Übung 10

Aufgabe 1: Zeige, dass eine Baum mindestens so viele Ecken vom Grad 1 hat wie der Maximalgrad beträgt. Wann gilt Gleicheit?

Aufgabe 2: Ein zusammenhängender Graph G habe lauter verschiedene Gewichte auf den Kanten. Zeige, dass G einen eindeutigen minimalen aufspannenden Baum besitzt.

Aufgabe 3: Sei $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Falls U die Menge aller Teilmengen von S mit höchsten zwei Elemente ist, beweise, dass (S, U) ein Matroid ist.

Aufgabe 4: Sei $\mathfrak{P} = (P, G, I)$ eine Inzidenzstruktur. Wir nennen die Elemente von P *Punkte* und die Elemente von G *Geraden*. Die Struktur $\mathfrak{P}$ heißt *projektive Ebene*, falls gilt:

(P1) Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerage, die mit beiden inzidiert.

(P2) Zu je zwei verschiedenen Geraden gibt es genau einen Punkt, der mit beiden inzidiert.

(P3) Es gibt vier Punkte, von denen keine drei mit derselben geraden inzidiert.

(a) Bezeichne P die Menge aller Punkten in der Ebene und G die Menge aller Geraden. Für eine Gerade g sei U_g die Menge aller Geraden, die zu g parallel sind (einschließlich g). Diese Menge heißt *Fernpunkt* und die Menge $\Omega := \{U_g : g \text{ ist Gerade in der Ebene}\}$ die *Ferngerade*. Wir definieren die Mengen P^* und G^* folgendermaßen: $p \in P^*$ nur dann, wenn $p \in P$ oder p ein Fernpunkt ist, und $g \in G^*$ nur dann, wenn $g \in G$ oder g die Ferngerade ist. Wir definieren noch Inzidenz I zwischen Elementen aus P^* und G^* folgendermaßen:

- Falls $p \in P$ und $g \in G$, dann pIg, wenn p und g im gewöhnlichen Sinn inzidieren.
- Falls $p = U_h$ und $g \in G$, dann pIg, wenn g parallel zu h ist.
- Jeder Fernpunkt inzediert mit der Ferngeraden.
- Kein Element aus P inzidiert mit der Ferngeraden.

Bewiese, dass $\mathbb{E}^* = (P^*, G^*, I)$ eine projektive Ebene ist ($\mathbb{E}^*$ heiß die *erweiterte euklidische Ebene*).

(b) Die folgende Inzidenzstruktur $\mathbb{F}_7 = (P, G, I)$ wird als *Fano-Ebene* bezeichnet:

$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$G = \{\{1, 4, 2\}, \{2, 5, 3\}, \{3, 6, 1\}, \{1, 7, 5\}, \{2, 7, 6\}, \{3, 7, 4\}, \{4, 5, 6\}\}$$

$pIg \iff p \in g$ mit $p \in P$, $g \in G$.

Beweise, dass $\mathbb{F}_7$ eine projektive Ebene ist.

(c) Seien P und G definiert wie in (b). Sei U^* die Menge aller Teilmengen von P mit höchsten drei Elementen. Beweise: falls $U := U^* \setminus G$, dann ist (P, U) ein Matroid (*Fano-Matroid* gennant).