TECHNISCHE UNIVERSITÄT
IN DER KULTURHAUPTSTADT EUROPAS
CHEMNITZ

Fakultät für Mathematik
Finanzmathematik
Alois Pichler

Simulation stochastischer Prozesse

Perspective: *Seminar thesis, Bachelor, Master's thesis*
Writing hints: https://www.overleaf.com/read/hdpkgxgjkbgw

Simulation stochastischer Prozesse

Eine gewöhnliche Differentialgleichungen ist beispielsweise

$$\mathrm{d}X_t = a\,X_t\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Dabei ist a eine Konstante und X_t die gesuchte Funktion. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$X_t = c\,\exp(a\,t)$$

(denn $\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = a\,c\,\exp(a\,t) = a\,X_t$, das ist die Gleichung (1)). Die Gleichung kann numerisch „gelöst" werden, indem für den gegebenen Startwert X_{t_0} bei t_0 die Approximationen $X_{t_0+\Delta t}$, $X_{t_0+2\Delta t}$, etc. gemäß der Vorschrift

$$X_{t+\Delta t} = X_t + a\,X_t\,\Delta t$$

gebildet werden: in (1) werden also die Infinitesimale $\mathrm{d}t$ durch ein kleines Δt und $\mathrm{d}X_t$ durch $\Delta X_t \coloneqq X_{t+\Delta t} - X_t$ formal ersetzt. Für gute numerische Approximationen ist natürlich die Schrittweite Δt klein zu wählen (etwa $\Delta t = 0{,}001$).

Eine *stochastische Differentialgleichung* ist[1]

$$\mathrm{d}X_t = a\,X_t\,\mathrm{d}t + b\,X_t\,\mathrm{d}W_t. \tag{2}$$

Der zusätzliche Term „$\mathrm{d}W_t$" entspricht einem neuen, stochastischen (i.e., zufälligem) Term (*Zufallsvariable*) und b ist wieder eine Konstante. Numerisch findet man Approximationen mit der Vorschrift

$$X_{t+\Delta t} = X_t + a\,X_t\,\Delta t + b\,X_t \cdot \mathcal{N}_{\Delta t}, \tag{3}$$

[1] Diese Gleichung (2) heißt die *geometrische Brownsche Bewegung*, siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_Brownian_motion.

wobei $\mathcal{N}_{\Delta t}$ eine Zufallsvariable (Zufallsrealisierung) mit Erwartungswert $\mathbb{E}\,\mathcal{N}_{\Delta t} = 0$ und Varianz $\operatorname{var}(\mathcal{N}_{\Delta t}) = \Delta t$ ist, zum Beispiel $\mathcal{N}_{\Delta t} := \sqrt{\Delta t} \cdot Z$, wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ standard normalverteilte Zufallsvariablen sind.

Für verschiedene Realisierungen der unabhängigen Zufallsvariablen $\mathcal{N}_{\Delta t}$ in (3) ergeben sich unterschiedliche zufällige *Pfade*, auch *Trajektorien* genannt.

Aufgabenstellung

1. Simulieren und plotten Sie einige Pfade für verschiedene Parameter (etwa $a = 0{,}1$ und $b = 0{,}2$) zwischen $t_0 = 0$ und t (für $t = 3$ und $\Delta t = 0{,}001$ wären dazu 3000 Schritte gemäß (3) vonnöten).

2. Erstellen Sie ein Histogramm für X_T (für ein fest gewähltes $T > 0$) empirisch, indem Sie für X_T ausreichend viele Pfade gemäß (3) bis $t = T$ simulieren.

Es können zusätzlich auch andere stochastische Differentialgleichungen untersucht werden, etwa die einfachere Gleichung[2]

$$\mathrm{d}X_t = a\,\mathrm{d}t + b\,\mathrm{d}W_t$$

oder der Ornstein-Uhlenbeck Prozess

$$\mathrm{d}X_t = \theta(\mu - X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t.$$

Gutes Gelingen!

[2] Arithmetische Brownsche Bewegung