Technische Universität Chemnitz — Sommersemester 2018
Fakultät für Mathematik
Professur Inverse Probleme (Prof. Dr. Bernd Hofmann)
Vorlesung: **Einführung in die Stochastik**

Zum Satz über die totale Wahrscheinlichkeit und zum Satz von Bayes:

Beispielproblem:

In der Statistik einer großen deutschen Pannendienstorganisation werden Fahrzeugausfälle wegen eines technischen Defekts nach Baugruppen in neun Klassen eingeteilt. In der folgenden Tabelle findet man für ein Jahr die Häufigkeitsverteilung dieser Klassen in % unter allen mobilen Hilfeleistungen wegen technischen Defekts. Weiterhin sind die jeweiligen Erfolgsquoten in % für eine gelungene Soforthilfe vor Ort verzeichnet.

Nr.	**Bauteilgruppe**	**Häufigkeit**	**Soforthilfequote**
1	Allgemeine Fahrzeugelektrik	$35,1$	$75,7$
2	Zündanlage	$14,2$	$75,6$
3	Motor	$10,6$	$72,6$
4	Kühlung und Heizung	$7,4$	$80,7$
5	Räder und Reifen	$6,7$	$52,7$
6	Einspritzanlage	$5,8$	$96,7$
7	Kraftstoffanlage	$5,8$	$95,9$
8	Kupplung und Getriebe	$5,0$	$91,3$
9	Sonstige Schäden	$9,4$	$96,6$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit konnten die mobilen Pannenhelfer bei einem wegen eines technischen Defekts liegengebliebenen Fahrzeug erfolgreiche Soforthilfe leisten?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Schaden der Allgemeinen Fahrzeugelektrik handelte, wenn Soforthilfe möglich war?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Schaden der Allgemeinen Fahrzeugelektrik handelte, wenn vor Ort nicht geholfen werden konnte?

Lösung:

Wir bezeichnen mit A das zufällige Ereignis, dass in einem Schadensfall vor Ort geholfen werden konnte, entsprechend mit $\overline{A}$ das Komplementärereignis nicht gelungener Hilfe. Die Ereignisse $B_1, B_2, ..., B_9$ bezeichnen das Auftreten der Schadensursachen mit den entsprechenden Indexnummern laut Tabelle. Diese neun Ereignisse bilden ein vollständiges Ereignissystem. Die Spalte 3 der Tabelle liefert die Wahrscheinlichkeiten $P(B_i)$ $(i = 1, 2, ..., 9)$, also z.B. $P(B_1) = 0,351$. Die Spalte 4 gibt die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B_i)$ an, also z.B. $P(A|B_1) = 0,757$.

a) Nach dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit gilt

$$P(A) = \sum_{i=1}^{9} P(A|B_i)P(B_i) = \underline{0,793}.$$

Mit knapp 80%iger Wahrscheinlichkeit war Soforthilfe vor Ort möglich.

b) Der Satz von Bayes erlaubt uns die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)} \qquad (j = 1, 2, ..., 9).$$

Speziell für $j = 1$ erhält man $P(B_1|A) = \underline{0,335}$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Schaden der Allgemeinen Fahrzeugelektrik bei erfolgter Soforthilfe ist nun also etwas kleiner als die unbedingte Wahrscheinlichkeit von 0,351 für diese Schadensquelle insgesamt.

c) Andererseits ist

$$P(B_j|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}|B_j)P(B_j)}{P(\overline{A})} = \frac{(1 - P(A|B_j))P(B_j)}{1 - P(A)} \qquad (j = 1, 2, ..., 9).$$

Speziell für $j = 1$ erhält man $P(B_1|\overline{A}) = \underline{0,412}$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Schaden der Allgemeinen Fahrzeugelektrik bei misslungener Soforthilfe ist etwas größer als die unbedingte Wahrscheinlichkeit von 0,351. Die hat seine Ursache offensichtlich darin, dass die Erfolgsquote 0,757 für diese Schadensquelle unterdurchschnittlich ausfällt. Entsprechende Berechnungen kann man analog für die acht restlichen Schadensklassen anstellen.