Brownsche Bewegung: Eine Einführung

Batu Güneysu

Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin

Greifswald, 18.04.2018

Wir fixieren $m \in \mathbb{N}$ und einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

A) Ein (zeitkontinuierlicher) *stochastischer Prozess auf* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *mit Werten in* $\mathbb{R}^m$ ist eine Abbildung

$$X = (X^{(1)}, \ldots X^{(m)}) : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (t, \omega) \longmapsto X_t(\omega),$$

so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathscr{F}$-Zufallsvariable (ZV), d.h. $\mathscr{F}$-messbar, ist.

B) Die Abbildungen $X(\omega) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$, wobei $\omega \in \Omega$, heißen die *Pfade von* X.

Wir fixieren $m \in \mathbb{N}$ und einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

A) Ein (zeitkontinuierlicher) *stochastischer Prozess auf* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *mit Werten in* $\mathbb{R}^m$ ist eine Abbildung

$$X = (X^{(1)}, \ldots X^{(m)}) : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (t, \omega) \longmapsto X_t(\omega),$$

so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathscr{F}$-Zufallsvariable (ZV), d.h. $\mathscr{F}$-messbar, ist.

B) Die Abbildungen $X(\omega) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$, wobei $\omega \in \Omega$, heißen die *Pfade von* X.

C) Ist $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ eine weitere Filtrierung, so gibt es für jede $\mathscr{F}$-ZV $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ mit $\mathbb{E}[|\Psi|] < \infty$ eine $\mathbb{P}$-f.s. eindeutig bestimmte $\mathscr{G}$-ZV $\mathbb{E}[\Psi|\mathscr{G}] : \Omega \to \mathbb{R}^m$, die *bedingte Erwartung von* Ψ *gegeben* $\mathscr{G}$, mit

$$\mathbb{E}\big[1_A \mathbb{E}[\Psi|\mathscr{G}]\big] = \mathbb{E}\big[1_A \Psi\big] \quad \text{für alle } A \in \mathscr{G}.$$

Wir fixieren $m \in \mathbb{N}$ und einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

A) Ein (zeitkontinuierlicher) *stochastischer Prozess auf* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *mit Werten in* $\mathbb{R}^m$ ist eine Abbildung

$$X = (X^{(1)}, \ldots X^{(m)}) : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (t, \omega) \longmapsto X_t(\omega),$$

so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathscr{F}$-Zufallsvariable (ZV), d.h. $\mathscr{F}$-messbar, ist.

B) Die Abbildungen $X(\omega) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$, wobei $\omega \in \Omega$, heißen die *Pfade von* X.

C) Ist $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ eine weitere Filtrierung, so gibt es für jede $\mathscr{F}$-ZV $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ mit $\mathbb{E}[|\Psi|] < \infty$ eine $\mathbb{P}$-f.s. eindeutig bestimmte $\mathscr{G}$-ZV $\mathbb{E}[\Psi|\mathscr{G}] : \Omega \to \mathbb{R}^m$, die *bedingte Erwartung von* Ψ *gegeben* $\mathscr{G}$, mit

$$\mathbb{E}\big[1_A \mathbb{E}[\Psi|\mathscr{G}]\big] = \mathbb{E}\big[1_A \Psi\big] \quad \text{für alle } A \in \mathscr{G}.$$

D) Eine *Filtrierung von* $\mathscr{F}$ ist eine Familie $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ von Unter-Sigma-Algebren von $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ für alle $0 \leq s \leq t$.

E) Man nennt $\mathscr{F}_t^X := \sigma(X_s : s \leq t)$, $t \geq 0$, die *von* X *erzeugte Filtrierung* von $\mathscr{F}$.

D) Eine *Filtrierung von* $\mathscr{F}$ ist eine Familie $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ von Unter-Sigma-Algebren von $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ für alle $0 \leq s \leq t$.

E) Man nennt $\mathscr{F}_t^X := \sigma(X_s : s \leq t)$, $t \geq 0$, die *von* X *erzeugte Filtrierung* von $\mathscr{F}$.

F) Der Prozess X heißt ein *Martingal bzgl.* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, falls X_t eine $\mathscr{F}_t$-ZV ist mit $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ und

$$\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s., für alle } 0 \leq s \leq t.$$

D) Eine *Filtrierung von* $\mathscr{F}$ ist eine Familie $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ von Unter-Sigma-Algebren von $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ für alle $0 \leq s \leq t$.

E) Man nennt $\mathscr{F}_t^X := \sigma(X_s : s \leq t)$, $t \geq 0$, die *von* X *erzeugte Filtrierung* von $\mathscr{F}$.

F) Der Prozess X heißt ein *Martingal bzgl.* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, falls X_t eine $\mathscr{F}_t$-ZV ist mit $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ und

$$\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s., für alle } 0 \leq s \leq t.$$

G) X heißt ein *Markov-Prozess bzgl.* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, falls X_t eine $\mathscr{F}_t$-ZV ist und für alle $0 \leq s \leq t$ und alle beschränkten messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t)|\sigma(X_s)] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

$\Rightarrow$ Die Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}^m$ ist der Prototyp eines stochastischen Prozesse mit stetigen Pfaden sind, der zugleich ein Martingal und ein Markov-Prozess ist!

D) Eine *Filtrierung von* $\mathscr{F}$ ist eine Familie $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ von Unter-Sigma-Algebren von $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ für alle $0 \leq s \leq t$.

E) Man nennt $\mathscr{F}_t^X := \sigma(X_s : s \leq t)$, $t \geq 0$, die *von* X *erzeugte Filtrierung* von $\mathscr{F}$.

F) Der Prozess X heißt ein *Martingal bzgl.* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, falls X_t eine $\mathscr{F}_t$-ZV ist mit $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ und

$$\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s., für alle } 0 \leq s \leq t.$$

G) X heißt ein *Markov-Prozess bzgl.* $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, falls X_t eine $\mathscr{F}_t$-ZV ist und für alle $0 \leq s \leq t$ und alle beschränkten messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathscr{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t)|\sigma(X_s)] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

$\Rightarrow$ Die Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}^m$ ist der Prototyp eines stochastischen Prozesse mit stetigen Pfaden sind, der zugleich ein Martingal und ein Markov-Prozess ist!

1827 betrachtet der schottische Botaniker Robert Brown Pollen in Wasser durch ein Mikroskop: Zu seiner Überraschung bewegen sich die Pollen (scheinbar einem Zufallsprinzip folgend, wobei die einzelnen Pollen sich nicht gegenseitig zu beeinflussen scheinen):

Robert Brown (1773-1858)

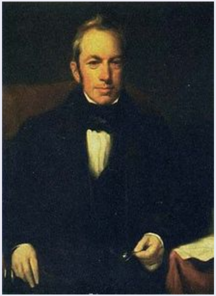
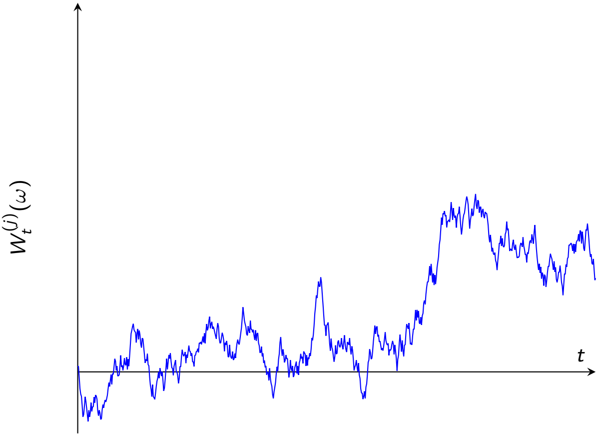


Abbildung: Projektion $W^{(j)}(\omega)$ auf die j-te Koordinate eines typischen in $x = 0$ startenden Brownschen Pfades $W(\omega)$ für ein Zufallsereignis ω



- Die Pfade von W sind stetig, scheinen aber nicht differenzierbar zu sein.
- Weitere Experimente:
  - Die Testteilchen (Pollen,...) bewegen sich unabhängig voneinander (also OBdA *ein* Testteilchen).
  - Die durchschnittliche Positionsänderung des Testteilchens fällt mit der Viskosität und steigt mit der Temperatur des Mediums (Wasser,...).
  - Die durchschnittliche Positionsänderung des Testteilchens fällt mit dessen Größe.

- Die Pfade von W sind stetig, scheinen aber nicht differenzierbar zu sein.
- Weitere Experimente:
  - Die Testteilchen (Pollen,...) bewegen sich unabhängig voneinander (also OBdA *ein* Testteilchen).
  - Die durchschnittliche Positionsänderung des Testteilchens fällt mit der Viskosität und steigt mit der Temperatur des Mediums (Wasser,...).
  - Die durchschnittliche Positionsänderung des Testteilchens fällt mit dessen Größe.
- Einsteins Ansatz (1905): Die Bewegung des Testteilchens im Medium kommt dadurch zustande, dass das Medium aus Molekülen besteht, die einer zufälligen Kinetik unterliegen, und die so das Testteilchen 'bomardieren'. Einstein hatte nur eine vage Kenntnis von Browns Experimenten.

- Die Pfade von W sind stetig, scheinen aber nicht differenzierbar zu sein.
- Weitere Experimente:
  - Die Testteilchen (Pollen,...) bewegen sich unabhängig voneinander (also OBdA *ein* Testteilchen).
  - Die durchschnittliche Positionsänderung des Testteilchens fällt mit der Viskosität und steigt mit der Temperatur des Mediums (Wasser,...).
  - Die durchschnittliche Positionsänderung des Testteilchens fällt mit dessen Größe.
- Einsteins Ansatz (1905): Die Bewegung des Testteilchens im Medium kommt dadurch zustande, dass das Medium aus Molekülen besteht, die einer zufälligen Kinetik unterliegen, und die so das Testteilchen 'bomardieren'. Einstein hatte nur eine vage Kenntnis von Browns Experimenten.

Einstein leitet seine Behauptung wie folgt her: Ist $p_t(x, \bullet)$ die Dichte der Verteilung für die Position W_t des $x \in \mathbb{R}^3$ gestarteten Testteilchens, so leitet er die Gleichung

$$\partial_t p_t(x,y) = D\Delta_y p_t(x,y) \text{ für alle } (t,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \qquad (1)$$

her, mit

$$D = \frac{k_{\text{Boltzmann}} \times T_{\text{Medium}}}{6 \times \pi \times \nu_{\text{Medium}} \times R_{\text{ Testteilchen}}}.$$

Einstein nimmt hierzu nur an, dass das Testteilchen keine bevorzugte Bewegungsrichtung hat und $p_t(x, \bullet)$ im Unendlichen verschwindet!

Mit der Lösung $p_t(x,y) = (4\pi Dt)^{-3/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}}$ von (1) ergibt sich

$$\mathbb{E}[(W_t^{(j)} - x^{(j)})^2] = 2Dt \qquad \text{für alle } j \in \{1,2,3\},$$

was alle obigen Beobachtungen bestätigt und die folgende Definition (für $D = 1/2$) motiviert:

Einstein leitet seine Behauptung wie folgt her: Ist $p_t(x,\bullet)$ die Dichte der Verteilung für die Position W_t des $x \in \mathbb{R}^3$ gestarteten Testteilchens, so leitet er die Gleichung

$$\partial_t p_t(x,y) = D\Delta_y p_t(x,y) \text{ für alle } (t,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \qquad (1)$$

her, mit

$$D = \frac{k_{\text{Boltzmann}} \times T_{\text{Medium}}}{6 \times \pi \times \nu_{\text{Medium}} \times R_{\text{Testteilchen}}}.$$

Einstein nimmt hierzu nur an, dass das Testteilchen keine bevorzugte Bewegungsrichtung hat und $p_t(x,\bullet)$ im Unendlichen verschwindet!

Mit der Lösung $p_t(x,y) = (4\pi Dt)^{-3/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}}$ von (1) ergibt sich

$$\mathbb{E}[(W_t^{(j)} - x^{(j)})^2] = 2Dt \qquad \text{für alle } j \in \{1,2,3\},$$

was alle obigen Beobachtungen bestätigt und die folgende Definition (für $D = 1/2$) motiviert:

Für $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^m$ sei $p_t^{(m)}(x,y) := (2\pi t)^{-m/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}$ die Gaußsche Verteilungsdichte.

Definition

Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein WR. Ein stochastischer Prozess

$$W = (W^{(1)}, \dots, W^{(m)}) : [0,\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

mit stetigen Pfaden heißt eine *Brownsche Bewegung (BB) in* $\mathbb{R}^m$ *mit Startpunkt* $x \in \mathbb{R}^m$, falls für alle $k \in \mathbb{N}$, alle $0 < t_1 < \cdots < t_k$ und alle Borel-Mengen $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^m$ das Folgende gilt:

$$\mathbb{P}\{W_{t_1} \in A_1, \dots, W_{t_k} \in A_k\} =$$
$$\int_{A_1} \cdots \int_{A_k} p_{t_1}^{(m)}(x, x_1) p_{t_2 - t_1}^{(m)}(x_1, x_2) \cdots p_{t_k - t_{k-1}}^{(m)}(x_{k-1}, x_k) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_k.$$

- Aus der Definition folgt $W_0 = x$ $\mathbb{P}$-f.s.
- Die Formel für $\mathbb{P}\{W_{t_1} \in A_1, \dots, W_{t_k} \in A_k\}$ ist äquivalent zu
  - $W_0 = x$ $\mathbb{P}$-f.s.,
  - für alle $k \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_k$ sind die Zufallsvariablen $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \dots W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ unabhängig und $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ hat die Gaußsche Verteilungsdichte $p^{(m)}(t_j - t_{j-1}, 0, \bullet)$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$.

Satz (N. Wiener (1923))

Es existiert ein WR der für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ eine BB in $\mathbb{R}^m$ mit Startpunkt x trägt.

Beweisidee: OBdA $m = 1$, $x = 0$. Der kanonische Prozess $W_t(\omega) := \omega(t)$ auf $\Omega = C([0, \infty), \mathbb{R}^1)$ mit dem Wiener-Maß $\mathbb{P}$ ist eine BB mit Startwert 0 (das Maß $\mathbb{P}$ erhält man z.B. mittels des skalierten symmetrischen Random Walks, oder mittels Kolmogorov).

- Aus der Definition folgt $W_0 = x$ $\mathbb{P}$-f.s.
- Die Formel für $\mathbb{P}\{W_{t_1} \in A_1, \ldots, W_{t_k} \in A_k\}$ ist äquivalent zu
  - $W_0 = x$ $\mathbb{P}$-f.s.,
  - für alle $k \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_k$ sind die Zufallsvariablen $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ unabhängig und $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ hat die Gaußsche Verteilungsdichte $p^{(m)}(t_j - t_{j-1}, 0, \bullet)$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Satz (N. Wiener (1923))

Es existiert ein WR der für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ eine BB in $\mathbb{R}^m$ mit Startpunkt x trägt.

Beweisidee: OBdA $m = 1$, $x = 0$. Der kanonische Prozess $W_t(\omega) := \omega(t)$ auf $\Omega = C([0, \infty), \mathbb{R}^1)$ mit dem Wiener-Maß $\mathbb{P}$ ist eine *BB* mit Startwert 0 (das Maß $\mathbb{P}$ erhält man z.B. mittels des skalierten symmetrischen Random Walks, oder mittels Kolmogorov).

Satz

Sei W eine BB in $\mathbb{R}^m$.
a) Die Komponenten von W sind unabhängige BB'en im $\mathbb{R}^1$.
b) W hat die Markov-Eigenschaft bzgl. $\mathscr{F}^W$.
c) Für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$, $s, t \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E}[(W_t^{(j)} - W_s^{(j)})^k] = \begin{cases} 0, & \textit{falls } k \textit{ ungerade} \\ \frac{(2l)!}{2^l l!}(t-s)^l & \textit{falls } k = 2l, \end{cases}$$

insbesondere $\mathbb{E}[(W_t^{(j)} - W_0^{(j)})^2] = t$ (Einstein für $D = 1/2$...).
d) W ist ein Martingal bezüglich $\mathscr{F}^W$.

Beweis: Tafel.

a) Eine Konsequenz von

$$p_t^{(m)}((x^{(1)},\dots,x^{(m)}),(y^{(1)},\dots,y^{(m)})) = \prod_{j=1}^{m} p_t^{(1)}(x^{(j)},y^{(j)}).$$

b) Für $s<t$ und $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Borel u. beschr. gilt wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse

$$\mathbb{E}[f((W_t-W_s)+W_s)|\mathscr{F}_s^W] = \mathbb{E}[f((W_t-W_s)+W_s)|\sigma(W_s)].$$

c) Für $s<t$ gilt

$$\mathbb{E}[(W_t^{(j)}-W_s^{(j)})^k] = \int_{\mathbb{R}^1} y^k p_{t-s}^{(1)}(0,y)dy = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \frac{(2l)!}{2^l l!}(t-s)^l & \text{falls } k=2l. \end{cases}$$

d) Für $s<t$ gilt wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse und c)

$$\mathbb{E}[W_t|\mathscr{F}_s^W] = \mathbb{E}[W_s|\mathscr{F}_s^W] + \mathbb{E}[W_t-W_s|\mathscr{F}_s^W] = W_s + \mathbb{E}[W_t-W_s] = W_s.$$

Zu den lokalen Pfadeigenschaften der Brownschen Bewegung:

Satz

Sei W eine BB in $\mathbb{R}^m$. Für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$ besitzt $W^{(j)}$ eine quadratische Variation, d.h. es gibt einen Prozess $[W^{(j)}]$ in $\mathbb{R}^1$, so dass für alle $t \geq 0$ und jede Folge von Partitionen $\Delta_n = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots t_n^{(m_n)} = t\}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $|\Delta_n| \to 0$ für $n \to \infty$, die Konvergenz

$$[W^{(j)}]_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{j-1}^{(n)}})^2 \quad \textit{in } L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \textit{ gilt.}$$

Tatsächlich ist $[W^{(j)}]_t = t$ $\mathbb{P}$-f-s.

Beweis:

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{m_n} W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{j-1}^{(n)}})^2 - t\right)^2\right] = 2\sum_{j=1}^{n}(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)})^2 \leq 2t|\Delta_n|.$$

Zu den lokalen Pfadeigenschaften der Brownschen Bewegung:

Satz

Sei W eine BB in $\mathbb{R}^m$. Für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$ besitzt $W^{(j)}$ eine quadratische Variation, d.h. es gibt einen Prozess $[W^{(j)}]$ in $\mathbb{R}^1$, so dass für alle $t \geq 0$ und jede Folge von Partitionen $\Delta_n = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots t_n^{(m_n)} = t\}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $|\Delta_n| \to 0$ für $n \to \infty$, die Konvergenz

$$[W^{(j)}]_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{j-1}^{(n)}})^2 \quad \textit{in } L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \textit{ gilt.}$$

Tatsächlich ist $[W^{(j)}]_t = t$ $\mathbb{P}$-f-s.

Beweis:
$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{m_n} W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{j-1}^{(n)}})^2 - t\right)^2\right] = 2\sum_{j=1}^{n}(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)})^2 \leq 2t|\Delta_n|.$

Bemerkungen und Ausblick:

- Aus dem vorhergehenden Satz folgt, dass für beliebiges $t > 0$ fast alle BB Pfade keine endliche Totalvariation auf $[0, t]$ haben, insbesondere nicht stetig differenzierbar auf $[0, t]$ sind. Tatsächlich sind fast alle Brownsche Pfade nicht einmal differenzierbar auf $[0, t]$ (Einstein, Quantenmechanik!).
- Insbesondere kann $\int_0^t X_s dW_s$ für einen stetigen Prozess X nicht pfadweise als Stieltjes-Integral gebildet werden, aber die Existenz der quadratischen Variation $[W_t]$ lässt dennoch eine natürliche Definition von $\int_0^t X_s dW_s$ zu (Itô-integral!).

Bemerkungen und Ausblick:

- Aus dem vorhergehenden Satz folgt, dass für beliebiges $t > 0$ fast alle BB Pfade keine endliche Totalvariation auf $[0, t]$ haben, insbesondere nicht stetig differenzierbar auf $[0, t]$ sind. Tatsächlich sind fast alle Brownsche Pfade nicht einmal differenzierbar auf $[0, t]$ (Einstein, Quantenmechanik!).
- Insbesondere kann $\int_0^t X_s dW_s$ für einen stetigen Prozess X nicht pfadweise als Stieltjes-Integral gebildet werden, aber die Existenz der quadratischen Variation $[W_t]$ lässt dennoch eine natürliche Definition von $\int_0^t X_s dW_s$ zu (Itô-integral!).
- Globale Pfadeigenschaften: Die BB ist rekurrent für $m \leq 2$, sowie transient für $m \geq 3$.

Bemerkungen und Ausblick:

- Aus dem vorhergehenden Satz folgt, dass für beliebiges $t > 0$ fast alle BB Pfade keine endliche Totalvariation auf $[0, t]$ haben, insbesondere nicht stetig differenzierbar auf $[0, t]$ sind. Tatsächlich sind fast alle Brownsche Pfade nicht einmal differenzierbar auf $[0, t]$ (Einstein, Quantenmechanik!).
- Insbesondere kann $\int_0^t X_s dW_s$ für einen stetigen Prozess X nicht pfadweise als Stieltjes-Integral gebildet werden, aber die Existenz der quadratischen Variation $[W_t]$ lässt dennoch eine natürliche Definition von $\int_0^t X_s dW_s$ zu (Itô-integral!).
- Globale Pfadeigenschaften: Die BB ist rekurrent für $m \leq 2$, sowie transient für $m \geq 3$.
- Die Feynman-Kac Formel liefert einen Zusammenhang zwischen Schrödinger-Operatoren (Quantenmemchanik!) und BB.

Bemerkungen und Ausblick:

- Aus dem vorhergehenden Satz folgt, dass für beliebiges $t > 0$ fast alle BB Pfade keine endliche Totalvariation auf $[0, t]$ haben, insbesondere nicht stetig differenzierbar auf $[0, t]$ sind. Tatsächlich sind fast alle Brownsche Pfade nicht einmal differenzierbar auf $[0, t]$ (Einstein, Quantenmechanik!).
- Insbesondere kann $\int_0^t X_s dW_s$ für einen stetigen Prozess X nicht pfadweise als Stieltjes-Integral gebildet werden, aber die Existenz der quadratischen Variation $[W_t]$ lässt dennoch eine natürliche Definition von $\int_0^t X_s dW_s$ zu (Itô-integral!).
- Globale Pfadeigenschaften: Die BB ist rekurrent für $m \leq 2$, sowie transient für $m \geq 3$.
- Die Feynman-Kac Formel liefert einen Zusammenhang zwischen Schrödinger-Operatoren (Quantenmemchanik!) und BB.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!