

Prüfungsschwerpunkte Inverse Probleme

1. Erklären Sie die Begriffswelt der direkten und inversen Probleme (Ursache, Wirkung, Bedingungsgefüge) allgemein und anhand von Beispielen aus Naturwissenschaften, Technik oder Wirtschaft.
2. Beschreiben Sie mathematische Modelle für Identifikations- und Steuerprobleme (Vorwärtsoperator, Raumwahl, Operatorgleichung, Extremalproblem) abstrakt und an Beispielen. Was unterscheidet lineare und nichtlineare inverse Probleme?
3. Sprechen Sie zur Hadamardschen Korrektheitsdefinition und zur Korrektheit bei Extremalproblemen (Bedingungen (i)-(v)). Geben Sie Beispiele für inkorrekte Probleme zu beiden Problemklassen.
4. Was nützen Zusatzinformationen (objektive und subjektive Apriori-Informationen und wo bzw. wie werden sie eingesetzt)? Was besagt der Satz von Tikhonov und wie setzt man die deskriptive Regularisierung ein?
5. Entwickeln Sie die Grundzüge der Theorie inkorrekt linearer Operatorgleichungen im Hilbertraum. Sprechen Sie zur Korrektheit und Inkorrektheit nach Nashed (Typ I und II mit Beispielen).
6. Sprechen Sie zum Hausdorffschen Momentenproblem und seiner Inkorrektheit sowie Raumwahl.
7. Sprechen Sie zur SVD bei linearen Operatorgleichungen, die inkorrekt nach Nashed vom Typ II sind. Was sind singuläre Systeme und wie kann man mit ihrer Hilfe inkorrekte lineare Operatorgleichungen im Hilbertraum mittels Fourierreihen behandeln?
8. Sprechen Sie zum Grad der Inkorrektheit bei kompakten linearen Vorwärtsoperatoren im Hilbertraum. Geben Sie Beispiele für die verschiedenen Situationen an. Erwähnen Sie Fredholmsche bzw. Volterraschen Integralgleichungen 1. Art. Was bedeutet die Glattheit des Kernes für die Inkorrektheit?
9. Wie verhalten sich lineare inkorrekte Operatorgleichungen bei Diskretisierung?

10. Sprechen Sie zu lokal inkorrekten nichtlinearen Operatorgleichungen und geben Sie ein Beispiel an.
11. Sprechen Sie zum allgemeinen Regularisierungsschema für lineare Operatorgleichungen im Hilbertraum (Filterfaktoren mit Eigenschaften, Einordnung verschiedener Methoden).
12. Sprechen Sie zur Tikhonov-Regularisierung für lineare Probleme im Hilbertraum (Zusammenhang auftretender Extremalprobleme, Raumwahlsituationen).
13. Welche Strategien zur Wahl des Regularisierungsparameters kennen Sie und wann erreicht man damit Konvergenz regularisierter Lösungen?
14. Sprechen Sie zur Konvergenzratentheorie linearer inkorrektur Probleme im Hilbertraum und dabei zur Rolle von Indexfunktionen bei allgemeinen Quelldarstellungen und als Ratenfunktionen.
15. Sprechen Sie zu inkorrekten Faltungsgleichungen in $L^2(-\infty, \infty)$ und deren Regularisierung mittels Fourier-Transformation.
16. Sprechen Sie zur Tikhonov-Regularisierung für nichtlineare Operatorgleichungen im Hilbertraum, Existenz-, Konvergenz- und Ratenresultate (Engl-Kunisch-Neubauer-Theorie).
17. Sprechen Sie zu Problemen mit Zusammenhang der Autokonvolutionsgleichung (Anwendungen, Eigenschaften des Vorwärtsoperators, Besonderheiten bei der regularisierten Lösung).
18. Sprechen Sie zur Lavrentiev-Regularisierung für lineare und nichtlineare Operatorgleichungen im Hilbertraum.
19. Sprechen Sie zu den Besonderheiten der Tikhonov-Regularisierung im Banachraum und zur Notwendigkeit neuer mathematischer Hilfsmittel.
20. Sprechen Sie zum Einsatz von Variationsungleichungen zur Beschreibung der Glattheit von Lösungen bei der Banachraum-Regularisierung und zu entsprechenden Konvergenzratenresultaten.