Übung 2

Aufgabe 1: Illustriere die folgenden Identitäten

(a) $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right)$,

(b) $\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = 2^n$ (Ü1, Aufgabe 2 (c)) und

(c) $\left(\begin{array}{c} n+1 \\ k+1 \end{array} \right) = \sum_{m=0}^{n} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right)$ (Ü1, Aufgabe 1)

an dem Pascalischen Dreieck.

Aufgabe 2: Zeige $\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) < \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) < \ldots < \left(\begin{array}{c} n \\ \lfloor n/2 \rfloor \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ \lceil n/2 \rceil \end{array} \right) > \ldots > \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right)$, wobei für gerades n die beiden mittleren Koeffizienten zusammenfallen.

Aufgabe 3: Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k y^{n-k}$ gilt (Binomialsatz).

Aufgabe 4: Sei $f_{n,k}$ die Anzahl der k-Untermengen von N, welche kein Paar aufeinanderfolgender Zahlen enthalten. Zeige, dass

$$\text{(a) } f_{n,k} = \left(\begin{array}{c} n-k+1 \\ k \end{array} \right) \quad \text{und} \quad \text{(b) } \sum_{k} f_{n,k} = F_{n+2},$$

wobei F_n die n-te Fibonacci Zahl ist (d.h. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$).

Aufgabe 5: Betrachte die Liste $G(n) = \{G_1, \ldots, G_{2^n}\}$ (für $n = 1$ sei $G(1) = \{0, 1\}$) der 0,1-Wörter der Länge n. Dann ist $G(n+1) = \{0G_1, 0G_2, \ldots, 0G_{2^n}, 1G_{2^n}, 1G_{2^n-1}, \ldots, 1G_1\}$. Diese Liste heißt Gray-Code. Zeige:

1. Je zwei benachbarte 0,1-Wörter in $G(n)$ unterscheiden sich an genau einer Stelle.
2. Sei $G(n,k)$ die Unterfolge von $G(n)$ mit genau k Einsen. Dann unterscheiden sich aufeinanderfolgende Wörter in $G(n,k)$ in genau zwei Stellen.