Übung 4

Aufgabe 1: Berechnen Sie $S = \sum_{1 \le j < k \le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$, und leiten Sie aus dem Ergebniss die Tschebyscheffsche Ungleichung ab:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) \le n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \quad \text{für} \quad a_1 \le \ldots \le a_n, b_1 \le \ldots \le b_n.$$

Hinweis: $2S = \sum_{1 \le j,k \le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$.

Aufgabe 2:

1. Es sei S eine Menge mit n Elementen, und $\{E_1, \ldots, E_m\}$ eine Menge von Eigenschaften, die die Elemente aus S besitzen oder nicht. Mit $N(E_{i_1} \ldots E_{i_k})$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaften $E_{i_1}, \ldots E_{i_k}$ besitzen (und möglicherweise noch weitere). Sei $\overline{N}$ die Anzahl der Elemente, die überhaupt keine der Eigenschaften besitzen. Ermitteln Sie die Formel:

$$\overline{N} = n - \sum_{i=1}^{m} N(E_i) + \sum_{1 \le i < j \le m} N(E_i E_j) - \ldots + (-1)^m N(E_1 \ldots E_m).$$

2. Finden Sie, wie viele Zahlen zwischen 1 und 30 es gibt, die relativ prim zu 30 sind.

Aufgabe 3: Es sei x eine reelle Zahl, die zwischen 0 und 1 liegt. Bewiesen sie, dass es unten den Zahlen $\{x, 2x, 3x, \ldots, (n-1)x\}$ mindestens eine gibt, die von einer ganzen Zahl um höchstens $\frac{1}{n}$ abweicht.