Mögliche Prüfungsfragen

I. Kombinatorik

1. Elementare Zählprinzipen

   (a) Summenregel. Beweise $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

   (b) Gleichheitsregel. Finde, wieviele verschiedene Untermengen eine n-Menge besitzt.

   (c) Regel vom zweifachen Abzählen.

2. Fundamentale Zählkoeffizienten

   (a) k-Mengen-Partitionen, k-Zahl-Partitionen und k-Permutationen. Steigende und fallende Faktorielle. Die Anzahl der geordneten k-Zahl-Partitionen von n.

   (b) Multimengen. Die Anzahl der k-Multimengen über einer n-Menge.

   (c) Für zwei endliche Mengen N und R finde $|\mathrm{Abb}(N,R)|$, $|\mathrm{Inj}(N,R)|$ und $|\mathrm{Surj}(N,R)|$.

   (d) Allgemeine Binomialkoeffizienten $\binom{r}{k}$ für $r \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Beweise die Identität in 1 (a) für $n \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ und die Negation.

   (e) Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks. Die Fibonacci-Zahl F_{n+k+1} als die Summe der Zahlen im Pascalschen Dreieck in einer Diagonale (ohne Beweis).

   (f) Vandermonde-Identität.

   (g) Stirling-Zahlen zweiter Art. Beweise die Rekursion $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.

3. Inklusion-Exklusion

   (a) Verschärftes Schubfachprinzip.

   (b) Der Satz von Erdős-Szekeres.

   (c) Die Anzahl der Elementen einer Menge S, die zu gegebenen Untermengen von S nicht gehören. Prinzip der Inklusion-Exklusion.

4. Differenzenrechnung

   (a) Differenzenoperatoren. Eigenschaften. Finde $\Delta x^{\underline{n}}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Stammfunktion. Der Hauptsatz der Differenzenrechnung. Finde eine Stammfunktion von $x^{\underline{n}}$, $x^{\underline{-1}}$ und c^x. Partielle Summation.

(c) Newton-Darstellung eines Polynomes.

5. Erzeugende Funktionen

   (a) Definition. Rechnungen mit erzeugenden Funktionen. Finde $\sum_{n\geq 0} z^n$ und $\sum_{n\geq 0} \binom{c}{n} z^n$ für $c \in \mathbb{C}$.

   (b) Reflektiertes Polynom. Eigenschaften. Definition von Rekursion der Länge d. Äquivalente Bedingungen, dass $f(n+d) + q_1 f(n+d-1) + \ldots + q_d f(n) = 0$. Idee des Beweises und der Beweis, dass $V_2 \subseteq V_1$ und $V_3 \subseteq V_2$.

6. Asymptotische Analyse. Definiere die Klassen $O(g(n))$, $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$ und die Relationen $\prec$, $\succ$, $\sim$. Gib Bedingungen, äquivalent zu $p(n) \prec q(n)$, $p(n) \succ q(n)$, $p(n) \sim q(n)$, wobei p und q Polynome in n sind.

II. Graphen, Matroide und Algorithmen

1. Graphen. Definitionen und Beispiele. Beweise $\sum_{u \in E} d(u) = 2|K|$ und dass die Anzahl von Ecken ungeraden Grades gerade ist.

2. Graphenrepräsentation

   (a) Definition von der Adjazenzmatrix und der Inzidenzmatrix B. Repräsentation von BB^T.

   (b) Bandbreite eines Graphen. Finde $b(C_n)$.

3. Untergraphen und Zusammenhang.

   (a) Untergraphen. Definitionen. Definitionen von Zusammenhang, Abstand und Durchmesser. Beweise, dass die Abstandsfunktion eine Metrik ist.

   (b) Äquivalente Bedingung, dass ein zusammenhängender Graph bipartit ist.

4. Gerichtete Graphen. Definitionen. Beweise, dass jeder ungerichtete Graph zu einem azyklischen Graphen gemacht werden kann. Beweise, dass jeder azykliche Graph eine Quelle und eine Senke hat.

5. Bäume und aufspannende Bäume

   (a) Definitionen. Äquivalente Bedingungen, dass ein Graph Baum ist.

   (b) Anzahl der aufspannenden Bäume von K_n. Idee des Beweises von $t(n) = n^{n-2}$ (Bijektion f zwischen zwei Mengen). Erläutere an Beispielen, wie f und f^{-1} definiert werden.

6. Breadth-First und Depth-First Suche

(a) Demonstriere BFS oder DFS an einem geeignetem Beispiel.

(b) Beweise die Korrektheit von BFS.

7. Matroide und minimale aufspannende Bäume

   (a) Matroide: Definitionen und Beispiele (Matrizen und Fano-Matroid)

   (b) Zusammenhang zwischen Matroiden und Graphen

   (c) Greedy-Algoritmus. Begründung durch Matroide

8. Kürzeste Wege in Graphen. Algorithmus von Dijkstra (Beweis der Optimalität)

9. Eulersche Graphen und das Problem des chinesischen Postboten

   (a) Charakterisierung der Euler-Graphen

   (b) Konstruktion eines Euler-Zuges. Korrektheit

   (c) Problem des chinesischen Postboten. Beispiel

10. Traveling Salesman-Problem

    (a) NN-Verfahren, DNN-Verfahren und Billigste Inversion

    (b) MST-Heuristik

    (c) Gütegarantie und Einschätzung eines metrischen TSPs

III. Komplexitätstheorie

1. Suchprobleme und Entscheidungsbäume. Definitionen und untere Schranke für die Länge eines (n, q)-Baumes

2. Der Hauptsatz der Suchtheorie

   (a) Zusammenhang zwischen der Längen der Blätter eines (n, q)-Baumes. Existenz eines (n, q)-Baumes (ohne Beweis)

   (b) Hauptsatz. Formulierung und Beweis

   (c) Algorithmus von Huffman

3. Komplexitätsklassen P und NP

Literatur:

1. M. Aigner: Diskrete Mathematik, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2006 (6 Auflage).

2. S. O. Krumke, H. Noltemeier: Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009 (2 Auflage).

3. J. Matoušek, J. Nešetřil: Diskrete Mathematik, Springer, 2002.

4. A. Steger: Diskrete Strukturen 1. Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra, Springer, 2007 (2 Auflage).