alle betrachteten Zeiten  $t$  mit konstanter Streuung um einen festen Mittelwert, wobei das zufällige

Verhalten der Werte  $y(t_1)$  und  $y(t_2)$  zu unterschiedlichen Zeiten  $t_2 > t_1$  zueinander im Mittel nur vom Zeitabstand  $t_2 - t_1$  abhängig sein soll.

Zur Interpretation der Zeitreihe gehen wir von einem **Integralgleichungsmodell**

$$\int_0^{\pi} \cos(\lambda t) f(\lambda) d\lambda + \int_0^{\pi} \sin(\lambda t) g(\lambda) d\lambda + \varepsilon(t) = y(t) \quad (t \geq 0) \quad (4.103)$$

aus, welches die Funktion  $y$  in Kosinus- und Sinusschwingungen zur variablen Frequenz  $\lambda$  und eine als **weißes Rauschen** (s. [LEX91, S.478]) betrachtete zufällige Störfunktion  $\varepsilon$  zerlegt. Würde es gelingen, die zugehörigen Amplitudenfunktionen  $f(\lambda)$  ( $0 \leq \lambda \leq \pi$ ) und  $g(\lambda)$  ( $0 \leq \lambda \leq \pi$ ) mit hinreichender Genauigkeit aus der Zeitreihe  $y(1), y(2), \dots, y(m)$  zu identifizieren, so könnte man die Gleichung (4.103) in der Form

$$\hat{y}(t) := \int_0^{\pi} \cos(\lambda t) f(\lambda) d\lambda + \int_0^{\pi} \sin(\lambda t) g(\lambda) d\lambda \quad (t > m) \quad (4.104)$$

als Grundlage für eine Schätzung  $\hat{y}(t)$  zur Vorhersage von  $y(t)$  für spätere Zeitpunkte  $t > m$  verwenden.

Man erhält einen Einblick in die Schwierigkeiten des Problems, wenn man  $\varepsilon(t)$  vernachlässigt und dabei annimmt, daß für  $T := m$  die Funktion  $y(t)$  für alle Argumente  $0 \leq t \leq T$  verfügbar sei. Als inverses Problem ergibt sich dann die Aufgabe der simultanen Bestimmung des Funktionenpaares  $(f, g) \in L^2(0, \pi) \times L^2(0, \pi)$  bei gegebener Funktion  $y \in Y := L^2(0, T)$ . Dieses lineare Identifikationsproblem kann man als Fredholmsche Integralgleichung erster Art

$$\int_0^{2\pi} k(t, \tau) x(\tau) d\tau = y(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4.105)$$

schreiben, in welcher die unbekannte Funktion  $x \in X := L^2(0, 2\pi)$  mit

$$x(\tau) := \begin{cases} f(\tau) & (0 \leq \tau \leq \pi) \\ g(\tau - \pi) & (\pi < \tau \leq 2\pi) \end{cases} \quad (4.106)$$

zu bestimmen ist. Für die Kernfunktion der Integralgleichung gilt dabei die Beziehung

$$k(t, \tau) := \begin{cases} \cos(t\tau) & (0 \leq \tau \leq \pi) \\ \sin(t(\tau - \pi)) & (\pi < \tau \leq 2\pi) \end{cases} \cdot \quad (4.107)$$

Man erkennt leicht, daß die Gleichung (4.105) und damit die betrachtete inverse Aufgabe **stark inkorrekt** ist, denn mit

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} (k(t, \tau))^2 d\tau dt = \int_0^T \int_0^{\pi} ((\cos(t\tau))^2 + (\sin(t\tau))^2) d\tau dt = \pi T < \infty$$

ist die Kernfunktion  $k(t, \tau)$  quadratisch integrierbar. Der zu (4.105) gehörige lineare Integraloperator wird dann in den betrachteten  $L^2$ -Räumen ein vollste-tiger Hilbert-Schmidt-Operator. Da die Kernfunktion (4.107) für alle betrachteten  $\tau$  unendlich oft bezüglich  $t$  differenzierbar ist, gilt wegen Satz 3.7 und Folgerung 3.3 die Beziehung  $\nu = \infty$  für den Grad der Inkorrektheit des Problems.

Ein Weg zur stabilen Lösung der Gleichung (4.105) könnte in der Anwendung der Methode der Tichonov-Regularisierung liegen, bei welcher je nach Wahl des Lösungsraumes eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art (4.49) oder eine Integrodifferentialgleichung (4.52) als Ersatzaufgabe anstelle von (4.105) eingesetzt würde. Ebenso ließen sich Näherungslösungen durch Iterationsverfahren gewinnen, wobei die Anzahl der durchzuführenden Iterationsschritte z.B. auf der Grundlage des Diskrepanzprinzips gesteuert werden könnte. Für die effiziente Einbeziehung der vorliegenden periodischen Datenstruktur scheinen diese Methoden jedoch nicht besonders geeignet zu sein, da weder eine durch das Problem angeregte Wahl des Sympathiefunktional  $\Omega(x)$ , noch eine Vorgabe des Datenfehlerniveaus  $\delta$  zur Realisierung des Diskrepanzprinzips auf der Hand liegen. Dagegen bietet die Statistik unter Nutzung des Begriffs des **Periodogramms** (s. [LEX91, S.296]) einen zum Problem passenden Weg der Regularisierung durch Konzentration auf **dominante Frequenzen** in der Zeitreihe.

Wir vereinfachen dazu das Modell (4.103) zu

$$\sum_{j=1}^k \{a_j \cos(\lambda_j t) + b_j \sin(\lambda_j t)\} + \varepsilon(t) = y(t) \quad (t = 1, 2, \dots, m), \quad (4.108)$$

wobei zu einer möglichst klein gewählten natürlichen Zahl  $k$  geeignete Frequenzen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0, \pi]$  aus der Zeitreihe  $\underline{y}$  bestimmt werden. Kennt man Multiplikatoren  $a_j$  und  $b_j$ , die mit den Zeitreihendaten im Sinne von (4.108) eine gute Übereinstimmung signalisieren, so ist eine Vorhersage über die Vorschrift

$$\hat{y}(t) := \sum_{j=1}^k \{a_j \cos(\lambda_j t) + b_j \sin(\lambda_j t)\} \quad (t > m) \quad (4.109)$$

sinnvoll. Die dominanten Frequenzen  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) gewinnt man dabei anhand der **k größten relativen Maxima** der Periodogrammfunktion

$$Per(\lambda) := \frac{1}{2\pi m} \left| \sum_{j=1}^m (\underline{y}_j - \mu) \exp(-i\lambda j) \right|^2, \quad (4.110)$$

wobei  $i$  hier die imaginäre Einheit innerhalb der komplexen Zahlen und  $\mu := \sum_{j=1}^m \underline{y}_j / m$  den Mittelwert der Zeitreihe verkörpern. Die Anpassung der im Parametervektor  $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)^T$  zusammengefaßten  $n := 2k$  Parameter  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) und  $b_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) erfolgt am besten auf der Grundlage einer **gewichteten Kleinste-Quadrate-Lösung** des linearen Gleichungssystems

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{y}$$

durch Lösung des Optimierungsproblems

$$\|\underline{W}(\underline{A} \underline{x} - \underline{y})\|_2^2 = \min!, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (4.111)$$

Dabei bedeuten  $\|\cdot\|_2$  die Euklidische Norm,

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} \cos(\lambda_1) & \dots & \cos(\lambda_k) & \sin(\lambda_1) & \dots & \sin(\lambda_k) \\ \cos(2\lambda_1) & \dots & \cos(2\lambda_k) & \sin(2\lambda_1) & \dots & \sin(2\lambda_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(m\lambda_1) & \dots & \cos(m\lambda_k) & \sin(m\lambda_1) & \dots & \sin(m\lambda_k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

die Systemmatrix und  $\underline{W} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  eine geeignet zu wählende Gewichtsmatrix. Für den **Datenabgleich** (4.111) spielt die **Gewichtsmatrix**  $\underline{W}$ , die meist in Form einer Diagonalmatrix  $\underline{W} := \text{diag}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m)$  gewählt wird, eine wichtige Rolle. Damit lassen sich unterschiedliche **subjektive Bewertungen** verschiedener Etappen der Zeitreihe  $y(1), y(2), \dots, y(m)$  in den Vorhersageprozeß einbringen. Besonders vorteilhaft im Sinne der Vorhersage scheint die Vergabe eines Gegenwartsbonus für spätere Glieder der Zeitreihe zu sein, wie er sich zum Beispiel in der Formel

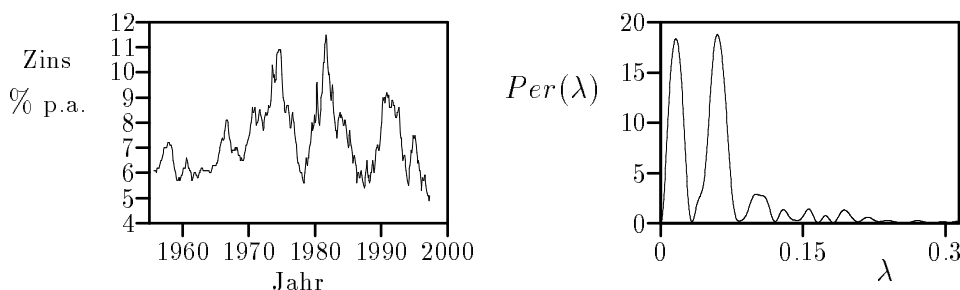
$$\underline{w}_j = \left( \frac{1}{m+1-j} \right)^p \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (4.112)$$

mit einer Potenz  $p > 0$  niederschlägt. Je größer  $p$  gewählt wird, um so mehr „vergißt“ man bei der Datenanpassung weiter zurückliegende Zeiträume.

Den hier dargestellten statistisch motivierten Zugang über die Betrachtung der ausgeprägtesten Peaks des Periodogramms interpretiert man in den Ingenieurwissenschaften meist als Bestimmung wesentlicher Frequenzen eines aufgezeichneten Schwingungsvorgangs mittels Fouriertransformation. Die regularisierende

Wirkung dieses Verfahrens besteht allerdings gerade darin, daß die inkorrekte Integralgleichung (4.105) eben nicht im endlichdimensionalen Raum möglichst gut nachgebildet wird, sondern in der Wahl einer kleinen Zahl  $k$  von verwendeten Frequenzen  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Bei dieser Aufgabenklasse übernimmt diese Zahl  $k$  die Rolle des **Regularisierungsparameters**. Die Funktion  $y(t)$  wird auf diese Weise geglättet, d.h., wie bei der Tichonov-Regularisierung werden auch hier vielfältige hochfrequente Anteile in der Lösung unterdrückt. Meist sind die signifikanten Peaks des Periodogramms nämlich nicht im Bereich hoher Frequenzen zu finden. Für die Vorhersage bedeutet dies, daß man ausgehend von der beobachteten Zeitreihe das weitere prinzipielle periodische Verhalten in der Zukunft vorherzusagen versucht, aber die aus dem Periodogramm als bedeutungslos erkannten Schwingungsanteile dabei gänzlich außer acht läßt.

**Beispiel 4.3** In diesem Beispiel beschäftigen wir uns mit einer Fallstudie aus dem Gebiet der Ökonometrie. Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht eine Zeitreihe, welche die Entwicklung des durchschnittlichen Kapitalzinssatzes in Deutschland widerspiegelt. Im einzelnen betrachten wir die Zeitreihe der Monatsdaten der Umlaufrendite festverzinslicher Wertpapiere in der Bundesrepublik Deutschland ab August 1955 bis in die Gegenwart, wie sie in den Berichten der Deutschen Bundesbank regelmäßig veröffentlicht wird.

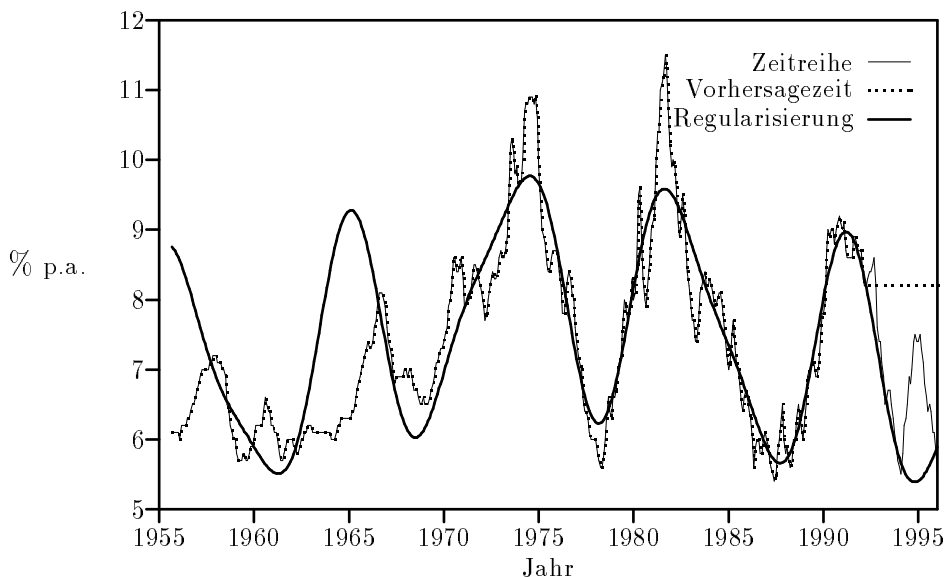


**Bild 4.3** Die Zinsentwicklung in Deutschland und deren Periodogramm

Aus dem Graphen dieser Zeitreihe (s. Bild 4.3 links) ist der periodische Charakter dieser Daten auf den ersten Blick erkennbar. Auch scheint die getroffene Annahme eines stationären stochastischen Prozesses als Grundlage der Zeitreihe realistisch. Der Mittelwert der Umlaufrendite liegt dabei um 7,5 % pro Jahr. In dieser Studie gehen wir vom Monat März 1992 als Betrachtungszeitpunkt aus und wollen mit den bis dahin vorliegenden  $m = 440$  Monatsdaten das Schwingungsverhalten der Zeitreihe analysieren und darauf aufbauend verschiedene Varianten einer Vorhersage bis Dezember 1995 diskutieren. Im rechten Teil von

Bild 4.3 finden wir das Periodogramm  $Per(\lambda)$  der bis März 1992 betrachteten Zeitreihe.

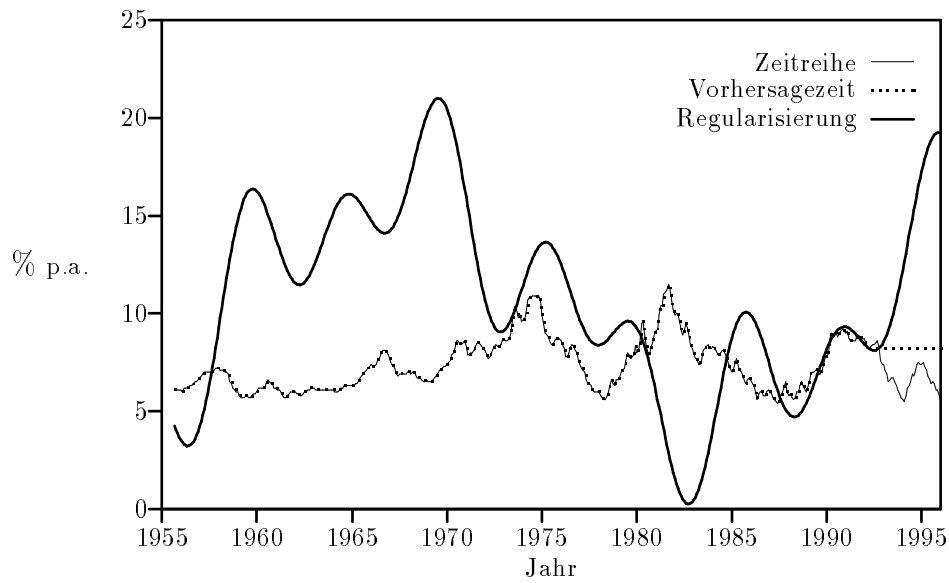
Wir wählen für den Optimierungsprozeß (4.111) mit  $k := 4$  in der Variante (V1) neben  $\lambda_1 = 0$  zur Berücksichtigung des konstanten Anteils der Zeitreihe die drei Peaks des Periodogramms bei  $\lambda_2 = 0,0157$ ,  $\lambda_3 = 0,0597$  und  $\lambda_4 = 0,1005$ , welche einer Periodenlänge der Schwingung von 33,3 Jahren, 8,77 Jahren und 5,21 Jahren entsprechen. Da die Zeitreihe nur unbedeutend länger ist als die erste betrachtete Periode von 33,3 Jahren, kann es sich bei  $\lambda_2$  um einen auswertungstechnisch bedingten **Artefakt** handeln. Um dessen Einfluß zu überprüfen, wird in einer Variante (V2) anstatt des ersten Peaks des Periodogramms als  $\lambda_2 = 0,1555$  der vierte Peak mit einer Periodenlänge von 3,37 Jahren einbezogen. Diese **regularisierten Varianten** (V1) und (V2) mit sehr kleinem  $k$  ermöglichen einen Vergleich mit einer nahezu **unregularisierten Variante** (V3), bei der  $k = 11$  Frequenzen aus dem Bereich  $\lambda \in [0, \pi]$  berücksichtigt werden.



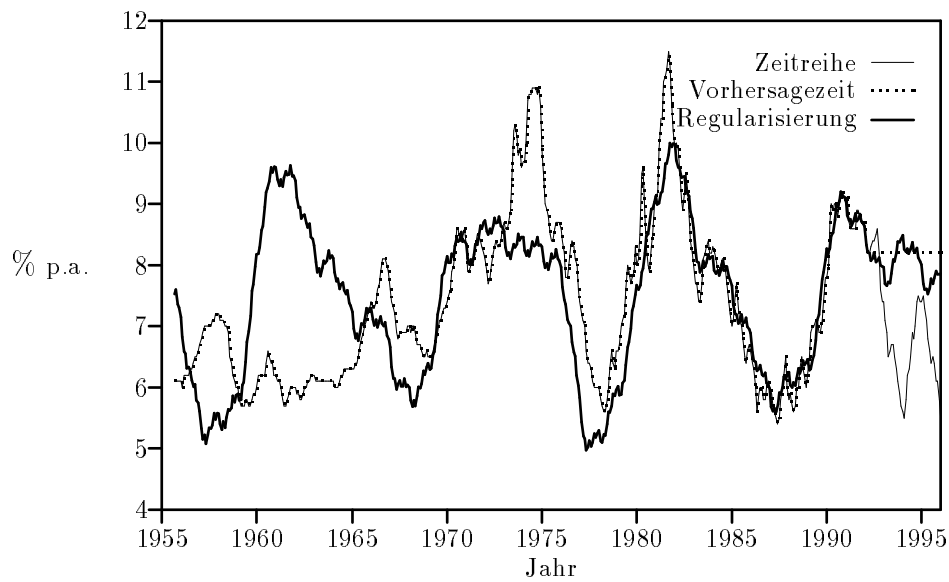
**Bild 4.4** Regularisierung der Zinskurve mit Variante (V1) und  $p = 1$

In Bild 4.4 findet man die regularisierte Zinskurve nach Variante (V1) mit einem Exponenten  $p = 1$  in den Gewichten (4.112) im Vergleich zur tatsächlichen Zeitreihe. Die Unterdrückung hochfrequenter Anteile der Zeitreihe wird dabei offensichtlich. Dem hinteren Zeitabschnitt zwischen März 1992 und dem Jahresbeginn 1996 entnimmt man das Verhalten der Vorhersagekurve, die in den ersten Monaten noch recht gut mit der Realität übereinstimmt.





**Bild 4.5** Regularisierung der Zinskurve mit Variante (V1) und  $p = 2$



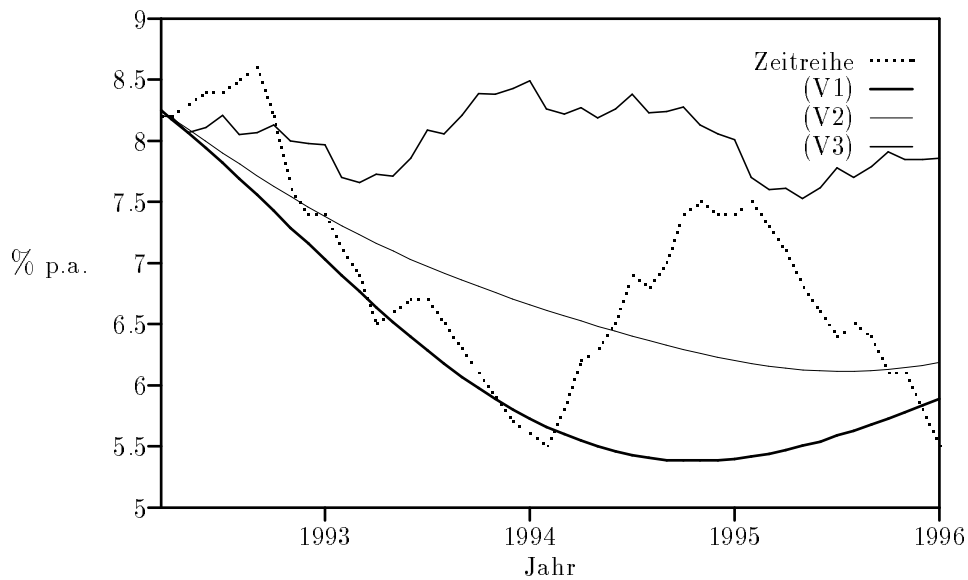
**Bild 4.6** Unregularisierte Fortsetzung der Zinskurve nach Variante (V3)

Extreme Oszillationen in Bild 4.5 machen deutlich, daß ein zu starker Gegenwartsbonus (hier  $p = 2$  als Exponent in den Gewichten) zwar eine sehr gute

Anpassung an die jüngsten Daten ermöglicht, insgesamt aber kein brauchbares Ergebnis liefert. Wir haben es dabei mit der falschen Wahl eines wichtigen numerischen Parameters bei der Regularisierung zu tun. Für die Tichonov-Regularisierung treten ähnliche Oszillationen bei zu kleinem Regularisierungsparameter  $\alpha$  und damit zu großer Konditionszahl der Systemmatrix des entsprechenden linearen Gleichungssystems auf.

Das Bild 4.6 zeigt die Wirkung einer Anpassung der Zeitreihe an eine Vielzahl von Schwingungskomponenten mit den unterschiedlichsten Frequenzen, wobei auch hier bei Variante (V3) eine Gewichtsmatrix mit dem Exponenten  $p = 1$  verwendet wurde. Wie man sieht, verhindern die enthaltenen hochfrequenten Anteile eine „glatte“ Vorhersage. Diese unregularisierte Variante liefert als Vorhersage kaum Besseres als die konstante Fortschreibung des letzten Zeitreihenwertes in die Zukunft.

Die Vorhersageergebnisse aller drei Varianten mit  $p = 1$  sind im Bild 4.7 verglichen mit dem realen weiteren Zeitreihenverlauf dargestellt. Im betrachteten zeitlichen Vorhersagefenster erscheinen die Ergebnisse zu den Varianten (V1) und (V2) gleichermaßen als glatte Fortsetzungen der gegebenen Zeitreihenkurve in die Zukunft, die sich nur im Grad der Krümmung unterscheiden und die beide den tatsächlichen Verlauf in groben Zügen widerspiegeln, während die Variante (V3) keinen Bezug zur Realität aufweist.



**Bild 4.7** Vergleich der Zinsvorhersagen mit der realen Zeitreihe

Es sei erwähnt, daß es in den Jahren 1996 bis 1998 vielleicht unter dem Einfluß der Globalisierung der Märkte bzw. der Vorbereitung der Einführung einer gemeinsamen europäischen Währung zu einem Modellbruch gekommen ist. Dieser wird durch ein durchgehend niedriges Zinsniveau in Deutschland charakterisiert, welches tendenziell immer neue Nachkriegstiefs bis unter 4 % pro Jahr ansteuerte. Weiterführende Rechnungen in diesen Bereich hinein machen insofern wenig Sinn. Analysen und Vorhersagen in mathematischen Modellen sind eben nur dann tragfähig, wenn in dem betrachteten Zeit- oder Ortsbereich das zugrunde gelegte mathematische Modell auch noch gültig ist.  $\square$

## 4.2 Regularisierung schlecht konditionierter linearer Gleichungssysteme

Es gibt zwei verschiedene Wege, die man gehen kann, um mit Hilfe eines Computers stabile näherungsweise Lösungen inkorrekt linearer inverser Probleme vom Typ (3.1) zu erhalten. Der erste Weg beruht auf der Maxime **erst regularisieren, dann diskretisieren** und schließt unmittelbar an die in Abschnitt 4.1 vorgestellten Regularisierungsmethoden an, die auf regularisierte Lösungen im unendlichdimensionalen Hilbertraum führen. Da Computer keine Funktionen, sondern nur endlich viele Zahlen verarbeiten können, müssen die dabei zu lösenden korrekten linearen Ersatzaufgaben der inkorrekten Operatorgleichung (3.1) diskretisiert werden, d.h., diese Aufgaben werden durch lineare Gleichungssysteme approximiert. Eine Übersicht über die verschiedenen Möglichkeiten der Diskretisierung am Beispiel der korrekten linearen Integralgleichungen zweiter Art (s. Formel (4.49)) findet man in [ENG97, S. 69ff]. Falls genügend große Regularisierungsparameter  $\alpha > 0$  verwendet werden, sind die so entstehenden Gleichungssysteme **gut konditioniert** und können mit Standardsoftware der numerischen linearen Algebra stabil und ohne Schwierigkeiten gelöst werden. Aus den Lösungsvektoren dieser linearen Gleichungssysteme, die auch manchmal als Skelettlösungen der inversen Probleme bezeichnet werden, kann man dann durch Rücktransformation in den unendlichdimensionalen Hilbertraum, z.B. unter Verwendung von Splines oder durch entsprechende Linearkombination von gegebenen Ansatzfunktionen, die eigentlichen stabilen Näherungslösungen von (3.1) erhalten.

Der zweite Weg, mit dessen Besonderheiten wir uns im vorliegenden Abschnitt befassen wollen, der aber wesentlich ausführlicher im Buch [HOF86] des Autors behandelt wird, nutzt die umgekehrte Vorgehensweise entsprechend dem Prinzip **erst diskretisieren, dann regularisieren**. Die lineare Operatorgleichung (3.1) wird jetzt im ersten Schritt diskretisiert und durch ein lineares Gleichungs-

system

$$\underline{A}\underline{x} = \underline{y}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{y} \in \mathbb{R}^m, \underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (4.113)$$

angenähert, welches uns bereits in Beispiel 3.1 begegnet ist, wobei in der Regel  $m \geq n$  vorausgesetzt wird. Wir betrachten unser Problem also im weiteren in den endlichdimensionalen Räumen  $X := \mathbb{R}^n$  und  $Y := \mathbb{R}^m$  mit dem zur Euklidischen Norm  $\|\cdot\|_2$  gehörigen Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  (s. Formel (3.8)). Bei genügend guter Diskretisierung schlägt sich die Instabilität der im unendlichdimensionalen Raum formulierten Ausgangsaufgabe (3.1) im endlichdimensionalen Problem (4.113) in Form **großer Konditionszahlen** nieder, die für  $n \rightarrow \infty$  sogar ins Unendliche wachsen. Die numerische Behandlung einer **diskretisierten inversen Aufgabe** (4.113) erfordert daher im zweiten Schritt eine Regularisierung, um Skelettlösungen von (3.1) bekommen zu können, die stabil von den gegebenen Daten abhängen. Regularisierung bedeutet dabei die Ersetzung des **schlechtkonditionierten** linearen Gleichungssystems (4.113) durch ein **gutkonditioniertes Nachbarproblem**. Mehr Informationen zu entsprechenden Diskretisierungstechniken und zur numerischen Realisierung der hier nur kurz behandelten Regularisierungsmethoden für schlechtkonditionierte lineare Gleichungssysteme findet der interessierte Leser in den Büchern [EHN96, Kap. 9], [GRO93, S. 91ff] und [KIR96, Kap. 3].

Wir wollen nun die Anwendung einiger spezieller Regularisierungsmethoden auf die diskretisierte inverse Aufgabe (4.113) näher betrachten. Dabei gehen wir von fehlerbehafteten Daten

$$\underline{z} = \underline{y} + \underline{\varepsilon} \quad (4.114)$$

mit  $\underline{y} \in R(\underline{A})$  und der vektoriellen Datenstörung  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$  aus. Für diese Datenstörung werden wir im weiteren (s. auch Abschn. 2.3.1) **deterministische** wie **stochastische** Apriori-Informationen in die Betrachtungen einbeziehen. Scheut man den beträchtlichen Aufwand zur Berechnung der in Abschnitt 3.1.5 eingeführten **Singulärwertzerlegung** (3.29) der Matrix  $\underline{A}$  nicht, so empfiehlt sich zur Regularisierung von (4.113) die Anwendung der **Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung** mit dem Regularisierungsparameter  $\alpha > 0$  (s. Formel (4.57)). Als regularisierte Lösung, welche die Minimum-Norm-Lösung

$\underline{x}_{mn} = \underline{A}^\dagger \underline{z}$  (s. Formel (3.31)) approximieren soll, erhält man dabei

$$\underline{x}_\alpha := \underline{R}_\alpha \underline{z} := \underline{A}_\alpha^\dagger \underline{z} := \sum_{\sigma_j \geq \alpha} \frac{\langle \underline{z}, \underline{v}_j \rangle_2}{\sigma_j} \underline{u}_j. \quad (4.115)$$

Die Regularisierungsmatrix

$$\underline{R}_\alpha = \underline{A}_\alpha^\dagger = \underline{U} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_l}, 0, \dots, 0\right) \underline{V}^T \quad (\sigma_{l+1} < \alpha \leq \sigma_l)$$

mit

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \underline{A}_\alpha^\dagger \underline{z} = \underline{A}^\dagger \underline{z} \quad \text{für alle } \underline{z} \in \mathbb{R}^m$$

und

$$\|\underline{A}_\alpha^\dagger\|_2 \leq \frac{1}{\alpha}$$

ist für genügend großes  $\alpha$  eine gutartige Modifikation der Pseudoinversen  $\underline{A}^\dagger$  (s. Formel (3.30)), denn Störungen in der rechten Seite von (4.113) multiplizieren sich dann bei der Berechnung von  $\underline{x}_\alpha$  höchstens mit dem Faktor  $1/\alpha$ .

Auch für schlecht konditionierte lineare Gleichungssysteme stellt die **Methode der Tichonov-Regularisierung** das am häufigsten angewandte Stabilisierungsverfahren dar. In vielen Fällen wird sie für Regularisierungsparameter  $\alpha > 0$  als Optimierungsproblem

$$T_\alpha(\underline{x}) := \|\underline{A}\underline{x} - \underline{z}\|_2^2 + \alpha \|\underline{L}\underline{x}\|_2^2 = \min!, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad (4.116)$$

mit einer die Sympathiefunktion  $\Omega(\underline{x}) := \|\underline{L}\underline{x}\|_2^2 = \langle \underline{L}^T \underline{L}\underline{x}, \underline{x} \rangle_2$  erzeugenden Matrix  $\underline{L} \in \mathbb{R}^{k \times n}$  formuliert. Da wir die zu minimierende Tichonov-Funktion  $T_\alpha(\underline{x})$  auch in der Form

$$T_\alpha(\underline{x}) = \langle (\underline{A}^T \underline{A} + \alpha \underline{L}^T \underline{L}) \underline{x}, \underline{x} \rangle_2 - 2 \langle \underline{x}, \underline{A}^T \underline{z} \rangle_2 + \|\underline{z}\|_2^2$$

schreiben können, ist für eine reguläre Matrix  $\underline{A}^T \underline{A} + \alpha \underline{L}^T \underline{L}$  mit

$$\langle (\underline{A}^T \underline{A} + \alpha \underline{L}^T \underline{L}) \underline{x}, \underline{x} \rangle_2 \geq \beta \|\underline{x}\|_2^2 \quad (\beta > 0)$$

der Hilfssatz 4.2 anwendbar und liefert als eindeutig bestimmte Lösung des Optimierungsproblems (4.116) die regularisierte Lösung

$$\underline{x}_\alpha := \underline{R}_\alpha \underline{z} := (\underline{A}^T \underline{A} + \alpha \underline{L}^T \underline{L})^{-1} \underline{A}^T \underline{z} \quad (4.117)$$

unter Verwendung der Regularisierungsmatrix  $\underline{R}_\alpha = (\underline{A}^T \underline{A} + \alpha \underline{L}^T \underline{L})^{-1} \underline{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mit dem Stabilitätsfaktor  $\|\underline{R}_\alpha\|_2 \leq \frac{\|\underline{A}\|_2}{\beta}$ . Für die Berechnung des Vektors  $\underline{x}_\alpha$  ist dabei nur das lineare Gleichungssystem

$$(\underline{A}^T \underline{A} + \alpha \underline{L}^T \underline{L}) \underline{x}_\alpha = \underline{A}^T \underline{z} \quad (4.118)$$

mit einer positiv definiten symmetrischen Systemmatrix zu lösen, welches wenigstens für reguläre Matrizen  $\underline{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und genügend großes  $\alpha > 0$  gut konditioniert ist. Dieser Vektor  $\underline{x}_\alpha \in \mathbb{R}^n$  kann auch als Lösung des Kleinste-Quadrate-Problems

$$T_\alpha(\underline{x}) = \left\| \begin{pmatrix} \underline{A} \\ \sqrt{\alpha} \underline{L} \end{pmatrix} \underline{x} - \begin{pmatrix} \underline{z} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \min!, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit der erweiterten Matrix  $\begin{pmatrix} \underline{A} \\ \sqrt{\alpha} \underline{L} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+k) \times n}$  aufgefaßt werden.

Im Falle der Einheitsmatrix  $\underline{L} := \underline{I}$  läßt sich in Analogie zu Formel (4.22) der nach Tichonov regularisierte Lösungsvektor in einfacher Weise als endliche Reihe

$$\underline{x}_\alpha = \sum_{j=1}^r \frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \alpha} \langle \underline{z}, \underline{v}_j \rangle_2 \underline{u}_j \quad (4.119)$$

darstellen, wobei die natürliche Zahl  $r = \text{rang}(\underline{A})$  wieder den Rang der im allgemeinen rechteckigen Matrix  $\underline{A}$  ausdrückt. Für die Regularisierungsmatrix  $\underline{R}_\alpha = (\underline{A}^T \underline{A} + \alpha \underline{I})^{-1} \underline{A}^T$  haben wir dann auch hier die Konvergenzbeziehung

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \underline{R}_\alpha \underline{z} = \underline{A}^\dagger \underline{z} \quad \text{für alle } \underline{z} \in \mathbb{R}^m.$$

Von großer praktischer Bedeutung sind jedoch auch andere Matrizen  $\underline{L}$ , z.B. solche, die bei einer Diskretisierung des Sympathiefunktional (2.79) in der Form

$$\Omega(\underline{x}) = \|\underline{L} \underline{x}\|_2^2 := \mu_1 \|\underline{L}_1 \underline{x}\|_2^2 + \mu_2 \|\underline{L}_2 \underline{x}\|_2^2 + \mu_3 \|\underline{L}_3 \underline{x}\|_2^2$$

mit entsprechenden nichtnegativen Multiplikatoren  $\mu_1, \mu_2$  und  $\mu_3$  und den Matrizen

$$\underline{L}_1 = \underline{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \underline{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$$

sowie

$$\underline{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-2) \times n}$$

entstehen. Um in derartigen Fällen mit Reihendarstellungen für  $\underline{x}_\alpha$  arbeiten zu können, muß man **verallgemeinerte Singulärwertzerlegungen** des Matrizenpaares  $(\underline{A}, \underline{L})$  verwenden (s. [HAN98, Kap. 2]).

Das schwierigste Problem bei der praktischen Nutzung der Tichonov-Regularisierung (4.116) zur stabilen näherungsweise Lösung eines diskretisierten inversen Problems (4.113) auf der Grundlage des gegebenen Datenvektors  $\underline{z}$  ist

die **Wahl des Regularisierungsparameters**  $\alpha > 0$ . Da man meist nur einen Datenvektor zur Verfügung hat, tritt die Frage der Konvergenz der regularisierten Lösung, z.B. für  $\underline{L} = \underline{I}$  im Sinne von  $\underline{x}_\alpha \rightarrow \underline{A}^\dagger \underline{y}$  für  $\alpha = \alpha(\underline{\varepsilon}) \rightarrow 0$  und  $\|\underline{\varepsilon}\|_2 \rightarrow 0$ , in den Hintergrund. Dafür besteht großes Interesse an heuristischen Parameterwahlkriterien, die in einer Vielzahl von praktischen Situationen ihre Leistungsfähigkeit bewiesen haben. Im folgenden findet der Leser eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten derartigen Kriterien.

Ist als Apriori-Information eine deterministische Fehlerschranke  $\delta > 0$  mit  $\|\underline{\varepsilon}\|_2 \leq \delta$  ableitbar, so kann das Morozovsche **Diskrepanzprinzip** (s. Definition 4.3)

$$\alpha_{dis} : \quad \|\underline{A}\underline{x}_\alpha - \underline{z}\|_2 = \delta \quad (4.120)$$

bei der Parameterwahl eingesetzt werden, welches aber zur Überregularisierung (Wahl zu großer  $\alpha$ -Werte) neigt. Realistische Schranken  $\delta$  sollten dabei neben den Beobachtungsfehlern auch Diskretisierungsfehler beim Übergang von der Operatorgleichung (3.1) zum linearen Gleichungssystem (4.113) berücksichtigen. Manchmal lohnt es sich, in diesem Zusammenhang eine verallgemeinerte Version des Diskrepanzprinzips (s. [HOF86, S. 95]), etwa im Sinne von

$$\alpha_{dis} : \quad \|\underline{A}\underline{x}_\alpha - \underline{z}\|_2 = \delta_1 + \delta_2 \|\underline{L}\underline{x}_\alpha\|_2 \quad (4.121)$$

mit geeigneten positiven Konstanten  $\delta_1$  und  $\delta_2$  zu verwenden.

Häufig modelliert man den Fehlervektor  $\underline{\varepsilon}$  stochastisch als weißes Rauschen (2.73) mit der komponentenweisen Streuung  $\sigma^2 > 0$ . Das Diskrepanzprinzip erhält dann die Gestalt (s. (2.75))

$$\alpha_{dis} : \quad \|\underline{A}\underline{x}_\alpha - \underline{z}\|_2^2 = \rho m \sigma^2 \quad (4.122)$$

mit dem Erwartungswert  $\mathbf{E}\|\underline{\varepsilon}\|_2^2 = m \sigma^2$  des Datenfehlers und einer Konstanten  $\rho > 0$ , die meist unterhalb von Eins gewählt wird. Für die Bestimmung des Regularisierungsparameters  $\alpha_{dis}$  auf der Grundlage einer der Formeln (4.120), (4.121) oder (4.122) nutzt man wie im unendlichdimensionalen Fall (s. Formel (4.29) und nachfolgende Betrachtungen) die Tatsache, daß  $\|\underline{A}\underline{x}_\alpha - \underline{z}\|_2$  eine monoton nichtfallende Funktion und  $\|\underline{L}\underline{x}_\alpha\|_2$  eine monoton nichtwachsende Funktion des positiven Regularisierungsparameters  $\alpha$  darstellen.

Die folgenden drei Kriterien beruhen auf der Minimierung bzw. Maximierung positiver Funktionen des Regularisierungsparameters  $\alpha > 0$ . Je klarer ausgeprägte absolute Extrema diese Funktionen haben, um so zuverlässiger lassen sich diese Kriterien handhaben. Das in Abschnitt 4.1.2 erwähnte Prinzip der

Quasioptimalität liefert mit dem **Ableitungskriterium**

$$\alpha_{qo} : \quad \left\| \alpha \frac{d \underline{x}_\alpha}{d \alpha} \right\|_2 = \min!, \quad \alpha > 0 \quad (4.123)$$

eine vielfach bewährte Technik zur Wahl von  $\alpha$ . Dieses Kriterium wird ebenso wie das **Quotientenkriterium**

$$\alpha_{qu} : \quad \frac{\left\| \underline{A} \left( \alpha \frac{d \underline{x}_\alpha}{d \alpha} \right) - (\underline{A} \underline{x}_\alpha - \underline{z}) \right\|_2}{\left\| \underline{A} \underline{x}_\alpha - \underline{z} \right\|_2} = \max!, \quad \alpha > 0 \quad (4.124)$$

in dem schon klassisch zu nennenden Buch [TIAR77] von A.N. Tichonov und V. Arsenin erwähnt. Insbesondere wenn die Folge der Singulärwerte der Matrix  $\underline{A}$  größere Lücken aufweist, können die in (4.123) und (4.124) zu optimierenden Zielfunktionen allerdings zahlreiche relative Extrema besitzen, die eine Auswahl von  $\alpha$  nach diesen Kriterien erschweren. Keine Schwierigkeiten bereitet dagegen die Berechnung des für die Auswertung der Zielfunktionen erforderlichen Ableitungsvektors  $\frac{d \underline{x}_\alpha}{d \alpha}$ , der sich für jedes  $\alpha > 0$  als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(\underline{A}^T \underline{A} + \alpha \underline{L}^T \underline{L}) \frac{d \underline{x}_\alpha}{d \alpha} = -\underline{L}^T \underline{L} \underline{x}_\alpha$$

bestimmen läßt. Die dabei auftretende Systemmatrix ist die gleiche wie bei der Berechnung der regularisierten Lösung  $\underline{x}_\alpha$  selbst (s. Formel (4.118)).

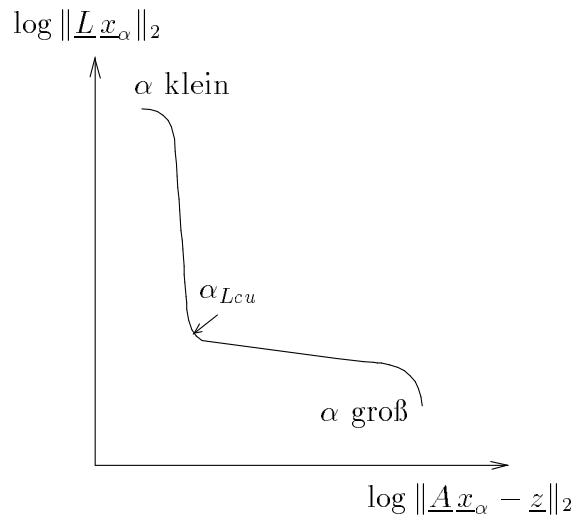
Aus stochastischer Sicht sehr beliebt ist das von G. Wahba (s. [WAH90]) entwickelte **verallgemeinerte Cross-Validation-Kriterium**

$$\alpha_{vcv} : \quad \frac{\left\| \underline{A} \underline{x}_\alpha - \underline{z} \right\|_2^2}{\left[ \text{spur} \left( \underline{I} - \underline{A} (\underline{A}^T \underline{A} + \alpha \underline{L}^T \underline{L})^{-1} \underline{A}^T \right) \right]^2} = \min!, \quad \alpha > 0. \quad (4.125)$$

Zur dabei auftretenden **Spur** einer quadratischen Matrix  $\underline{M}$ , die durch das Symbol  $\text{spur}(\underline{M})$  zum Ausdruck gebracht wird, sei auf den Hilfssatz 4.4 im zweiten Teil des Abschnitts verwiesen. Leider ist die in (4.125) über alle positiven  $\alpha$  zu minimierende Funktion häufig sehr flach, so daß  $\alpha_{vcv}$  nicht zuverlässig bestimmt werden kann. Besonders ungünstig wirken sich dabei nicht stochastisch modellierbare Diskretisierungsfehler aus, die in den Datenvektor  $\underline{z}$  eingehen und im ungünstigsten Falle die Benutzung dieses Kriteriums gänzlich unmöglich machen.



Zum Abschluß dieser Aufzählung wollen wir last but not least noch das **L-Kurven-Kriterium** von P. C. Hansen erwähnen, welches sowohl bei der Tichonov-Regularisierung wie auch bei der abgebrochenen Singulärwertentwicklung in den letzten Jahren große Popularität erlangt hat (s. [HAN98, S. 83ff und S. 187ff]). Obwohl sich hier wie bei allen Kriterien, die keine explizite Obergrenze für die Datenfehlernorm verwenden, keine Konvergenzaussagen für  $\|\underline{\varepsilon}\|_2 \rightarrow 0$  finden lassen, erhält man damit in vielen praktischen Situationen akzeptable Regularisierungsparameter. Wir beschreiben das Kriterium für die Tichonov-Regularisierung (4.117). Die Grundlage bildet ein in logarithmischen Skalen aufgezeichneter 2D-Plot der durch den Regularisierungsparameter  $\alpha > 0$  parametrisierten Kurve mit den Koordinatenpaaren  $(\|\underline{A}\underline{x}_\alpha - \underline{z}\|_2, \|\underline{L}\underline{x}_\alpha\|_2)$ . Der Defekt  $\underline{A}\underline{x}_\alpha - \underline{z}$  wird dabei von zwei entscheidenden Einflußgrößen beeinflusst, vom Datenfehler  $\underline{\varepsilon}$  und von dem durch die Regularisierungsmatrix erzeugten Approximationsfehler  $(\underline{A}\underline{R}_\alpha - \underline{L})\underline{y}$  bei fehlerfreier rechter Seite  $\underline{y}$ . Wenn  $\alpha$  mit Werten nahe Null beginnend anwächst, so ändert sich die Defektnorm  $\|\underline{A}\underline{x}_\alpha - \underline{z}\|_2$  erst einmal kaum, denn der von  $\alpha$  unabhängige Datenfehler dominiert diese Größe. Dahingegen fällt die Norm  $\|\underline{L}\underline{x}_\alpha\|_2$  in diesem Bereich bei wachsendem  $\alpha$  relativ schnell. Erreicht der Regularisierungsparameter aber eine solche Größe, daß die Dämpfungsfaktoren (s. Bild 4.2) zu wirken beginnen, so schlägt das Verhalten der Fehlereinflüsse relativ schroff um, und der Approximationsfehler dominiert plötzlich den Datenfehler. Die Defektnorm wächst dann mit  $\alpha$  schnell an, wogegen sich  $\|\underline{L}\underline{x}_\alpha\|_2$  kaum noch ändert. Das Resultat ist in vielen Fällen eine L-Kurve (s. Bild 4.8).



**Bild 4.8** Graph einer typischen L-Kurve

Die „Ecke“ dieser Kurve, also der Kurvenbereich mit maximaler Krümmung deutet auf geeignete Regularisierungsparameter  $\alpha_{Lcu}$  hin. Aber wie alle anderen kann auch dieses Kriterium versagen, die Kurve im 2D-Plot nichts mit einem  $L$  zu tun haben. Bei der Wahl des Regularisierungsparameters sollten daher stets mehrere Kriterien kombiniert werden, um sinnvolle Größenbereiche für  $\alpha$  herauszufiltern.

Im zweiten Teil dieses Abschnitts wollen wir uns nun mit der näherungsweise Bestimmung von Lösungsvektoren  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  der diskretisierten inversen Aufgabe (4.113) aus stochastischer Sicht als **Schätzproblem** in einem linearen **Regressionsmodell**

$$\underline{A}\underline{x} + \underline{\varepsilon} = \underline{z}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{\varepsilon}, \underline{z} \in \mathbb{R}^m, \quad \underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \text{rang}(\underline{A}) = n \quad (4.126)$$

beschäftigen. Dabei ist  $\underline{\varepsilon}$  ein zufälliger Vektor, der die ersten beiden Momente

$$\mathbf{E}\underline{\varepsilon} = \underline{0} \in \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad \mathbf{Cov}\underline{\varepsilon} = \underline{C} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (4.127)$$

mit einer positiv definiten Kovarianzmatrix  $\underline{C}$  besitzen möge. Für die Inverse der Kovarianzmatrix setzen wir dabei eine Zerlegung der Gestalt  $\underline{C}^{-1} = \underline{W}^T \underline{W}$  ( $\underline{W} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\underline{W}$  regulär) an. Da Regressionsmodelle (4.126) in der Statistik vorzugsweise mit Regressormatrizen  $\underline{A}$  arbeiten, deren Spalten nahezu orthogonal sind, müssen wir als Besonderheit unserer Situation hervorheben, daß bei uns  $\underline{A}$  eine schlechtkonditionierte Matrix ist, deren Spalten nahezu linear abhängig sind.

Wir betrachten affin lineare Transformationen

$$\hat{\underline{x}}(\underline{z}) := \underline{V}\underline{z} + \underline{v}, \quad \underline{V} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \underline{v} \in \mathbb{R}^n \quad (4.128)$$

des Datenvektors  $\underline{z}$  und fassen  $\hat{\underline{x}} = \hat{\underline{x}}(\underline{z})$  als **affin lineare Schätzung** des gesuchten Vektors  $\underline{x}$  auf. Dabei gelten die in Hilfssatz 4.5 formulierten stochastischen Zusammenhänge, von denen wir in den weiteren Untersuchungen Gebrauch machen werden. Da die Spur einer quadratischen Matrix dabei eine wichtige Rolle spielt, stellen wir vorher in Hilfssatz 4.4 noch einige wichtige Aussagen zu Spuren von Matrizen zusammen.

**Hilfssatz 4.4** Die für eine quadratische Matrix  $\underline{M} = (\underline{m}_{ji}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$  als Summe der Hauptdiagonalelemente  $\text{spur}(\underline{M}) := \sum_{j=1}^k \underline{m}_{jj}$  definierte Spur erfüllt die Beziehungen

$$\text{spur}(\underline{M}) = \text{spur}(\underline{M}^T), \quad (4.129)$$

$$\text{spur}(\underline{R}\underline{A}) = \text{spur}(\underline{A}\underline{R}) \quad (\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \underline{R} \in \mathbb{R}^{n \times m}) \quad (4.130)$$

und

$$\text{spur}(\underline{A}^T \underline{A}) = \sum_{j=1}^r \sigma_j^2, \quad (4.131)$$

wobei  $\{\sigma_j\}_{j=1}^r$  wieder die Folge der positiven singulären Werte der Matrix  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $\text{rang}(\underline{A}) = r$  bezeichnet. Weiterhin gilt für eine positiv definite Matrix  $\underline{M} \in \mathbb{R}^{k \times k}$  und eine Matrix  $\underline{V} \in \mathbb{R}^{l \times k}$  stets  $\text{spur}(\underline{V}\underline{M}\underline{V}^T) \geq 0$  und die Implikation

$$\text{spur}(\underline{V}\underline{M}\underline{V}^T) = 0 \implies \underline{V} = \underline{0} \quad (\text{Nullmatrix in } \mathbb{R}^{l \times k}). \quad (4.132)$$

**Hilfssatz 4.5** Es seien  $\underline{\xi}$  und  $\underline{\zeta}$  zwei  $k$ -dimensionale zufällige Vektoren und  $\underline{\eta}$  ein  $l$ -dimensionaler zufälliger Vektor mit  $\mathbf{E}\underline{\eta} = \underline{0}$ . Weiterhin seien  $\underline{v} \in \mathbb{R}^k$  ein fester Vektor und  $\underline{V} \in \mathbb{R}^{l \times k}$  eine feste Matrix. Dann gelten die Beziehungen

$$\mathbf{E}(\underline{\xi} + \underline{\zeta}) = \mathbf{E}\underline{\xi} + \mathbf{E}\underline{\zeta}, \quad (4.133)$$

$$\mathbf{E}\langle \underline{v}, \underline{\xi} \rangle_2 = \langle \underline{v}, \mathbf{E}\underline{\xi} \rangle_2, \quad (4.134)$$

$$\mathbf{E}(\underline{V}\underline{\xi}) = \underline{V}(\mathbf{E}\underline{\xi}) \quad \text{und} \quad \mathbf{Cov}(\underline{V}\underline{\xi}) = \underline{V}(\mathbf{Cov}\underline{\xi})\underline{V}^T \quad (4.135)$$

sowie

$$\mathbf{E}\|\underline{\eta}\|_2^2 = \text{spur}(\mathbf{Cov}\underline{\eta}). \quad (4.136)$$

Für den Schätzfehler der affin linearen Schätzung (4.128) gilt nun

$$\hat{\underline{x}}(\underline{z}) - \underline{x} = \underline{V}\underline{A}\underline{x} + \underline{V}\underline{\varepsilon} + \underline{v} - \underline{x} = (\underline{V}\underline{A} - \underline{I})\underline{x} + \underline{v} + \underline{V}\underline{\varepsilon}$$

und beim Übergang zum **mittleren quadratischen Fehler**  $\mathbf{E}\|\hat{\underline{x}}(\underline{z}) - \underline{x}\|_2^2 = \mathbf{E}\{\|(\underline{V}\underline{A} - \underline{I})\underline{x} + \underline{v}\|_2^2 + \|\underline{V}\underline{\varepsilon}\|_2^2 + 2\langle \underline{V}^T(\underline{V}\underline{A} - \underline{I})\underline{x} + \underline{V}^T\underline{v}, \underline{\varepsilon} \rangle_2\}$ . Dabei wird der Erwartungswert über alle möglichen zufälligen Vektoren  $\underline{\varepsilon}$  gebildet. Aufgrund der Beziehungen (4.127) und (4.133) – (4.136) erhält man daraus schließlich

$$\mathbf{E}\|\hat{\underline{x}}(\underline{z}) - \underline{x}\|_2^2 = \|(\underline{V}\underline{A} - \underline{I})\underline{x} + \underline{v}\|_2^2 + \text{spur}(\underline{V}\underline{C}\underline{V}^T). \quad (4.137)$$

Wir betrachten zuerst nur **erwartungstreue** affin lineare Schätzungen mit  $\mathbf{E} \hat{\underline{x}}(\underline{z}) = \underline{x}$  für alle  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ . Wegen

$$\mathbf{E} \hat{\underline{x}}(\underline{z}) = \underline{V} \underline{A} \underline{x} + \underline{v} + \mathbf{E} \underline{V} \underline{\varepsilon} = \underline{V} \underline{A} \underline{x} + \underline{v} + \underline{V} \mathbf{E} \underline{\varepsilon} = \underline{V} \underline{A} \underline{x} + \underline{v}$$

setzt dies  $\underline{V} \underline{A} = \underline{I}$  und  $\underline{v} = \underline{0}$  voraus. Unter diesen Schätzungen wollen wir den mittleren quadratischen Fehler  $\mathbf{E} \|\hat{\underline{x}}(\underline{z}) - \underline{x}\|_2^2$  minimieren. Mit  $\text{rang}(\underline{A}) = n$  und regulärer Kovarianzmatrix  $\underline{C}$  ist (s. [HOF86, S. 123])

$$\hat{\underline{x}}_{blue}(\underline{z}) := \underline{V}_{blue} \underline{z} := (\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{z} \quad (4.138)$$

unter allen solchen Schätzungen die beste (englisch: best linear unbiased estimate) mit kleinstem Fehlererwartungswert

$$\mathbf{E} \|\hat{\underline{x}}_{blue}(\underline{z}) - \underline{x}\|_2^2 = \text{spur} \left( (\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A})^{-1} \right).$$

Für  $\underline{C}^{-1} = \underline{W}^T \underline{W}$  können wir die Schätzung  $\hat{\underline{x}}_{blue}$  als Lösung des gewichteten Kleinste-Quadrate-Problems

$$\|\underline{W}(\underline{A} \tilde{\underline{x}} - \underline{z})\|_2^2 = \min!, \quad \tilde{\underline{x}} \in \mathbb{R}^n$$

finden, das schon in Abschnitt 4.1.6 (s. Formel (4.111)) zur Anwendung kam. Leider sind diese unregulierten Kleinste-Quadrate-Lösungen und damit die Schätzungen  $\hat{\underline{x}}_{blue}$  für schlechtkonditionierte Matrizen  $\underline{A}$  sehr instabil. Sie liefern eine große Spur der Matrix  $(\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A})^{-1}$  und damit einen großen mittleren Schätzfehler.

Die Überwindung dieser Instabilität durch Regularisierung bedeutet hier, daß man die erwartungstreuen Schätzungen verläßt und eine Verzerrung (englisch: bias) erlaubt. Als gutartige Näherungen von  $\hat{\underline{x}}_{blue}$  verwendet man in diesem Sinne vorzugsweise **Ridge-Schätzungen**

$$\hat{\underline{x}}_M(\underline{z}) := \underline{V}_M \underline{z} := (\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{M})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{z}, \quad (4.139)$$

die auf symmetrischen positiv semidefiniten Matrizen  $\underline{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  basieren. Es ist offensichtlich, daß sich die regularisierte Lösung  $\underline{x}_\alpha$  (s. Formel (4.117)) der Tichonov-Regularisierung für  $\underline{C} = \sigma^2 \underline{I}$  und  $\underline{M} = \frac{\alpha}{\sigma^2} \underline{L}^T \underline{L}$  als spezielle Ridge-Schätzung erweist.

Ridge-Schätzungen spielen mit  $\underline{M} := \underline{B}^{-1}$  auch eine wichtige Rolle in **Bayesischen linearen Regressionsmodellen** (4.126), in denen die Lösung selbst als Realisierung eines zufälligen Vektors  $\underline{x}$  mit den Momenten

$$\mathbf{E} \underline{x} = \underline{\mu} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathbf{Cov} \underline{x} = \underline{B} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.140)$$

betrachtet wird. Dabei nehmen wir an, daß die zufälligen Vektoren  $\underline{\varepsilon}$  und  $\underline{x}$  **stochastisch unabhängig** sind und gehen von einer positiv definiten Kovarianzmatrix  $\underline{B}$  des zufälligen Vektors der potentiellen Lösungen  $\underline{x}$  aus. Als **Bayessches Risiko** bezeichnen wir den mittleren quadratischen Fehler  $\mathbf{E} \|\hat{\underline{x}}(\underline{z}) - \underline{x}\|_2^2$ , bei welchem der Erwartungswert sowohl über alle zufälligen Vektoren  $\underline{\varepsilon}$  als auch über alle zufälligen Vektoren  $\underline{x}$  gebildet wird. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von  $\underline{\varepsilon}$  und  $\underline{x}$  kann man für affin lineare Schätzungen (4.128) das Bayessche Risiko als Erwartungswert über alle Vektoren  $\underline{x}$  angewandt auf Formel (4.137) bilden und erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|\hat{\underline{x}}(\underline{z}) - \underline{x}\|_2^2 &= \mathbf{E} \|(\underline{V}\underline{A} - \underline{I})(\underline{x} - \underline{\mu}) + (\underline{V}\underline{A} - \underline{I})\underline{\mu} + \underline{v}\|_2^2 + \text{spur}(\underline{V}\underline{C}\underline{V}^T) = \\ &\mathbf{E} \|(\underline{V}\underline{A} - \underline{I})(\underline{x} - \underline{\mu})\|_2^2 + 2\mathbf{E} \langle (\underline{V}\underline{A} - \underline{I})(\underline{x} - \underline{\mu}), (\underline{V}\underline{A} - \underline{I})\underline{\mu} + \underline{v} \rangle_2 + \\ &\|(\underline{V}\underline{A} - \underline{I})\underline{\mu} + \underline{v}\|_2^2 + \text{spur}(\underline{V}\underline{C}\underline{V}^T). \end{aligned}$$

Für das Bayessche Risiko gilt dann mit den Beziehungen von Hilfssatz 4.5 wegen  $\mathbf{E}(\underline{x} - \underline{\mu}) = \underline{0}$  die Gleichung

$$\mathbf{E} \|\hat{\underline{x}}(\underline{z}) - \underline{x}\|_2^2 = \text{spur}((\underline{V}\underline{A} - \underline{I})\underline{B}(\underline{V}\underline{A} - \underline{I})^T + \underline{V}\underline{C}\underline{V}^T) + \|(\underline{V}\underline{A} - \underline{I})\underline{\mu} + \underline{v}\|_2^2. \quad (4.141)$$

Um das Bayessche Risiko (4.141) zu minimieren, wählt man  $\underline{v} := (\underline{I} - \underline{V}\underline{A})\underline{\mu}$  und löst das Optimierungsproblem

$$\text{spur}((\underline{V}\underline{A} - \underline{I})\underline{B}(\underline{V}\underline{A} - \underline{I})^T + \underline{V}\underline{C}\underline{V}^T) = \min!, \quad \underline{V} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (4.142)$$

d.h., es ist eine solche Matrix  $\underline{V} := \underline{V}_{st}$  zu finden, welche die Spur der Matrix  $(\underline{V}\underline{A} - \underline{I})\underline{B}(\underline{V}\underline{A} - \underline{I})^T + \underline{V}\underline{C}\underline{V}^T$  am kleinsten werden läßt. Dann ist  $\hat{\underline{x}}_{st}(\underline{z}) = \underline{\mu} + \underline{V}_{st}(\underline{z} - \underline{A}\underline{\mu})$  die optimale Bayessche Schätzung, die wir hier als **stochastische Regularisierung** bezeichnen wollen.

**Satz 4.7** *Die stochastische Regularisierung*

$$\hat{\underline{x}}_{st}(\underline{z}) := \underline{\mu} + \underline{V}_{st}(\underline{z} - \underline{A}\underline{\mu}) = \underline{\mu} + (\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{B}^{-1})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}^{-1} (\underline{z} - \underline{A}\underline{\mu}) \quad (4.143)$$

mit der Matrix

$$\underline{V}_{st} := (\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{B}^{-1})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}^{-1}$$

ist die eindeutig bestimmte affin lineare Schätzung (4.128) mit kleinstem Bayesschen Risiko

$$\mathbf{E} \|\hat{\underline{x}}_{st}(\underline{z}) - \underline{x}\|_2^2 = \text{spur} \left( (\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{B}^{-1})^{-1} \right). \quad (4.144)$$

Von der Gültigkeit des Satzes 4.7 wollen wir uns im folgenden überzeugen. Wir machen dazu den Ansatz  $\underline{V} := \underline{V}_{st} + \underline{V}_{rest}$  mit  $\underline{V}_{st} := (\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{B}^{-1})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}^{-1}$  und zeigen, daß genau für  $\underline{V}_{rest} = \underline{0}$  (Nullmatrix) die Spur der Matrix

$$(\underline{V} \underline{A} - \underline{I}) \underline{B} (\underline{V} \underline{A} - \underline{I})^T + \underline{V} \underline{C} \underline{V}^T$$

minimal wird. Es ist

$$\begin{aligned} \text{spur}((\underline{V} \underline{A} - \underline{I}) \underline{B} (\underline{V} \underline{A} - \underline{I})^T + \underline{V} \underline{C} \underline{V}^T) &= \text{spur}((\underline{V}_{st} \underline{A} - \underline{I}) \underline{B} (\underline{V}_{st} \underline{A} - \underline{I})^T) + \\ &\text{spur}(\underline{V}_{st} \underline{C} \underline{V}_{st}^T + \underline{V}_{rest} (\underline{A} \underline{B} \underline{A}^T + \underline{C}) \underline{V}_{rest}^T), \end{aligned}$$

denn es gilt wegen (4.129)

$$\begin{aligned} &\text{spur}((\underline{V}_{rest} \underline{A} \underline{B} (\underline{V}_{st} \underline{A} - \underline{I})^T + (\underline{V}_{st} \underline{A} - \underline{I}) \underline{B} \underline{A}^T \underline{V}_{rest}^T) + \\ &\text{spur}(\underline{V}_{st} \underline{C} \underline{V}_{rest}^T + \underline{V}_{rest} \underline{C} \underline{V}_{st}^T) = 2 \text{spur}((\underline{V}_{st} \underline{A} - \underline{I}) \underline{B} \underline{A}^T + \underline{V}_{st} \underline{C}) \underline{V}_{rest}^T) = \underline{0}, \end{aligned}$$

da die Matrix

$$(\underline{V}_{st} \underline{A} - \underline{I}) \underline{B} \underline{A}^T + \underline{V}_{st} \underline{C} = -(\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{B}^{-1})^{-1} \underline{A}^T + (\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{B}^{-1})^{-1} \underline{A}^T$$

verschwindet. Nun ist mit  $\underline{V}_{st} \underline{A} - \underline{I} = -(\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{B}^{-1})^{-1} \underline{B}^{-1}$

$$\begin{aligned} &\text{spur}((\underline{V}_{st} \underline{A} - \underline{I}) \underline{B} (\underline{V}_{st} \underline{A} - \underline{I})^T + \underline{V}_{st} \underline{C} \underline{V}_{st}^T) = \\ &\text{spur}\left((\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{B}^{-1})^{-1} \underline{B}^{-1} (\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{B}^{-1})^{-1}\right) + \\ &\text{spur}\left((\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{B}^{-1})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} (\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{B}^{-1})^{-1}\right) = \\ &\text{spur}\left((\underline{A}^T \underline{C}^{-1} \underline{A} + \underline{B}^{-1})^{-1}\right). \end{aligned}$$

Die betrachtete Gesamtspur wird am kleinsten, wenn  $\underline{V}_{rest}$  den Wert

$$\text{spur}(\underline{V}_{rest} (\underline{A} \underline{B} \underline{A}^T + \underline{C}) \underline{V}_{rest}^T)$$

minimiert. Da  $\underline{A} \underline{B} \underline{A}^T + \underline{C}$  jedoch eine positiv definite Matrix darstellt, ist dies wegen Hilfssatz 4.4 (s. Formel (4.132)) genau dann der Fall, wenn wir  $\underline{V}_{rest} = \underline{0}$  und somit  $\underline{V} = \underline{V}_{st}$  setzen. Folglich gilt der Satz 4.7.

Man überlegt sich leicht, daß  $\hat{\underline{x}}_{st}$  auch das Optimierungsproblem

$$\langle \underline{C}^{-1} (\underline{A} \tilde{\underline{x}} - \underline{z}), \underline{A} \tilde{\underline{x}} - \underline{z} \rangle_2 + \langle \underline{B}^{-1} (\tilde{\underline{x}} - \underline{\mu}), \tilde{\underline{x}} - \underline{\mu} \rangle_2 = \min!, \quad \tilde{\underline{x}} \in \mathbb{R}^n \quad (4.145)$$

löst. Mit  $\underline{C}^{-1} = \underline{W}^T \underline{W}$  und der Sympathiefunktion

$$\Omega(\tilde{\underline{x}}) = \langle \underline{B}^{-1} (\tilde{\underline{x}} - \underline{\mu}), \tilde{\underline{x}} - \underline{\mu} \rangle_2 = (\tilde{\underline{x}} - \underline{\mu})^T \underline{B}^{-1} (\tilde{\underline{x}} - \underline{\mu})$$

kann die stochastische Regularisierung als Lösung des regularisierten gewichteten Kleinste-Quadrate-Problems

$$\|\underline{W}(\underline{A}\tilde{x} - \underline{z})\|_2^2 + \Omega(\tilde{x}) = \min!, \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

geschrieben werden (s. Formel (2.81) in Abschnitt 2.3.1). Es ist dabei sehr bemerkenswert, daß sich im Bayesschen Modell die optimale Gewichtsmatrix  $\underline{W}$  und die optimale Sympathiefunktion  $\Omega$  aus Momenten der zufälligen Vektoren  $\underline{x}$  und  $\underline{z}$  automatisch ergeben. Somit besteht bei der stochastischen Regularisierung keine Notwendigkeit der Wahl von Regularisierungsparametern. Allerdings müssen der Vektor  $\underline{\mu}$  sowie die Matrizen  $\underline{B}$  und  $\underline{C}$  in der Praxis meist empirisch aus Stichprobendaten geschätzt werden (s. [HOF86, S. 140ff]).

### 4.3 Die Anwendung der Tichonov-Regularisierung auf nichtlineare Operatorgleichungen

Zum Ende des Buches kehren wir noch einmal zu den schon in Abschnitt 3.2 betrachteten **nichtlinearen Identifikationsproblemen**

$$F(x) = y, \quad x \in D \subseteq X, \quad y \in Y \quad (4.146)$$

in den unendlichdimensionalen separablen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  zurück. Unser Ziel besteht dieses Mal in der Übertragung der im Abschnitt 4.1.2 für lineare inverse Aufgaben eingeführten **Methode der Tichonov-Regularisierung** auf den Fall nichtlinearer inkorrektur Operatorgleichungen. Wir gehen dabei von einem **konvexen** Definitionsbereich  $D \subseteq X$  und einem nichtlinearen Operator  $F : D \subseteq X \rightarrow Y$  aus, der **stetig** und **schwach abgeschlossen** sein soll sowie für alle  $x \in D$  eine **Fréchet-Ableitung**  $F'(x)$  besitzen möge. Zur exakten rechten Seite  $y \in Y$  existiere wenigstens ein Lösungselement  $x_0 \in D$  mit  $F(x_0) = y$ . Im Sinne von Definition 2.4 suchen wir dann nach **x\*-Minimum-Norm-Lösungen**  $x_{mn} = x_{mn}(y) \in D$  der Operatorgleichung (4.146) zu einem gegebenen Referenzelement  $x^* \in X$  mit  $F(x_{mn}) = y$  und

$$\|x_{mn} - x^*\|_X = \min \{ \|x - x^*\|_X : F(x) = y, x \in D \}. \quad (4.147)$$

Die nach Tichonov regularisierten Lösungen  $x_\alpha^\delta \in D$  werden dabei ausgehend von gestörten Daten  $y_\delta \in Y$  mit

$$\|y_\delta - y\|_Y \leq \delta \quad (4.148)$$

als Lösungen des **regularisierten Kleinste-Quadrate-Problems**

$$T_\alpha(x) := \|F(x) - y_\delta\|_Y^2 + \alpha \|x - x^*\|_X^2 = \min!, \quad x \in D \quad (4.149)$$

zu einem positiven **Regularisierungsparameter**  $\alpha > 0$  konstruiert. Wir betrachten weiter unten Eigenschaften dieser regularisierten Lösungen  $x_\alpha^\delta$  als stabile Näherungslösungen für  $x^*$ -Minimum-Norm-Lösungen  $x_{mn}$  des nichtlinearen inversen Problems und verweisen in diesem Zusammenhang auf die Arbeiten [EKN89] und [SEVO89], denen die Theorie der Tichonov-Regularisierung für nichtlineare inkorrekte Aufgaben ihr Fundament verdankt.

Um das in unendlichdimensionalen Räumen formulierte nichtlineare Extremalproblem (4.149) numerisch behandeln zu können, diskretisiert man das Tichonov-Funktional  $T_\alpha(x)$  in geeigneter Weise und löst dann die entstehenden gut-konditionierten nichtlinearen Optimierungsaufgaben im endlichdimensionalen Raum. Der in Abschnitt 4.2 für den linearen Fall aufgezeigte alternative Weg der Diskretisierung von (4.146) zu einem **nichtlinearen Gleichungssystem** (2.85) mit anschließender Tichonov-Regularisierung ist aber ebenfalls gangbar. Wir demonstrieren ihn kurz am Beispiel der **Selbstfaltungsgleichung** (s. Beispiel 2.6)

$$[F(x)](s) := \int_0^s x(s-t)x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (4.150)$$

im Hilbertraum  $X := Y := L^2(0,1)$ . Dazu unterteilen wir das Einheitsintervall  $[0,1]$  in  $n$  Teilintervalle  $I_j := [s_{j-1}, s_j]$  mit Randpunkten  $s_j := \frac{j}{n}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) und Mittelpunkten  $t_i := \frac{i-\frac{1}{2}}{n}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Die Integrale

$$y(s_j) = \int_0^{s_j} x(s_j-t)x(t) dt$$

lassen sich dann mit Hilfe der Rechteckregel unter Verwendung von Funktionswerten in den Mittelpunkten der Teilintervalle durch die Summen

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^j x(s_j - t_i) x(t_i)$$

annähern. Da aber im Raum  $L^2(0,1)$  Funktionswerte nicht punktweise definiert sind, substituiert man  $y(s_j)$  wie auch  $x(t_i)$  durch gewichtete Durchschnitte  $\underline{y}_j := \int_{I_j} w_1(t) y(t) dt$  bzw.  $\underline{x}_i := \int_{I_i} w_2(t) x(t) dt$  auf der Grundlage geeigneter nichtnegativer Gewichtsfunktionen  $w_1$  und  $w_2$  mit  $\int_{I_j} w_1(t) dt = \int_{I_i} w_2(t) dt = 1$ . Verwendet man  $\underline{x} = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{y} = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)^T \in \mathbb{R}^n$  und

$$\underline{F}(\underline{x}) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^j \underline{x}_{j+1-i} \underline{x}_i, \quad (4.151)$$



so läßt sich die inkorrekte nichtlineare Integralgleichung (4.150) durch das entsprechende schlechtkonditionierte nichtlineare Gleichungssystem

$$\underline{F}(\underline{x}) = \underline{y}, \quad \underline{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^n \quad (4.152)$$

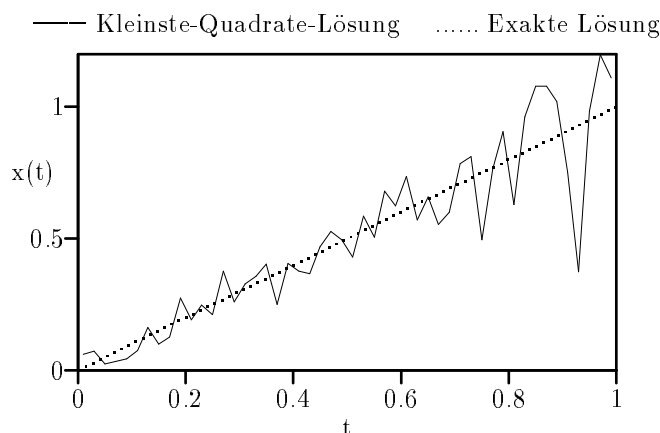
annähern, wobei

$$D := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$$

als Definitionsbereich betrachtet werden soll, um negative Lösungen auszuschließen. Die auf der Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems

$$T_\alpha(\underline{x}) := \|\underline{F}(\underline{x}) - \underline{y}_\delta\|_2^2 + \alpha \|\underline{x} - \underline{x}^*\|_2^2 = \min!, \quad \underline{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n \quad (4.153)$$

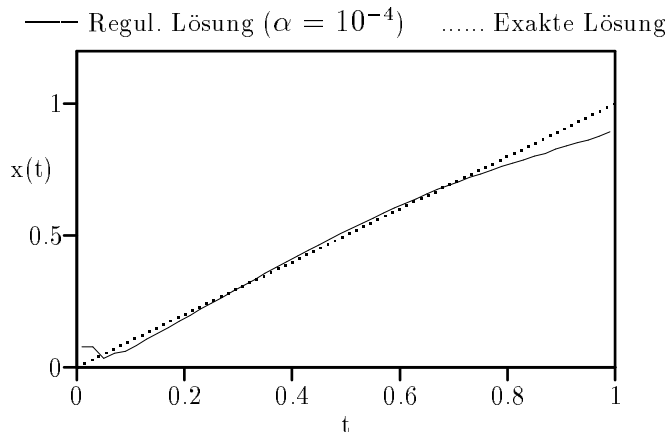
beruhende Tichonov-Regularisierung liefert dann für einen Referenzvektor  $\underline{x}^*$  und genügend großes  $\alpha > 0$  wieder stabile Näherungslösungen  $\underline{x}_\alpha^\delta$  von (4.152).



**Bild 4.9** Unregularisierte Lösung der Selbstfaltungsgleichung

Aufbauend auf den Vektoren  $\underline{x}_\alpha^\delta \in \mathbb{R}^n$  findet man in den Bildern 4.9 und 4.10 stückweise lineare Näherungslösungen  $x_\alpha^\delta \in L^2(0, 1)$  von (4.150) im Ergebnis einer Fallstudie für diesen Zugang zur Behandlung der Selbstfaltungsgleichung, wobei  $x_0(t) = t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) als exakte Lösung,  $n = 50$  als Diskretisierungsdimension und  $\underline{x}^* = \underline{0}$  als Referenzvektor angenommen werden. Die dabei verwendeten fehlerbehafteten Daten  $\underline{y}_\delta$  mit Fehlern im Prozentbereich  $\frac{\|\underline{y}_\delta - \underline{y}\|_2}{\|\underline{y}\|_2} \leq 0.01$  erzeugte ein Pseudozufallsgenerator. Das Bild 4.9 zeigt den oszillierenden Charakter der unregularisierten Kleinste-Quadrate-Lösung mit  $\alpha = 0$ . Die Fehler in der Lösung schaukeln sich mit wachsenden Argumenten  $t$  zunehmend auf. Wählt man andererseits günstige Regularisierungsparameter nach einem der

heuristischen Parameterwahlkriterien, z.B.  $\alpha = 10^{-4}$  in Bild 4.10, so stimmen regularisierte Lösung und exakte Lösung befriedigend überein. Meist ist dabei das Verhalten der regularisierten Lösung an den Intervallenden etwas schlechter als im mittleren Bereich des Definitionsintervalls der gesuchten Funktion.



**Bild 4.10** Optimal regularisierte Lösung der Selbstfaltungsgleichung

Wir kehren nun zur Tichonov-Regularisierung in unendlichdimensionalen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  zurück. Im Gegensatz zum unregularisierten Kleinste-Quadrate-Problem ist das regularisierte Gegenstück (4.149) für positive Werte  $\alpha$  stets lösbar.

**Hilfssatz 4.6** *Unter den in diesem Abschnitt formulierten Forderungen an den Operator  $F$  besitzt das regularisierte Kleinste-Quadrate-Problem (4.149) für alle  $y_\delta \in Y$  und  $\alpha > 0$  wenigstens ein Lösungselement  $x_\alpha^\delta \in D$ .*

Ist nämlich  $\{x_n\} \subset D$  eine Folge von Elementen mit  $T_\alpha(x_n) \leq \inf_{x \in D} T_\alpha(x) + \eta_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$ , dann sind  $\{\|F(x_n) - y_\delta\|_Y^2\}$  und  $\{\|x_n - x^*\|_X^2\}$  sowie folglich auch  $\{\|F(x_n)\|_Y\}$  und  $\{\|x_n\|_X\}$  beschränkte Folgen. Es gibt dann eine schwach konvergente Teilfolge  $x_{n_k} \rightharpoonup \bar{x} \in D$  mit  $F(x_{n_k}) \rightharpoonup \bar{y}$ . Wegen der schwachen Abgeschlossenheit von  $F$  gilt  $\bar{y} = F(\bar{x})$  und damit

$$\|\bar{x} - x^*\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x^*\|_X$$

sowie

$$\|F(\bar{x}) - y_\delta\|_Y \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|F(x_{n_k}) - y_\delta\|_Y.$$

Wegen  $T_\alpha(\bar{x}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} T_\alpha(x_n) = \inf_{x \in D} T_\alpha(x)$  ist dann  $\bar{x} = x_\alpha^\delta$  eine Lösung des Extremalproblems (4.149).

Mit den gleichen technischen Hilfsmitteln zeigt man die Stabilität der regularisierten Lösung  $x_\alpha^\delta$  bezüglich kleiner Störungen in den Daten. Wenn  $y_{\delta_n} \rightarrow y_{\delta_0}$  in  $Y$  gilt, so gibt es in der Folge regularisierter Lösungen  $\{x_{\alpha_n}^{\delta_n}\}$  eine in  $X$  konvergente Teilfolge, und das Grenzelement jeder solchen konvergenten Teilfolge ist eine regularisierte Lösung  $x_{\alpha_0}^{\delta_0}$ .

Im nächsten Satz behandeln wir die Konvergenz regularisierter Lösungen  $x_{\alpha(\delta)}^\delta$  gegen  $x^*$ -Minimum-Norm-Lösungen  $x_{m_n}$  für  $\delta \rightarrow 0$  bei geeigneter Apriori-Parameterwahl  $\alpha = \alpha(\delta)$ .

**Satz 4.8** *Wir wählen Regularisierungsparameter  $\alpha = \alpha(\delta)$  derart, daß*

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \delta \rightarrow 0 \quad (4.154)$$

*gelten. Dann hat unter den in diesem Abschnitt formulierten Forderungen an den Operator  $F$  für  $\delta_n \rightarrow 0$  jede Folge  $\{x_{\alpha_n}^{\delta_n}\}$  von Lösungen der Extremalprobleme (4.149) mit  $\delta := \delta_n$ ,  $\|y_{\delta_n} - y\|_Y \leq \delta_n$  und  $\alpha := \alpha_n = \alpha_n(\delta_n)$  eine in  $X$  konvergente Teilfolge, deren Grenzelement eine  $x^*$ -Minimum-Norm-Lösung  $x_{m_n}$  der Operatorgleichung (4.146) repräsentiert.*

Für den Beweis des Satzes 4.8 betrachten wir eine  $x^*$ -Minimum-Norm-Lösung  $x_{m_n}$  der Operatorgleichung (4.146). Dann gilt für die Elemente der Folge  $\{x_{\alpha_n}^{\delta_n}\}$  regularisierter Lösungen die Ungleichung

$$T_{\alpha_n}(x_{\alpha_n}^{\delta_n}) = \|F(x_{\alpha_n}^{\delta_n}) - y_{\delta_n}\|_Y^2 + \alpha_n \|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^*\|_X^2 \leq$$

$$T_{\alpha_n}(x_{m_n}) = \|F(x_{m_n}) - y_{\delta_n}\|_Y^2 + \alpha_n \|x_{m_n} - x^*\|_X^2 \leq \delta_n^2 + \alpha_n \|x_{m_n} - x^*\|_X^2,$$

aus welcher  $F(x_{\alpha_n}^{\delta_n}) \rightarrow y$  und folglich  $F(x_{\alpha_n}^{\delta_n}) - y$  in  $Y$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt. Ebenso ergibt sich daraus wegen (4.154)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^*\|_X \leq \|x_{m_n} - x^*\|_X$ .

Da nun  $\{x_{\alpha_n}^{\delta_n}\}$  beschränkt ist, haben wir eine schwach konvergente Teilfolge  $x_{\alpha_{n_k}}^{\delta_{n_k}} \rightharpoonup \bar{x} \in D$  für  $k \rightarrow \infty$ . Die schwache Abgeschlossenheit von  $F$  liefert dann  $F(\bar{x}) = y$ . Wegen  $x_{\alpha_{n_k}}^{\delta_{n_k}} - x^* \rightharpoonup \bar{x} - x^*$  ist

$$\|\bar{x} - x^*\|_X \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{\alpha_{n_k}}^{\delta_{n_k}} - x^*\|_X \leq \|x_{m_n} - x^*\|_X$$

und  $\bar{x}$  somit selbst  $x^*$ -Minimum-Norm-Lösung der Operatorgleichung (4.146). Damit gilt die Aussage von Satz 4.8.

Abschließend wollen wir noch die Frage beantworten, ob auch bei nichtlinearen Problemen **Konvergenzraten** für die Tichonov-Regularisierung erreichbar sind. Wir erinnern in diesem Zusammenhang an die Sätze 4.4 und 4.5 für den linearen Fall, wollen hier aber nur die spezielle Apriori-Parameterwahl  $\alpha \sim \delta$  näher betrachten. Wie im linearen kommen Konvergenzraten auch im nichtlinearen Fall nicht ohne **Quelldarstellungen** der Lösung aus. Im Hintergrund steht wohl die Tatsache, daß man die lokale Korrektheit erzwingen kann, indem man den Definitionsbereich  $D$  einer lokal inkorrekten nichtlinearen inversen Aufgabe auf Elemente einschränkt, die Quelldarstellungen befriedigen (s. Satz 3.9).

**Satz 4.9** *Es sei  $x_{mn}$  eine  $x^*$ -Minimum-Norm-Lösung der nichtlinearen Operatorgleichung (4.146) mit*

$$\|F'(x) - F'(x_{mn})\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq L \|x - x_{mn}\|_X \quad \text{für alle } x \in D. \quad (4.155)$$

*Dann gilt unter den in diesem Abschnitt formulierten Forderungen an den Operator  $F$  für eine Apriori-Parameterwahl  $\alpha = \alpha(\delta) \sim \delta$  die Fehlerabschätzung*

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq C \sqrt{\delta} \quad (4.156)$$

*für eine Konstante  $C > 0$ , falls  $x_{mn}$  eine Quelldarstellung der Gestalt*

$$x_{mn} - x^* = F'(x_{mn})^* w \quad (w \in Y) \quad (4.157)$$

*mit*

$$L \|w\|_Y < 1 \quad (4.158)$$

*befriedigt.*

Die Aussage von Satz 4.9 beruht wieder auf der Ungleichung

$$T_\alpha(x_\alpha^\delta) = \|F(x_\alpha^\delta) - y_\delta\|_Y^2 + \alpha \|x_\alpha^\delta - x^*\|_X^2 \leq T_\alpha(x_{mn}) \leq \delta^2 + \alpha \|x_{mn} - x^*\|_X^2,$$

welche

$$\|F(x_\alpha^\delta) - y_\delta\|_Y^2 + \alpha \|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X^2 \leq \delta^2 + \alpha (\|x_{mn} - x^*\|_X^2 + \|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X^2 - \|x_\alpha^\delta - x^*\|_X^2) = \delta^2 + 2\alpha \langle x_{mn} - x^*, x_{mn} - x_\alpha^\delta \rangle_Y$$

nach sich zieht. Wegen (4.155) erhält man

$$\|F(x_\alpha^\delta) - F(x_{mn}) - F'(x_{mn})(x_\alpha^\delta - x_{mn})\|_Y \leq \frac{L}{2} \|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X^2$$

und damit unter Berücksichtigung der Quelldarstellung (4.157)

$$\begin{aligned} \|F(x_\alpha^\delta) - y_\delta\|_Y^2 + \alpha \|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X^2 &\leq \delta^2 + 2\alpha \langle w, F'(x_{mn})(x_{mn} - x_\alpha^\delta) \rangle_Y \leq \\ \delta^2 + 2\alpha \langle w, (y - y_\delta) + (y_\delta - F(x_\alpha^\delta)) + (F(x_\alpha^\delta) - F(x_{mn}) - F'(x_{mn})(x_\alpha^\delta - x_{mn})) \rangle_Y &\leq \\ \delta^2 + 2\alpha \delta \|w\|_Y + 2\alpha \|w\|_Y \|F(x_\alpha^\delta) - y_\delta\|_Y + \alpha L \|w\|_Y \|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X^2. \end{aligned}$$

Dies wiederum liefert die Ungleichung

$$(\|F(x_\alpha^\delta) - y_\delta\|_Y - \alpha \|w\|_Y)^2 + \alpha (1 - L \|w\|_Y) \|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X^2 \leq (\delta + \alpha \|w\|_Y)^2$$

und schließlich wegen (4.158)

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq \frac{\delta + \alpha \|w\|_Y}{\sqrt{\alpha} \sqrt{1 - L \|w\|_Y}}.$$

Daraus erhält man mit  $\alpha(\delta) \sim \delta$  bzw.  $\underline{C}\delta \leq \alpha(\delta) \leq \overline{C}\delta$  für alle betrachteten  $\delta > 0$

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq \frac{\delta + \overline{C} \|w\|_Y \delta}{\sqrt{\delta} \sqrt{\underline{C}} \sqrt{1 - L \|w\|_Y}} \leq C \sqrt{\delta}.$$

Dies entspricht einer Fehlerabschätzung (4.156). Dabei ist es ausreichend, bei der Formulierung und beim Beweis von Satz 4.9 nur genügend kleine  $\delta > 0$  zu betrachten. Für die Lipschitz-Bedingung (4.155) reicht es, wenn sie in einer genügend großen Kugel um  $x_{mn}$  gilt. Aus den obigen Überlegungen wird außerdem deutlich, daß es nur eine  $x^*$ -Minimum-Norm-Lösung  $x_{mn}$  der Operatorgleichung (4.146) geben kann, welche die Voraussetzungen des Satzes 4.9 erfüllt.

Weitere Detailuntersuchungen zur Tichonov-Regularisierung nichtlinearer inkorrektur Operatorgleichungen, Aussagen zur A posteriori-Parameterwahl und Anwendungsbeispiele findet der interessierte Leser in [EHN96, Kap. 10]. Im Kapitel 11 des gleichen Buches werden außerdem die wichtigsten heute bekannten Ergebnisse zur iterativen Behandlung solcher nichtlinearer Probleme vorgestellt. Insbesondere findet man Aussagen zur Verallgemeinerung der in Abschnitt 4.1.3 vorgestellten Landweber-Iteration auf nichtlineare Probleme.

## Aufgaben

**Aufgabe 4.1** Zeigen Sie, daß für regularisierte Lösungen  $x_\alpha^\delta$  (s. Formel (4.22)) bei der Tichonov-Regularisierung einer unrestringierten linearen Operatorgleichung  $Ax = y$  mit vollstetigem Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  und  $\dim(R(A)) = \infty$  in separablen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  mit  $\psi(\alpha) := \|x_\alpha^\delta\|_X^2$  die Grenzwertbeziehungen

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \psi(\alpha) = 0 \quad \text{für alle } y_\delta \in Y$$

und

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi(\alpha) = \|A^\dagger y_\delta\|_X^2 \quad \text{für } y_\delta \in R(A) \oplus R(A)^\perp$$

sowie

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi(\alpha) = \infty \quad \text{für } y_\delta \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$$

gelten.

**Aufgabe 4.2** Unter den Voraussetzungen  $N(A^*) = \{\mathbf{0}\}$  und (4.32) sei  $x_{opt} \in X$  eine Lösung des restringierten Extremalproblems (4.34). Man weise nach, daß es dann einen Regularisierungsparameter  $\alpha > 0$  gibt, so daß  $x_{opt}$  auch eine nach Tichonov regularisierte Lösung  $x_\alpha^\delta$  mit  $T_\alpha(x_{opt}) \leq T_\alpha(x)$  für alle  $x \in X$  ist.

**Aufgabe 4.3** Zeigen Sie, daß für  $y_\delta \notin N(A^*)$  die in Formel (4.37) im Zusammenhang mit der Tichonov-Regularisierung einer linearen Operatorgleichung  $Ax = y$  bei vollstetigem Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  und  $\dim(R(A)) = \infty$  in separablen Hilberträumen  $X$  und  $Y$  eingeführte Funktion  $\hat{\varphi}(\beta) := \|Ax_{\frac{1}{\beta}}^\delta - y_\delta\|_Y^2 - \delta^2$  für alle  $\beta > 0$  stets monoton fallend und streng konvex ist.

**Aufgabe 4.4** Man zeige die Gültigkeit der Ungleichung (4.71) aus Abschnitt 4.1.3 für alle positiven reellen Zahlen  $\alpha$  und  $\sigma$ .

**Aufgabe 4.5** Man überzeuge sich von der Tatsache, daß die auf  $n$ -dimensionale Teilräume  $X_n = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$  eingeschränkte Methode der kleinsten Quadrate (4.74) für einen vollstetigen Operator  $A$  mit dem singulären System  $\{\sigma_j; u_j; v_j\}$  auf die Formel

$$x_n^\delta = \sum_{j=1}^n \frac{\langle y_\delta, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j$$

führt, die damit unter der Bedingung (4.73) mit der Darstellungsformel (4.57) der Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung übereinstimmt.

# Lösungen der Aufgaben

Zu den meisten Aufgaben werden vollständige Lösungen angegeben. Bei einigen wenigen Aufgaben wird der Lösungsweg nur kurz skizziert oder es werden Fragen formuliert, die noch einer Beantwortung bedürfen.

**2.1** Der Operator  $A : C[0, T] \rightarrow L^2(0, T)$  ist injektiv, d.h. die Hadamardsche Eindeutigkeitsbedingung (s. Definition 2.3) ist erfüllt, denn wir erhalten  $x(t) = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ) durch zweimaliges Differenzieren der Gleichung  $\int_0^s (s-t)x(t) dt = 0$  ( $0 \leq s \leq T$ ) nach der Variablen  $s$ . Als Spezialfall des Integraloperators (2.44) mit  $a = c = 0$ ,  $b = d = T$  und einer die Bedingung (2.43) erfüllenden Kernfunktion  $k(s, t) = s-t$  für  $0 \leq t \leq s \leq T$  sowie  $k(s, t) = 0$  für  $0 \leq s < t \leq T$  besitzt  $A$  wegen Hilfssatz 2.3 keinen abgeschlossenen Wertebereich. Es gilt also  $R(A) \neq \overline{R(A)}$ , und die betrachtete Operatorgleichung ist inkorrekt. Nach Folgerung 2.2 ist dann neben der Stabilitätsbedingung auch die Existenzbedingung verletzt.

**2.2** Wir betrachten den Ansatz  $u(\kappa, t) = K(\kappa) T(t)$ , welcher für die Differentialgleichung (2.61) auf eine Beziehung

$$\frac{T'(t)}{T(t)x(t)} = \frac{K''(\kappa)}{K(\kappa)} = -\lambda^2 < 0$$

führt. Dies liefert

$$K(\kappa) = c_1 \sin \lambda \kappa + c_2 \cos \lambda \kappa.$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (2.62) und der homogenen Randbedingungen (2.63) erhält man zusätzlich die Beziehungen  $\lambda = \pi$  sowie  $c_1 T(0) = 1$  und  $c_2 = 0$ . Aus

$$(\ln T(t))' = -\pi^2 x(t)$$

ergibt sich schließlich  $T(t) = T(0) \exp\left(-\pi^2 \int_0^t x(\eta) d\eta\right)$  und damit die Darstellung

$$u(\kappa, t) = \sin \pi \kappa \exp\left(-\pi^2 \int_0^t x(\eta) d\eta\right)$$

entsprechend der Formel (2.64).

**2.3** Wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erkennt man sofort die Stetigkeit der Funktion

$$f(s) = \int_0^s x(t) dt \quad (0 \leq s \leq T)$$

für alle  $x \in L^2(0, T)$ . Dann ist wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion auch  $[F(x)](s)$  ( $0 \leq s \leq T$ ) nach Formel (2.66) eine stetige Funktion. Mit den Ungleichungen  $\left| \int_0^s x(t) dt \right| \leq \sqrt{T} \|x\|_{L^2(0, T)} \leq \sqrt{T} K$  erhält man außerdem die expliziten Schranken

$$0 < c_0 \exp(-c_1 \sqrt{T} K) \leq [F(x)](s) \leq c_0 \exp(c_1 \sqrt{T} K) < \infty \quad (0 \leq s \leq T)$$

der Bildfunktion.

**2.4** Anstelle der in Bsp. 2.6 für den lokalen Inkorrektheitsbeweis zum Selbstfaltungoperator  $F : D \subset L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$  angegebenen Folge  $\{x_n\}$  können wir im Falle des in dieser Aufgabe definierten erweiterten Operators  $F : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 2)$  für alle Punkte  $x_0 \in D$  die für positive natürliche Zahlen  $n$  definierte Folge  $x_n = x_0 + p_n \in \bar{B}_r^D(x_0)$  mit der Funktion  $p_n(t) = r \sqrt{\frac{2}{n}} t^{\frac{1}{n} - \frac{1}{2}}$  ( $0 < t \leq 1$ ) verwenden. Die Funktionen  $p_n \in L^2(0, 1)$  mit  $\|p_n\|_{L^2(0, 1)} = r$  besitzen bei  $t = 0$  eine Polstelle, deren Stärke mit  $n$  zunimmt. Für die zugehörige Bildfolge  $F(x_n)$  gilt nun aber auch hier  $\|F(x_n) - F(x_0)\|_{L^2(0, 2)} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , woraus sich die lokale Inkorrekttheit ergibt. Diese Konvergenz der Bildfolge beruht auf der Tatsache, daß es eine Konstante  $C > 0$  gibt mit

$$\|F(p_n)\|_{L^2(0, 2)} \leq \sqrt{2} \|F(p_n)\|_{C[0, 2]} \leq \frac{Cr^2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

sowie auf der schwachen Konvergenz  $p_n \rightharpoonup \mathbf{0}$  in  $L^2(0, 1)$ .

**2.5** Wir zeigen, daß in beiden Räumen nicht jede unendliche Teilmenge von  $D$  eine konvergente Folge enthält. Dazu genügt es zum Beispiel, die Funktionenfolge

$$x_n(t) = \cos(n\pi t) \quad (0 \leq t \leq 1; n = 1, 2, \dots)$$

aus  $D$  zu betrachten. Wegen

$$\int_0^1 \cos(n\pi t) \cos(m\pi t) dt = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad \text{und} \quad \int_0^1 (\cos(n\pi t))^2 dt = \frac{1}{2}$$

gilt  $\|x_n - x_m\|_{L^2(0, 1)} = 1$  für alle Paare voneinander verschiedener natürlicher Zahlen  $n$  und  $m$ . Daher kann diese Funktionenfolge  $\{x_n\}$  keine Cauchyfolge und damit auch keine konvergente Folge in  $L^2(0, 1)$  sein. Aus der Beziehung  $\|x_n - x_m\|_{L^2(0, 1)} \leq \sqrt{2} \|x_n - x_m\|_{C[0, 1]}$  folgt eben diese Eigenschaft auch für den Raum  $C[0, 1]$ .

**3.1** Wegen  $Y = \overline{R(A)} \oplus \overline{R(A)}^\perp$  kann man  $y \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$  in eindeutiger Weise in  $y = y_0 + y_{ort}$  mit  $y_0 \in \overline{R(A)}$  und  $y_{ort} \in R(A)^\perp = N(A^*)$  zerlegen. Offensichtlich muß dann  $y_0 \notin R(A)$  gelten. Nun erhalten wir mit

$$J(x) = \|Ax - y\|_Y^2 = \|Ax - y_0\|_Y^2 + \|y_{ort}\|_Y^2$$



die Beziehung  $\inf_{x \in X} J(x) = \|y_{ort}\|_Y^2 \geq 0$ , da  $y_0$  in der Abschließung von  $R(A)$  liegt und es daher eine unendliche Folge  $\{x_n\} \subset X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - y_0\|_Y = 0$  gibt. Jedoch kann es wegen  $y_0 \notin R(A)$  kein Element  $x_{mn} \in X$  mit  $\|Ax_{mn} - y\|_Y = \|y_{ort}\|_Y$  bzw. damit gleichwertig  $\|Ax_{mn} - y_0\|_Y = 0$  geben. Es existieren für solche Elemente  $y \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$  somit keine Minimum-Norm-Lösungen. Bildelemente  $A^\dagger y$  der Moore-Penrose-Inversen  $A^\dagger$  sind zu diesen  $y$  nicht sinnvoll erklärbar.

**3.2** Mit  $\text{rang}(\underline{A}) = m$  repräsentiert die Matrix  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  einen surjektiven linearen Operator  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , der die Beziehung  $R(\underline{A}) = \mathbb{R}^m$  erfüllt. Es gilt dann wegen  $R(\underline{A}) \oplus N(\underline{A}^T) = \mathbb{R}^m$  auch  $N(\underline{A}^T) = N(\underline{A}\underline{A}^T) = \{\mathbf{0}\}$ , und die zusammengesetzte Matrix  $\underline{A}\underline{A}^T$  ist regulär. Für alle  $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$  gibt es dann einen Vektor  $\underline{\tilde{x}} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\underline{A}\underline{\tilde{x}} = \underline{y}$ . Auf der Basis von  $R(\underline{A}^T) \oplus N(\underline{A}) = \mathbb{R}^n$  existiert eine Zerlegung  $\underline{\tilde{x}} = \underline{A}^T \underline{\tilde{y}} + \underline{x}_0$  mit  $\underline{\tilde{y}} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\underline{x}_0 \in N(\underline{A})$ ,  $\underline{y} = \underline{A}\underline{\tilde{x}} = \underline{A}\underline{A}^T \underline{\tilde{y}}$  sowie schließlich  $\underline{\tilde{y}} = (\underline{A}\underline{A}^T)^{-1} \underline{y}$ . Wegen  $\langle \underline{A}^T \underline{\tilde{y}}, \underline{x}_0 \rangle_2 = 0$  gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\|\underline{\tilde{x}}\|_2^2 = \|\underline{A}^T (\underline{A}\underline{A}^T)^{-1} \underline{y}\|_2^2 + \|\underline{x}_0\|_2^2.$$

Die Minimum-Norm-Lösung erhält somit die Form

$$\underline{x}_{mn} = \underline{A}^T (\underline{A}\underline{A}^T)^{-1} \underline{y},$$

wobei  $\underline{A}^\dagger = \underline{A}^T (\underline{A}\underline{A}^T)^{-1}$  hier die Pseudoinverse der Matrix  $\underline{A}$  darstellt.

**3.3** Mit Hilfe von Eigenschaften der Fouriertransformation beweist man die Eindeutigkeit der Lösung einer solchen Gleichung für den Fall, daß  $Y$  als Hilbertraum  $L^2(-\infty, \infty)$  (s. Abschn. 4.1.5) der auf ganz  $\mathbb{R}$  quadratisch integrierbaren Funktionen gewählt wird, man also  $y(s)$  für  $-\infty < s < \infty$  beobachten kann. Dies würde bedeuten, daß das Flugzeug Gravitationsmessungen auf der gesamten Geraden ausführt, welche die betrachtete Strecke enthält. In der eingeschränkten Form (3.15) ergibt sich daraus die Eindeutigkeit von Lösungen der Integralgleichung, wenn die Kenntnis der Funktionswerte  $y(s)$  im Intervall  $s \in [0, L]$  ausreicht, um alle Werte  $y(s)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) zu bestimmen. Man überlege sich, ob eine solche Fortsetzung der Funktion  $y$  gelingt!

**3.4** Als Folgerung von Hilfssatz 3.2 ist ein beschränkter linearer Operator  $A$  vollstetig, wenn aus der schwachen Konvergenz  $x_n \rightharpoonup \mathbf{0}$  einer Folge gegen das Nullelement stets die entsprechende starke Konvergenz  $Ax_n \rightarrow \mathbf{0}$  der Bildfolge resultiert. Falls  $B$  vollstetig ist, folgt also aus  $x_n \rightharpoonup \mathbf{0}$  die starke Konvergenz  $Bx_n \rightarrow \mathbf{0}$  und daraus wegen  $\|Ax_n\|_Y \leq C \|Bx_n\|_Z$  wiederum  $Ax_n \rightarrow \mathbf{0}$ . Seien nun  $\{\sigma_n\}$  und  $\{\tilde{\sigma}_n\}$  die Singulärwertfolgen der vollstetigen Operatoren  $A$  und  $B$ . Dann gilt

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leq C \frac{\|Bx\|_Z}{\|x\|_X} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Da diese Ungleichungsrelation bei Minimierung und Maximierung über gewisse Mengen von Elementen  $x$  unverändert bleibt, erhalten wir die für alle  $n \in \mathbb{N}$  gültige

Abschätzung

$$\sigma_n = \max_{X_n \subset X} \min_{x \in X_n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leq C \max_{X_n \subset X} \min_{x \in X_n \setminus \{0\}} \frac{\|Bx\|_Z}{\|x\|_X} = C \tilde{\sigma}_n$$

und folglich

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_n} \leq \frac{C}{\sigma_n}.$$

Ist  $Ax = y$  höchstens inkorrekt vom Grade  $\nu$ , so gilt

$$\frac{1}{\sigma_n} \leq \bar{C} n^\nu$$

und damit

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}_n} \leq C \bar{C} n^\nu,$$

woraus diese Eigenschaft auch für die Operatorgleichung  $Bx = z$  folgt.

**3.5** Die Kernfunktion der Faltungsgleichung läßt sich in der Form

$$\kappa(\tau) = \begin{cases} 0 & (\tau = 0) \\ \exp\left(-\frac{1}{\tau}\right) & (0 < \tau \leq 1) \end{cases}$$

schreiben. Diese Funktion ist im abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  unendlich oft differenzierbar, und der Funktionswert sowie sämtliche Ableitungen verschwinden an der Stelle  $\tau = 0$ , d.h. es gilt  $\kappa \in C^\infty[0, 1]$  und  $\kappa(0) = \kappa'(0) = \kappa''(0) = \dots = \kappa^{(l)}(0) = \dots = 0$ . Wegen Satz 3.6 hat die Faltungsgleichung daher den Inkorrekttheitsgrad  $\infty$ .

**3.6** Es läßt sich vermuten, daß der in Formel (2.67) definierte Selbstfaltungsoperator  $F : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$  mit Ausnahme von  $x_0 \neq \mathbf{0}$  für kein  $x_0 \in L^2(0, 1)$  eine  $\eta$ -Bedingung (3.78) befriedigt. Die Vermutung besagt, daß mit  $r > 0$ ,  $\eta > 0$ ,  $x_0 \neq \mathbf{0}$  und  $h := x - x_0$  eine Ungleichung

$$\int_0^1 \left( \int_0^s h(s-t) h(t) dt \right)^2 ds \leq \eta^2 \int_0^1 \left( \int_0^s h(s-t) (2x_0(t) + h(t)) dt \right)^2 ds$$

niemals für alle Funktionen  $h \in L^2(0, 1)$  erfüllt sein kann, die der Normbedingung  $\|h\|_{L^2(0,1)} \leq r$  genügen. Obwohl eine derartige Fragestellung 1994 in [GOHO94] als offenes Problem formuliert wurde, scheint ein strenger Beweis für die Gültigkeit dieser Vermutung bisher nicht ausgeführt worden zu sein.

**4.1** Wegen  $\alpha \|x_\alpha^\delta\|_X^2 \leq T_\alpha(x_\alpha^\delta) \leq T_\alpha(\mathbf{0}) = \|y_\delta\|_Y^2$  gilt  $\psi(\alpha) = \|x_\alpha^\delta\|_X^2 \leq \frac{\|y_\delta\|_Y^2}{\alpha} \rightarrow 0$  für  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Für  $y_\delta \in R(A) \oplus R(A)^\perp$  liefern die aus (4.22) und (3.27) folgenden Reihenbeziehungen

$$\|x_\alpha^\delta\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{(\sigma_j^2 + \alpha)^2} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_j^2} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 = \|A^\dagger y_\delta\|_X^2 < \infty$$

nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium für Reihen die Berechtigung zur Vertauschung von Summation und Grenzwertbildung für  $\alpha \rightarrow 0$ . Dann gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sigma_j^2}{(\sigma_j^2 + \alpha)^2} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 = \|A^\dagger y_\delta\|_X^2.$$

Die dritte Grenzwertbeziehung der Aufgabe zeigt man indirekt. Gäbe es im Fall  $y_\delta \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$  eine Folge von Regularisierungsparametern  $\alpha_n \rightarrow 0$  mit  $\|x_{\alpha_n}\|_X^2 \leq C < \infty$ , so existierte eine schwach konvergente Teilfolge regularisierter Lösungen  $x_{\alpha_{n_k}} \rightharpoonup \bar{x} \in X$ . Nach Hilfssatz 3.2 gilt wegen der Vollstetigkeit von  $A$  dann die starke Konvergenz  $Ax_{\alpha_{n_k}} \rightarrow A\bar{x} \in Y$ . Aus  $A^*Ax_{\alpha_{n_k}} + \alpha_{n_k}x_{\alpha_{n_k}} = A^*y_\delta$  folgt für  $k \rightarrow \infty$   $A^*A\bar{x} = A^*y_\delta$ . Dies ist aber ein Widerspruch, da die Normalgleichung (4.17) für  $y_\delta \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$  keine Lösung besitzen kann.

**4.2** Unter den gegebenen Voraussetzungen existiert ein eindeutig bestimmter Regularisierungsparameter  $\alpha_{dis} > 0$ , so daß die regularisierte Lösung  $x_{\alpha_{dis}}$  dem Diskrepanzprinzip mit  $\|Ax_{\alpha_{dis}} - y_\delta\|_Y = \delta$  genügt. Dann muß  $\|x_{opt}\|_X \leq \|x_{\alpha_{dis}}\|_X$  und damit

$$\begin{aligned} T_{\alpha_{dis}}(x_{opt}) &= \|Ax_{opt} - y_\delta\|_Y^2 + \alpha_{dis}\|x_{opt}\|_X^2 \leq \delta^2 + \alpha_{dis}\|x_{\alpha_{dis}}\|_X^2 \\ &= \|Ax_{\alpha_{dis}} - y_\delta\|_Y^2 + \alpha_{dis}\|x_{\alpha_{dis}}\|_X^2 = T_{\alpha_{dis}}(x_{\alpha_{dis}}) \leq T_{\alpha_{dis}}(x) \quad \text{für alle } x \in X \end{aligned}$$

gelten. Da die regularisierte Lösung  $x_{\alpha_{dis}}$  eindeutig bestimmt ist, haben wir aber offenbar  $x_{opt} = x_{\alpha_{dis}}$ .

**4.3** Unter Ausnutzung der Singulärwertzerlegung des vollstetigen Operators  $A$  erhält man die absolut konvergente Reihendarstellung

$$\hat{\varphi}(\beta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{\beta^2}}{(\sigma_j^2 + \frac{1}{\beta})^2} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta\sigma_j^2 + 1)^2} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2,$$

die man gliedweise zweimal nach  $\beta$  differenzieren darf. Wegen  $y_\delta \notin N(A^*)$  ist wenigstens einer der Summanden von Null verschieden. Daraus ergibt sich mit

$$\hat{\varphi}'(\beta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2\sigma_j^2}{(\beta\sigma_j^2 + 1)^3} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 < 0$$

ein streng monotonen Fallen der Funktion  $\hat{\varphi}(\beta)$  und mit

$$\hat{\varphi}''(\beta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{6\sigma_j^4}{(\beta\sigma_j^2 + 1)^4} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 > 0$$

die strenge Konvexität der Funktion  $\hat{\varphi}(\beta)$ .

4.4 Wir setzen  $\beta := \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}} > 0$  und zeigen die Gültigkeit der zu (4.71) äquivalenten Ungleichung

$$\varphi_1(\beta) := 1 - \exp(-\beta^2) \leq \varphi_2(\beta) := \beta$$

für alle positiven reellen Zahlen  $\beta$ . Wegen  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$  und der Stetigkeit sowie Differenzierbarkeit der Funktionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  für  $\beta \geq 0$  genügt es zu zeigen, daß

$$0 < \varphi_1'(\beta) = 2\beta \exp(-\beta^2) \leq \varphi_2'(\beta) = 1$$

für alle positiven Zahlen  $\beta$  gilt. Nun nimmt  $\varphi_1'(\beta)$  mit  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \varphi_1'(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \varphi_1'(\beta) = 0$  sein Maximum in einem Punkt  $\beta_0 > 0$  mit  $\varphi_1''(\beta_0) = 2 \exp(-\beta_0^2) - 4\beta_0^2 \exp(-\beta_0^2) = 0$  an. Daraus ergibt sich  $\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $\varphi_1'(\beta_0) = \sqrt{2} \exp(-\frac{1}{2}) = 0.857... < 1$ , womit die Gültigkeit der Ungleichung (4.71) gezeigt ist.

4.5 Mit  $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$  erhält man für das Defektnormquadrat

$$\|Ax - y_\delta\|_Y^2 = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j \sigma_j v_j - \sum_{j=1}^{\infty} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y v_j \right\|_Y^2 = \sum_{j=1}^n (\lambda_j \sigma_j - \langle y_\delta, v_j \rangle_Y)^2 + \sum_{n+1}^{\infty} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2.$$

Dieses wird minimal genau dann, wenn  $\lambda_j = \frac{\langle y_\delta, v_j \rangle_Y}{\sigma_j}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) gilt, woraus die Darstellung

$$x_n^\delta = \sum_{j=1}^n \frac{\langle y_\delta, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j$$

folgt.

## Literatur

- [ANG90] Anger, G.: Inverse Problems in Differential Equations. Berlin: Akademie Verlag 1990.
- [ANG93] Anger, G. et al. (Eds.): Inverse Problems: Principles and Applications in Geophysics, Technology and Medicine. Berlin: Akademie Verlag 1993.
- [ANG97] Anger, G.: Zur Leistungsfähigkeit der Theorie in den Naturwissenschaften, der Technik und der Medizin – praxis cum theoria. GAMM-Mitt. 20 (1997) 19 – 36.
- [BAGO94] Bakushinsky, A.; Goncharsky, A.: Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Dordrecht: Kluwer 1994.
- [BAKU89] Banks, H.; Kunisch, K.: Parameter Estimation Techniques for Distributed Systems. Boston: Birkhäuser 1989.
- [BAU87] Baumeister, J.: Stable Solution of Inverse Problems. Braunschweig: Vieweg 1987.
- [BBC85] Beck, J.V.; Blackwell, B.; Clair, C.S.: Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems. New York: Wiley 1985.
- [BEBO98] Bertero, M.; Boccacci, P.: Introduction to Inverse Problems in Imaging. Bristol: IOP Publishing 1998.
- [BRA87] Brakhage, H.: On ill-posed problems and the method of conjugate gradients. In: Inverse and Ill-posed Problems (Eds.: H.W. Engl and C.W. Groetsch). Orlando: Academic Press 1987, 165 – 175.
- [BRU95] Bruckner, G.: On the regularization of the ill-posed logarithmic kernel integral equation of the first kind. Inverse Problems 11 (1995) 65 – 77.
- [CHKU96] Chavent, G.; Kunisch, K.: On weakly nonlinear inverse problems. SIAM J. Appl. Math. 56 (1996) 542 – 572.
- [COKR92] Colton, D.; Kress, R.: Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Berlin: Springer 1992.
- [DEHA83] Deuffhard, P.; Hairer, E. (Eds.): Numerical Treatment of Inverse Problems in Differential and Integral Equations. Basel: Birkhäuser 1983.

- [DRKU96] Drábek, P.; Kufner, A.: Integralgleichungen. Leipzig: Teubner 1996.
- [ENG93] Engl, H.W.: Regularization methods for the stable solution of inverse problems. *Surv. Math. Ind.* 3 (1993) 71 – 143.
- [ENG97] Engl, H.W.: Integralgleichungen. Wien: Springer 1997.
- [EHN96] Engl, H.W.; Hanke, M.; Neubauer, A.: Regularization of Inverse Problems. Dordrecht: Kluwer 1996.
- [EKN89] Engl, H.W.; Kunisch, K.; Neubauer, A.: Convergence rates for Tikhonov regularization of nonlinear ill-posed problems. *Inverse Problems* 5 (1989) 523 – 540.
- [ELR96] Engl, H.W.; Louis, A.K.; Rundell, W. (Eds): Inverse Problems in Medical Imaging and Nondestructive Testing. Wien: Springer 1996.
- [FLO81] Floret, K.: Maß- und Integrationstheorie. Stuttgart: Teubner 1981.
- [FSS97] Freedon, W.; Schneider, F.; Schreiner, M.: Gradiometry – an inverse problem in modern satellite geodesy. In: *Inverse Problems in Geophysical Applications* (Eds.: H.W. Engl et al.). Philadelphia: SIAM 1997, 179 – 239.
- [GUW87] Gerlach, W.; Unger, F.; Wolfersdorf, L.von: On approximate computation of the heat flux of a body from the known surface temperature. *Z. Angew. Math. Mech.* 67 (1987) 241 – 247.
- [GORI94] Göpfert, A.; Riedrich, T.: Funktionalanalysis. Leipzig: Teubner 1994.
- [GOHO94] Gorenflo, R.; Hofmann, B.: On autoconvolution and regularization. *Inverse Problems* 10 (1994) 353 – 373.
- [GOVE91] Gorenflo, R.; Vessella, S.: Abel Integral Equations. Berlin: Springer 1991.
- [GRO84] Groetsch, C.W.: The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind. London: Pitman 1984.
- [GRO93] Groetsch, C.W.: Inverse Problems in the Mathematical Sciences. Braunschweig: Vieweg 1993.
- [GRRO92] Großmann, Ch.; Roos, H.-G.: Numerik partieller Differentialgleichungen. Stuttgart: Teubner 1992.

- [HAD23] Hadamard, J.: Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations. New Haven: Yale University Press 1923.
- [HAN98] Hansen, P.C.: Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems – Numerical Aspects of Linear Inversion. Philadelphia: SIAM 1998.
- [HREI96] Hao, Dinh Nho; Reinhardt, H.-J.: Recent contributions to linear inverse heat conduction problems. *J. Inv. Ill-Posed Probl.* 4 (1996) 23 – 32.
- [HOF86] Hofmann, B.: Regularization for Applied Inverse and Ill-Posed Problems. Leipzig: Teubner 1986.
- [HOF94] Hofmann, B.: On the degree of ill-posedness for nonlinear problems. *J. Inv. Ill-Posed Problems* 2 (1994) 61 – 76.
- [HOFM94] Hofmann, B.: Regularisierungsaspekte bei der Interpretation periodischer Daten. In: Beiträge zur Angewandten Analysis und Informatik (Ed.: E. Schock). Aachen: Shaker 1994, 136 – 147.
- [HOSR94] Hofmann, B.; Scherzer, O.: Factors influencing the ill-posedness of nonlinear problems. *Inverse Problems* 10 (1994) 1277 – 1297.
- [IOTI79] Ioffe, A.D.; Tichomirov, V.M.: Theorie der Extremalaufgaben. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979.
- [ISA90] Isakov, V.: Inverse Source Problems. Providence: American Mathematical Society 1990.
- [JAWO97] Janno, J.; Wolfersdorf, L.von: Identification of weakly singular memory kernels in heat conduction. *Z. Angew. Math. Mech.* 77 (1997) 243 – 257.
- [JIX98] Ji, X.: On matrix inverse eigenvalue problems. *Inverse Problems* 14 (1998) 275 – 285.
- [JOH48] John, F.: Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. In: Studies and Essays, pres. to R. Courant. New York: Wiley 1948, 187 – 204.
- [KATI94] Kaplan, A; Tichatschke, R.: Stable Methods for Ill-Posed Variational Problems. Berlin: Akademie Verlag 1994.
- [KIR96] Kirsch, A.: An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. New York: Springer 1996.

- [KRE89] Kress, R.: Linear Integral Equations. Berlin: Springer 1989.
- [KUN95] Kunisch, K.: Numerical methods for parameter estimation problems. In: Inverse Problems in Diffusion Processes (Eds.: H.W. Engl et al.). Philadelphia: SIAM 1995, 199 – 216.
- [LRS86] Lavrentev, M.M.; Romanov, V.G.; Shishatskii, S.P.: Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. Providence: American Mathematical Society 1986.
- [LEX86] Lexikon der Optimierung – Optimierung und optimale Steuerung. Berlin: Akademie Verlag 1986.
- [LEX91] Lexikon der Stochastik – Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik (5. Auflage). Berlin: Akademie Verlag 1991.
- [LIN85] Linz, P.: Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. Philadelphia: SIAM 1985.
- [LOU89] Louis, A.K.: Inverse und schlecht gestellte Probleme. Stuttgart: Teubner 1989.
- [LOU90] Louis, A.K.: Numerik inverser Probleme. GAMM-Mitt. 1 (1990) 5 – 27.
- [LMR94] Louis, A.K.; Maaß, P.; Rieder, A.: Wavelets – Theorie und Anwendungen. Stuttgart: Teubner 1998.
- [LUB95] Lübbig, H. (Ed.): The Inverse Problem. Symposium ad memoriam Hermann von Helmholtz. Berlin: Akademie Verlag 1995.
- [MOR84] Morozov, V.A.: Methods for Solving Incorrectly Posed Problems. New York: Springer 1984.
- [NAS87] Nashed, M.Z.: A new approach to classification and regularization of ill-posed operator equations. In: Inverse and Ill-posed Problems (Eds.: H.W. Engl and C.W. Groetsch). Orlando: Academic Press 1987, 53 – 75.
- [NATA61] Natanson, I.P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin: Akademie-Verlag 1961.
- [NAT85] Natterer, F.: Numerik des Radonschen Problems. Jahresber. Dtsch. Math.-ver. 87 (1985) 108 – 126.



- [NAT86] Natterer, F.: The Mathematics in Computerized Tomography. Stuttgart: Teubner 1986.
- [NEUB86] Neubauer, A.: Tikhonov-Regularization of Ill-Posed Linear Operator Equations on Closed Convex Sets. Wien: Verlag d. Wiss. Gesellschaften Österreichs 1986.
- [NEUM98] Neumaier, A.: Solving ill-conditioned and singular linear systems: A tutorial on regularization. *SIAM Review* 40 (1998) 636 – 666.
- [PLA95] Plato, R.: Iterative and parametric methods for linear ill-posed problems. Habilitationsschrift. Berlin: TU Berlin 1995.
- [POSZ54] Polya, G.; Szegő, G.: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I. Berlin: Springer 1954.
- [REI94] Reinhardt, H.-J.: Analysis of the discrete Beck method of solving ill-posed parabolic equations. *Inverse Problems* 10 (1994) 1345 – 1360.
- [SAB90] Sabatier, P. (Ed.): Inverse Methods in Action. Berlin: Springer 1990.
- [SCHE92] Scherzer, O.: The use of Tikhonov regularization in the identification of electrical conductivities from overdetermined boundary data. *Results Math.* 22 (1992), 598 – 618.
- [SCHO86] Schock, E.: What are the proper condition numbers of discretized ill-posed problems? *Lin. Alg. Appl.* 81 (1986) 129 – 136.
- [SCHW91] Schwetlick, H.: Nichtlineare Parameterschätzung: Modelle, Schätzkriterien und numerische Algorithmen. *GAMM-Mitt.* 2 (1991) 13 – 51.
- [SEI80] Seidman, T.I.: Nonconvergence results for the application of least-squares estimation to ill-posed problems. *J. Optim. Theory Appl.* 30 (1980) 535 – 547.
- [SEVO89] Seidman, T.I.; Vogel, C.R.: Well-posedness and convergence of some regularization methods for nonlinear ill-posed problems. *Inverse Problems* 5 (1989) 227 – 238.
- [SNI98] Snieder, R.: The role of nonlinearity in inverse problems. *Inverse Problems* 14 (1998) 387 – 404.

- [TAN97] Tanana, V.P.: Methods for Solution of Nonlinear Operator Equations. Utrecht: VSP 1997.
- [TAR87] Tarantola, A.: Inverse Problem Theory. Amsterdam: Elsevier 1987.
- [TAU94] Tautenhahn, U.: Regularisierungsverfahren für lineare und nichtlineare nichtkorrekte Aufgaben. Habilitationsschrift. Chemnitz: TU Chemnitz-Zwickau 1994.
- [TAU97] Tautenhahn, U.: Optimal stable approximations for the sideways heat equation. *J. Inv. Ill-Posed Probl.* 5 (1997) 287 – 307.
- [TTB95] TEUBNER-TASCHENBUCH der Mathematik, Teil II. Leipzig: Teubner 1995.
- [TIAR77] Tikhonov, A.N.; Arsenin, V.: Solutions of Ill-Posed Problems. New York: Wiley 1977.
- [TGSY95] Tikhonov, A.N.; Goncharsky, A.; Stepanov, V.; Yagola, A.: Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems. Dordrecht: Kluwer 1995.
- [VAI87] Vainikko, G.M.: On the optimality of methods for ill-posed problems. *Z. Anal. Anw.* 6 (1987) 351 – 362.
- [VAS81] Vasil'ev, F.P.: Methoden zur Lösung von Extremalproblemen (In Russisch). Moskau: Nauka 1981.
- [WAH90] Wahba, G.: Spline Models for Observational Data. Philadelphia: SIAM 1990.
- [WIN92] Wing, G.M.: A Primer on Integral Equations of the First Kind: The Problem of Deconvolution and Unfolding. Philadelphia: SIAM 1992.
- [WOL94] Wolfersdorf, L.von: Inverse und schlecht gestellte Probleme. Sitzungsberichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Band 124, Heft 5. Berlin: Akademie Verlag 1994.
- [YAM95] Yamamoto, M.: Stability, reconstruction formula and regularization for an inverse source hyperbolic problem by a control method. *Inverse Problems* 11 (1995) 481 – 496.
- [ZID90] Zidarov, D.: Inverse Gravimetric Problem in Geoprospecting and Geodesy. Amsterdam: Elsevier 1990.

# Sachregister

- Abbildung
  - aufrauhende, 36
  - glättende, 13, 35, 167
  - Ursache-Wirkungs-, 11, 28
- Abelsche Integralgleichung, 109
- abgebrochene Singulärwertentwicklung, 149
- Abschließung, 41
- Anfangsbedingungen, 16, 57, 58, 102
- Apriori-Informationen, 61, 172
  - objektive und subjektive, 63
- Aquifergasspeicher, 110
- asymptotische Regularisierung, 152
  
- Bakushinsky-Veto, 131
- Banachräume, 24
- Bayessche Modelle, 65, 180
- Bedingungsgefüge, 11
- Besselsche Ungleichung, 81
- Bildraum, 42
  - abgeschlossener, 43
  - nicht abgeschlossener, 44
  
- Cauchyfolge, 24
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung
  - für Integrale, 61
  - in Hilberträumen, 80
  
- Datenfehlerniveau, 30
- Datenkompatibilität, 62
- Defektnorm, 30
  - Monotonieverhalten, 139, 175
  - restringierte Minimierung, 140
- Definitionsbereich, 27
- Deltafunktion, 158
- deskriptive Regularisierung, 66
- Diagnoseprobleme, 5, 13
  
- Differentialgleichungen
  - gewöhnliche erster Ordnung, 57
  - im Hilbertraum, 152
  - im Komplexen, 162
  - partielle zweiter Ordnung, 16, 58
- Differentiationsproblem, 36, 109, 114
  - $l$ -faches, 109
- Dimension, 24
- direkte Probleme, 12
- Diskrepanzprinzip, 139, 152, 175
  - Newton-Iteration, 141
- Diskretisierung, 48, 105, 171, 184
- Distribution, 158
- Dreiecksungleichung, 23
  
- Eigenwerte
  - von Matrizen, 62
  - von Operatoren, 82, 101
- Einbettungen, 76
- Eindeutigkeitsbedingung, 32
- endlichdimensionale Räume, 24
- Erwartungswert, 62, 178, 179
- Euklidische Norm, 33
- Euklidisches Skalarprodukt, 88
- Existenzbedingung, 32, 39
- Extremalproblem, 30, 39, 67
  - als Operatorgleichung, 135
  
- Faltung, 59, 158
- Faltungsoperator, 111, 121, 158
- Faltungssatz, 157
- Farbanalyse, 49
- Filterfaktoren und Filterfunktion, 132
- Fluoreszenzspektroskopie, 110
- Fourierreihe im Hilbertraum, 80, 96
- Fouriertransformation, 156
- Fréchet-Ableitung, 117

- Fredholmsche Integralgleichung
  - lineare erster Art, 108, 113, 164
  - Tichonov-Regularisierung, 145
  - lineare zweiter Art, 146
- Galerkin-Verfahren, 155
- Gammaspktren, 45
- Gâteaux-Ableitung, 117
- Glockenkurve, 158
- Grad der Inkorrektheit, 106, 112, 114, 134, 162
  - lokaler, 122, 124
- Gravimetrie, 93
- Hauptkomponenten der Lösung, 136
- Hilbert-Schmidt-Operator, 100, 165
- Hilberträume, 24, 79
  - separable, 81
- Identifikationsprobleme, 13, 29
  - lineare, 30
  - nichtlineare, 30, 54, 183
  - unrestringierte lineare, 41, 79
- indirekte Messungen, 5, 12, 45
- Inkorrektheit, 6, 13, 31, 37, 39, 83
  - lokale, 55, 118
  - schwache und mäßige, 107
  - starke, 107
  - vom Typ I, 83, 92, 159, 162
  - vom Typ II, 83, 94, 165
- innerer Punkt, 41
- Instabilität, 13, 35
- Integralgleichung, 36
  - erster Art, 49
  - Faltungsgleichung, 158
  - Kernfunktion, 49, 112, 158
  - zweiter Art, 54
- Integraloperator
  - der gebrochenen Integration, 108
  - linearer Fredholmscher, 50
  - linearer Volterrascher, 36
- Integrodifferentialgleichung, 147
- inverse Eigenwertprobleme, 68
- inverse Probleme, 5, 12
  - weiterführende Literatur, 20
  - historische Entwicklung, 19
  - Operatorformulierung, 27
  - Raumwahl, 27, 38
- isolierte Lösung, 56
- Kausalzusammenhang, 11
- Kleinste-Quadrate-Lösungen, 33, 85
  - $n$ -dimensional eingeschränkte, 103, 154
- Konditionszahl, 47, 89, 99
- Konvergenz
  - im Banachraum, 23
  - schwache im Hilbertraum, 81
  - starke oder Normkonvergenz, 23
- Konvexitätsrestriktionen, 31, 73
- Korrektheit, 12, 31, 39, 83
  - lokale, 55, 119
- Korrektheitsdefinition
  - für Extremalprobleme, 39
  - nach Hadamard, 32
  - nach Nashed, 83
- Kovarianzmatrix, 62, 178, 179
- Kugel im Banachraum, 31, 42, 55
- Landweber-Iteration, 150
- Lebesgue-Integral, 26
- Lebesguemaß, 26
- lineare Funktionale im Hilbertraum
  - beschränkte, 81
- lineare Hülle, 89
- lineare Operatoren im Hilbertraum
  - Eigenschaften, 82
  - Halbordnung, 122
- lineare Räume, 23
- lineare Unabhängigkeit, 24
- lineares Gleichungssystem
  - beim Galerkin-Verfahren, 155

- gutkonditioniertes, 47
- Kleinste-Quadrate-Lösung
  - gewichtete, 166, 183
  - regularisierte, 174, 183
- mit quadratischer Matrix, 45
- mit rechteckiger Matrix, 88
- schlechtkonditioniertes, 47, 65
  - Regularisierung, 171
- Linearkombination, 41, 89
- Majorantenkriterium
  - von Lebesgue, 51
  - von Weierstraß, 92
- mathematische Modelle, 9
- Matrix, 25
  - positiv definite, 65, 173
  - positiv semidefinite, 62
  - quadratische, 46
  - Rang, 98
  - reguläre, 46
  - Singulärwertzerlegung, 99
  - Spektralnorm, 99
  - Spur, 178
  - symmetrische, 69
  - transponierte, 25
  - zugeordnete Norm, 46
- Maximum-Minimum-Prinzip, 105
- Maximumnorm, 25, 46
- Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung, 172
- Methode der kleinsten Quadrate, 126
  - duale, 155
- metrische Räume, 24
- minimierende Folge, 40
- Minimum-Norm-Lösungen, 34, 84, 89, 98, 132
- Modell- und Beobachtungsfehler, 30
- Modellparameter, 11
- Momentenproblem, 91
- Monotonierestriktionen, 31, 72
- Moore-Penrose-Inverse, 85, 94, 98
- Multiplikationsoperator, 160, 162
- nichtlineares Gleichungssystem, 69
  - schlechtkonditioniertes, 185
- Nichtnegativitätsrestriktionen, 31
- Normalgleichung, 134
- Normalverteilung, 62
- Normaxiome, 23
- Normen
  - äquivalente, 25
  - stärkere und schwächere, 26
- normierte Räume, 23
- Nuklearmedizin, 110
- Nullraum, 42
- Ökonometrie, 167
- Open-Mapping-Theorem, 43
- Operator
  - adjungierter, 82
  - ausgearteter, 89
  - injektiver, 33
  - inverser, 33
  - linearer beschränkter, 29
  - linearer unbeschränkter, 52, 86
  - linearer vollstetiger, 52, 82, 94
  - nichtlinearer vollstetiger, 116
  - schwach abgeschlossener, 116
  - schwach stetiger, 82
  - selbstadjungierter, 82
  - stetiger, 28, 43
  - surjektiver, 32
- Operator der direkten Aufgabe, 28
- Operatorgleichung
  - in Banachräumen, 29
  - in Hilberträumen, 79
  - lineare, 30, 41, 79
    - Regularisierung, 128
  - Linearisierung, 118
  - nichtlineare, 30, 54, 115, 183
    - Regularisierung, 183

- schwache Formulierung, 146
- Operatornorm, 29
- Optimal-Design-Probleme, 15
- Optimalsteuerprobleme, 6
- orthogonale Summe, 80
- orthogonales Komplement, 80
- Orthogonalität, 80
- Orthonormalsystem, 80
  - vollständiges, 80
- Parameteridentifikation, 5
- Parameterwahl
  - Ableitungskriterium, 175
  - Cross-Validation-Kriterium, 176
  - Diskrepanzprinzip, 139, 175
  - L-Kurven-Kriterium, 177
  - Quasioptimalitätskriterium, 141, 175
  - Quotientenkriterium, 175
  - Sensitivitätsprinzip, 142
- Parsevalsche Gleichung, 81
- periodische Daten
  - Integralgleichungsmodell, 164
  - Regularisierung, 167
- Periodogramm, 165
- Picardsche Bedingung, 97, 159
- Polarzerlegungssatz, 95
- Prozeßsimulation, 9
- Pseudoinverse, 88, 99
- Quasiabstand, 35, 86
- Quelldarstellung, 119, 144, 188
- Randbedingungen, 16, 58
  - natürliche, 147
- Randwertprobleme, 101
- Raum  $C[a, b]$ , 25
- Raum  $C^1[a, b]$ , 27
- Raum  $C^l[a, b]$ , 109
- Raum  $C^\infty[a, b]$ , 194
- Raum  $H^1(a, b)$ , 76
- Raum  $l^2$ , 91
- Raum  $L^1(a, b)$ , 50
- Raum  $L^1(-\infty, \infty)$ , 157
- Raum  $L^2(a, b)$ , 25
- Raum  $L^2(-\infty, \infty)$ , 156
- Raum  $L_c^2(-\infty, \infty)$ , 156
- Raum  $L^p(a, b)$ , 71
- Raum  $L^\infty(a, b)$ , 72
- Reaktionskinetik, 57
- Regressionsmodell, 178
- regularisierte Lösung, 128, 135
  - Existenzsatz, 186
- Regularisierung, 6, 35, 127, 171, 183
  - allgemeines Schema, 129
  - durch Diskretisierung, 153
  - konvergente, 131
  - Maximum-Entropie-, 64
  - nach Tichonov, 134
  - ungesteuerte, 128
  - von Faltungsgleichungen, 160
- Regularisierungsmatrix, 172
- Regularisierungsmethoden, 126
- Regularisierungsoperator, 129
- Regularisierungsparameter, 129, 167
  - Aposteriori-Parameterwahl, 131
  - Apriori-Parameterwahl, 131
  - optimaler, 130
  - Wahlkriterien, 139, 141, 175, 176
- Regularisierungsvorschrift, 132, 149, 151, 152, 160, 163, 172
- relativer Fehler, 47
- Riemann-Lebesgue-Lemma, 51
- Satellitenmeteorologie, 87, 121
- Satz des Pythagoras, 80
- Satz von Arzelà-Ascoli, 71
- Satz von Helly, 73
- Satz von Lebesgue, 73
- Satz von Rellich-Kondrachov, 76
- Satz von Riesz, 81

- Satz von Tichonov, 65
- Satz von Titchmarsh, 111
- Schätzung
  - affin lineare, 178
  - Bayessche, 181
  - beste erwartungstreue, 180
  - Ridge-Schätzung, 180
- Schichtprofilbestimmung, 120
- Schlechtgestelltheit, 31
- Selbstfaltungsgleichung, 60, 184
- Selbstfaltungsoperator, 60, 121
- Signalrekonstruktion, 158
- singuläres System, 96, 149
- Singulärwerte, 96
  - Abklingraten, 102, 106, 113
- Skalarprodukt, 24
  - Eigenschaften, 79
- Stabilität und Approximation, 104, 130
- Stabilitätsbedingung, 32, 39, 85
  - lokale Variante, 56
- stationärer stochastischer Prozeß, 163
- Steueraufgaben, 15, 22
- stochastische Regularisierung, 181
- Streuung, 62, 175
- Sympathiefunktional, 63, 174
  
- Taylorreihe im Hilbertraum, 118
  - $\eta$ -Bedingung, 122
- Teilmenen
  - abgeschlossene, 41
  - beschränkte, 52
  - kompakte, 52
  - konvexe, 63
  - offene, 41
  - relativ kompakte, 52
  - relativ schwach kompakte, 81
- Teilräume, 41
- Tichonov-Funktional, 135, 160, 184
  
- Tichonov-Regularisierung, 134, 173, 183
  - als Strafenmethode, 148
  - Fallstudie, 185
  - Filterfunktion, 137
  - Konvergenz, 142, 187
  - Konvergenzraten, 144, 188
  - Sättigungssatz, 145
- Tiefpaßfilter, 136
- Tomographie, 13
- Totalvariation, 72
  
- unendlichdimensionale Räume, 24
- Urysohnsche Integralgleichung, 120
  
- Vektor, 24
  - Maximumnorm, 46
  - p-Normen, 46
  - transponierter, 25
  - zufälliger, 62, 178
- verallgemeinerte Ableitung, 76, 157
- Volterrasche Integralgleichung
  - Faltungsgleichung, 108, 110
  - lineare erster Art, 108
- Vorhersage bei Zeitreihen, 164
  
- Wärmeleitprobleme, 15
  - inverse, 17, 57, 102, 161
- Wärmeleitungsgleichung, 16
  - Rückwärtsproblem, 102
  - Seitwärtsproblem, 161
- weißes Rauschen, 62, 164, 175
- wesentliches Supremum, 72
  
- $x^*$ -Minimum-Norm-Lösungen, 34, 183
  
- Youngsche Ungleichung, 109
  
- Zeitreihen, 163
- Zinsentwicklung in Deutschland, 167
- Zusatzinformationen, 61, 172
  - deterministische/stochastische, 61