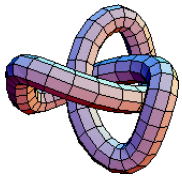
TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK



Maximierung des zweitkleinsten Eigenwertes der Laplace-Matrix eines Graphen durch Hinzufügen von Kanten

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Wirtschaftsmathematiker

(Dipl.-Math. oec.)

eingereicht von

Sandro Grunert

geboren am 10. Dezember 1985 in Leipzig

Technische Universität Chemnitz

Fakultät für Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Christoph Helmberg

Chemnitz, 29. November 2013

Aufgabenstellung

Der zweitkleinste Eigenwert der Laplace-Matrix eines Graphen wird wegen seiner engen Beziehung zum Zusammenhang des Graphen auch als algebraische Konnektivität bezeichnet. Es soll für einfache Graphenklassen untersucht werden, inwieweit sich dieser Zusammenhang durch Hinzufügen einzelner Kanten vergrößern lässt. Eventuell soll dies auch unter der Berücksichtigung von Gewichtsumverteilungen betrachtet werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Notwendige Begriffe und Beobachtungen **3**
2.1 Grundlagen zu Graphen 3
2.2 Symmetrische Matrizen 7
2.3 Das Spektrum eines Graphen 10
2.4 Der zweitkleinste Eigenwert eines Graphen 13

3 Maximierung des zweitkleinsten Eigenwertes durch Hinzufügen einer Kante **14**
3.1 Schranken für den zweitkleinsten Eigenwert beim Hinzufügen einer Kante . 14
3.2 Fiedler-Vektoren und Modifikationen eines Graphen 16
3.3 Pfade und Kreise 21
3.4 Sternähnliche Bäume 36
3.5 Vollständig multipartite Graphen und ganzzahlige Spektren 61

4 Maximierung des zweitkleinsten Eigenwertes durch Hinzufügen mehrerer Kanten **67**
4.1 Formulierungen des Optimierungsproblems 67
4.2 Sterne 71

5 Fazit und Ausblick **78**

A Numerische und algebraische Berechnungen **i**

Tabellenverzeichnis **xiii**

Abbildungsverzeichnis **xiv**

Abkürzungen und Symbole **xv**

Literaturverzeichnis **xviii**

Danksagung **xxii**

Eidesstattliche Erklärung **xxiii**

1 Einleitung

Das Jahr 2013 konfrontiert die Menschen mit einem massiven Anstieg der Weltbevölkerung. Nach Überschreitung der Sieben-Milliarden-Marke bleibt die Aussicht auf ein auch zukünftig rapides Wachstum. Der natürliche Lebensraum eines jeden Individuums wächst hingegen nicht in diesem Maße. Viele für die Existenz und Entwicklung essentielle Rohstoffe unterliegen einer gewissen Knappheit und vor dem Hintergrund dieses problematischen Werdegangs treten zwei offenkundige Möglichkeiten hervor, mit einer solchen Situation umzugehen: Entweder die Menschheit steht der eigenen Entwicklung tatenlos gegenüber, nimmt mehr und mehr Lebensraum ein und liefert sich einer natürlichen Selektion und Minderung ihres Bestandes über steigende Hungersnöte aus oder sie setzt auf technischen Fortschritt und Innovationen, die das gemeinsame Leben effizienter gestalten, so dass aus einer vorgegebenen Menge von Ausgangsressourcen ein erhöhter Mehrwert produziert werden kann, welchen die Versorgung einer wachsenden Bevölkerung erfordert. Die erstgenannte Methode erscheint grob fahrlässig und moralisch bedenklich, löst jedoch das Problem der Überbevölkerung in radikaler Manier. Letztere Vorgehensweise benötigt hohen Zeitaufwand und steht im Wettlauf zum stetig sinkenden Ressourcenangebot der Natur und einem schrumpfenden Pro-Kopf-Lebensraum, solange sich eine Umsiedlung auf einen anderen Planeten als utopisch erweist.

Der Mensch hat sich augenscheinlich für den technischen Fortschritt entschieden und organisiert zahlreiche Ebenen seines Lebens in Netzwerken, um eine Struktur im sich ausbreitenden Wirrwarr von Interaktionen zu schaffen. Beispiele hierfür sind Städte, die durch Straßen verbunden werden, Computer und Telefone, die mittels Stromleitungen kommunizieren, Unternehmen, die als Gesamtheit einzelner Abteilungen fungieren oder ganze Staaten, die im internationalen Wettbewerb konkurrieren. Mit Rücksicht auf die fortschreitende Ausbreitung des Menschen über den gesamten Planeten stellt sich die Frage, wie solche Netzwerke in optimaler Weise unter gewissen Nebenbedingungen – z. B. ökonomischen Effizienzzielen oder umweltschonenden Restriktionen – zu erweitern sind.

Anstatt all diese Probleme einzeln zu betrachten und in mühseliger Mosaikarbeit jeweils passende Lösungen zu suchen, ist es ratsam, auf ein allgemeines, abstrahierendes Modell eines Netzwerks zurückzugreifen, einen Indikator zu definieren, der die Güte des bestehenden Zusammenhangs bewertet und herauszufinden, inwiefern sich dieser Indikator verbessert, wenn dem Netzwerk neue Verbindungen hinzugefügt werden. Das mathematische Teilgebiet der Graphentheorie beschäftigt sich mit solchen Modellen von miteinander verbundenen Knotenpunkten – den Graphen, vgl. Definition 2.1 – und führt den Begriff des Zusammenhangs eines Graphen per Existenz eines verbindenden Pfades zwischen je zwei Knoten des Graphen ein, vgl. Definition 2.9. Eine derartige Begriffsbildung bestimmt jedoch kein Maß, welches sich erhöht, wenn einem bereits zusammenhängenden Graphen verbindende Kanten hinzugefügt werden.

Die Spektrale Graphentheorie stellt als Teildisziplin der Diskreten Mathematik einen nützlicheren Indikator für den Zusammenhang eines Graphen bereit. Als Schnittstelle zwischen der Graphentheorie und Linearen Algebra bedient sie sich umfangreicher Kenntnisse über Matrizen und wendet diese zur strukturellen Untersuchung von Graphen an. Hierbei gibt es verschiedene Möglichkeiten, einem Graphen eine Matrix zuzuordnen. Die Feststellungen aus Abschnitt 2.3 begründen, warum diese Arbeit keine andere als die Laplace-Matrix verwendet, um das Spektrum eines Graphen zu definieren. Der zweitkleinste Eigenwert der Laplace-Matrix erweist sich als sinnvoller Indikator für den Zusammenhang des dazugehörigen Graphen. So zeigen die Abschnitte 2.3 und 2.4, dass dieser Eigenwert genau

dann gleich Null ist, wenn sich der Graph als unzusammenhängend erweist und für einen zusammenhängenden Graphen entspricht der zweitkleinste Eigenwert einer echt positiven Zahl. Ferner bezeugt Abschnitt 3.1, dass sich der zweitkleinste Eigenwert nicht verringern wird, wenn einem Graphen eine oder mehrere Kanten hinzuzufügen sind.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für einfache Graphenklassen herauszufinden, welche Kanten beim Hinzufügen den zweitkleinsten Eigenwert und damit in gewisser Weise den Zusammenhang eines Graphen maximieren.

In Abschnitt 2 werden für ein Verständnis dieser Arbeit unerlässliche Grundlagen dargeboten. So beschäftigen sich die Ausführungen in Abschnitt 2.1 mit notwendigen Begriffen und Erkenntnissen aus der Graphentheorie und Abschnitt 2.2 präsentiert einen kurzen Abriss der Spektraltheorie symmetrischer Matrizen. Schließlich sind alle Voraussetzungen erfüllt, die Laplace-Matrix eines Graphen mit ihren elementaren Eigenschaften in Abschnitt 2.3 einzuführen und ihren zweitkleinsten Eigenwert in Abschnitt 2.4 unter die Lupe zu nehmen.

Als Schwerpunkt der Arbeit studiert Abschnitt 3 die Maximierung des zweitkleinsten Eigenwertes einfacher Graphenklassen auf das Hinzufügen von genau einer Kante. Nach einer Formulierung des Optimierungsproblems dienen in Abschnitt 3.1 obere und untere Schranken für den zweitkleinsten Eigenwert beim Hinzufügen einer Kante dazu, diesen als ein Maß für den Zusammenhang eines Graphen in Abhängigkeit der Einträge eines Fiedler-Vektors und damit in Bezug auf die Position der neuen Kante im Graphen zu erkennen. Abschnitt 3.2 taucht tiefer in die Materie der Fiedler-Vektoren ein und liefert eine Reihe von Hilfsresultaten über die Auswirkungen gewisser Graphenmodifikationen auf den zweitkleinsten Eigenwert. Mit diesen Lemmata steht ein genügend großes Sortiment an Werkzeugen bereit, in den Abschnitten 3.3, 3.4, 3.5 die Graphenklassen der Pfade, Kreise, sternähnlichen Bäume und vollständig multipartiten Graphen zu analysieren.

Abschnitt 4 behandelt einen kurzen Einstieg in das Hinzufügen mehrerer Kanten. Nach der Formulierung zweier Optimierungsprobleme und konvexer sowie semidefiniter Relaxierungen in Abschnitt 4.1 wird in Abschnitt 4.2 die einfache Graphenklasse der Sterne auf die Maximierung des zweitkleinsten Eigenwertes beim Hinzufügen mehrerer Kanten untersucht. Schlussendlich unterbreitet der Anhang numerische und algebraische Berechnungen, die für einige Beweise über das CAS Maple 12 durchgeführt wurden. Ein Datenträger mit dem entsprechenden Maple-Worksheet `Grunert_Berechnungen.mw` und einer PDF-Fassung dieser Arbeit liegt bei.

Hinter allen geschilderten Behauptungen fremder Autoren ist eine eingeklammerte Literaturangabe für den dazugehörigen Beweis zu finden. Diese Quelle bezeichnet einen von mir gelesenen Vorschlag unter weiteren möglichen. Sollte darüber hinaus ein Beweis direkt nach der Aussage angegeben werden, weil er eine echte Alternative zum Literaturvorschlag beschreibt oder von mir als notwendig für das genaue Verständnis der Behauptung und nachfolgender Zusammenhänge erachtet wird, so erfolgte dieser mit eigener Gedankenleistung – sofern nicht explizit anders erwähnt.

In den zentralen Beweisen dieser Arbeit werden häufig Hilfssätze benutzt, deren Angabe ohne nähere Erläuterung stattfindet, vgl. z. B. Abschnitt 3.2. Eine Beweisskizzierung zum tieferen Verständnis jener Hilfsaussagen würde die Einführung in einen zusätzlichen, umfassenden Theoriezweig erfordern und den Fokus auf wesentliche Resultate stören. So kommen die Beweise der Lemmata 3.3 (ii) bis (iv), 3.10 (ii), 3.16 (i), (ii), 3.26, 3.44 und des Korollars 3.11 nicht ohne eine von Kirkland et al. entwickelte Technik der Perron-Komponenten und Flaschenhals-Matrizen aus [13, 41–43]. Grundlagen hierzu liefert die Perron-Frobenius-Theorie für positiv semidefinite Matrizen [37, Kapitel 8.2 bis 8.4].

2 Notwendige Begriffe und Beobachtungen

Ein zweifelsfreies Verständnis der Untersuchungen in dieser Arbeit zu spektralen Eigenschaften von Graphen und deren Notation setzt grundlegende Definitionen und Ergebnisse aus der Graphentheorie und Linearen Algebra voraus. Demzufolge werden in diesem Abschnitt erforderliche Kenngrößen zu Graphen, Besonderheiten symmetrischer Matrizen, das Spektrum der Laplace-Matrix eines Graphen und der zweitkleinste Eigenwert dieses Spektrums vorgestellt.

2.1 Grundlagen zu Graphen

Die Notation folgender Begriffe aus der Graphentheorie orientiert sich zumeist an [5, 12]:

Definition 2.1 (Graph)

Ein geordnetes Paar $G = (N, E)$ aus einer endlichen Menge $N := \{1, 2, \ldots, n\}$ von Knoten und einer Menge $E \subseteq \binom{N}{2} := \left\{\{i, j\} : i, j \in N;\, i \neq j\right\}$ von Kanten heißt Graph. Für die Kantenmenge eines Graphen G wird ebenfalls $E(G)$ geschrieben und $ij := \{i, j\}$ sei diejenige Kante, welche die Knoten i und j verbindet. Mit $|N| = n$ wird die Anzahl der Elemente der Menge N bezeichnet und falls $N = E = \emptyset$ gilt, so sei $G = \emptyset$.

Unter einem Graphen ist in dieser Arbeit ausschließlich die ungerichtete Variante ohne Schlingen und Mehrfachkanten zu verstehen.

Definition 2.2 (Inzidenz, Adjazenz)

Gegeben sei ein Graph $G = (N, E)$. Ein Knoten aus N und eine Kante aus E heißen inzident, wenn der Knoten ein Element der Kante darstellt. Zwei Knoten $i, j \in N$ werden adjazent genannt, falls $ij \in E$ gilt. Ferner sind zwei Kanten aus E als inzident zu bezeichnen, wenn sie sich einen Knoten aus N teilen.

Definition 2.3 (Isomorphie von Graphen, vollständiger Graph)

Zwei Graphen $G = (N, E)$ und $G' = (N', E')$ heißen isomorph, kurz $G \cong G'$, falls eine Bijektion $\varphi : N \to N'$ mit $ij \in E \Leftrightarrow \left\{\varphi(i), \varphi(j)\right\} \in E'$ existiert. In diesem Fall definiert φ einen Isomorphismus zwischen beiden Graphen. Gilt $ij \in E$ für je zwei Knoten $i, j \in N$, so wird G als vollständig bezeichnet und K_n für jeden zu G isomorphen Graphen auf n Knoten geschrieben.

Es ergibt sich sofort $|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ für die vollständige Kantenmenge.

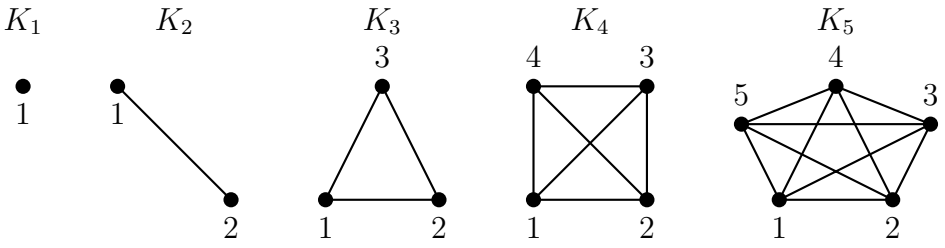


Abbildung 2.1: Vollständige Graphen

Isomorphie von Graphen erzeugt als Äquivalenzrelation eine disjunkte Zerlegung der Menge aller Graphen in Äquivalenzklassen. Zwei Graphen G und G' liegen genau dann in derselben Äquivalenzklasse, wenn sie isomorph sind. Alle in dieser Arbeit verwendeten

Eigenschaften von Graphen, insbesondere deren Spektren, bleiben für je zwei isomorphe Graphen invariant. Anschaulich sind zwei Graphen genau dann isomorph, wenn sie sich durch Umbenennung ihrer Knoten ineinander überführen lassen. Es ist Abbildung 2.2 zu nachstehender Definition zu betrachten:

Definition 2.4 (Untergraph, induzierter Untergraph, Komplement)

Für zwei Graphen $G = (N, E)$ und $G' = (N', E')$ mit $N' \subseteq N$ sowie $E' \subseteq E \cap \binom{N'}{2}$ wird $G' \subseteq G$ geschrieben und G' als Untergraph von G bezeichnet. Falls darüber hinaus $E' = E \cap \binom{N'}{2}$ erfüllt ist, so heißt G' von seiner Knotenmenge in G aufgespannt bzw. induzierter Untergraph von G und wird als $G[N']$ erkannt. Ein Untergraph $G' \subseteq G$ mit $N' = N$ heißt aufspannend und $\overline{G} = \left(N, \binom{N}{2} \setminus E\right)$ ist das Komplement von G.

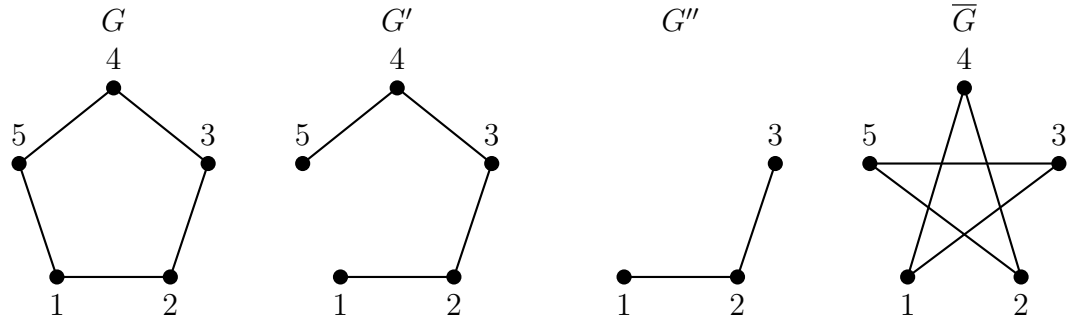


Abbildung 2.2: Ein Graph G, isomorph zu seinem Komplement, mit Untergraphen G', G'', wobei G'' induziert ist und G' nicht.

Für eine Teilmenge $U \subseteq N$ bezeichnet $G - U := G[N \setminus U]$ den Graphen, welcher aus $G = (N, E)$ entsteht, wenn alle Knoten aus U inklusive inzidenter Kanten gelöscht werden. Im Falle einer einelementigen Menge $U = \{i\}$ ist $G - i$ zu schreiben. Darüber hinaus stellt der Graph $G \dot{+} G' = (N \cup N', E \cup E')$ die direkte Summe zweier Graphen $G = (N, E)$ bzw. $G' = (N', E')$ mit $N \cap N' = \emptyset$ dar und für $N' = \{v\}$, $E' = \emptyset$ wird $G \dot{+} v$ notiert. Ist F eine beliebige Teilmenge von $\binom{N}{2}$, so soll $G - F := (N, E \setminus F)$ bzw. $G + F := (N, E \cup F)$ gesetzt und $G \pm ij$ für ein einelementiges $F = \{ij\}$ geschrieben werden.

Definition 2.5 (Knotengrad, isolierter Knoten)

Unter dem Grad $d_G(i) := \left|\left\{j \in N : ij \in E\right\}\right|$ eines Knotens $i \in N$ wird die Anzahl der zu i adjazenten Knoten bzw. inzidenten Kanten im Graphen $G = (N, E)$ verstanden. Ein Knoten vom Grad Null heißt isoliert.

Definition 2.6 (Minimal-, Maximal- und Durchschnittsgrad)

Ist ein Graph $G = (N, E)$ gegeben, so wird über

$$\delta(G) := \min_{i \in N} d_G(i) \qquad \text{der Minimalgrad von } G,$$

$$\Delta(G) := \max_{i \in N} d_G(i) \qquad \text{der Maximalgrad von } G,$$

$$d(G) := \sum_{i \in N} \frac{d_G(i)}{|N|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_G(i)}{n} \qquad \text{der Durchschnittsgrad von } G$$

definiert und $\varepsilon(G) := |E| / |N|$ für das Verhältnis von Kanten zu Knoten in G geschrieben.

Neben der Ungleichung $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$, welche direkt aus Definition 2.6 folgt, ergibt sich $\varepsilon(G) = \frac{d(G)}{2}$ sofort über $\sum_{i \in N} d_G(i) = 2|E|$, denn beim Zusammenzählen der

Grade aller Knoten eines Graphen ist jede Kante genau zwei Mal über ihre inzidenten Knoten zu zählen.

Definition 2.7 (Pfad, Kreis)

Der Graph $P_{n-1} = (N, E)$ mit $E = \big\{\{i, i+1\} : i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\big\}$ bezeichnet für $n \geq 2$ einen Pfad der Länge $n-1$ und unter $C_n = P_{n-1} + 1n$ ist ein Kreis der Länge $n \geq 3$ zu verstehen, vgl. Abbildung 2.3.

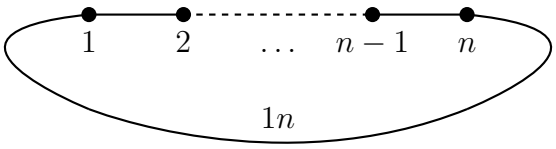


Abbildung 2.3: $P_{n-1} + 1n = C_n$

Definition 2.8 (Abstand, Taillenweite, Umfang, Durchmesser, Radius)

Gegeben sei ein Graph $G = (N, E)$. Die Länge eines kürzesten Pfades zwischen zwei Knoten $i, j \in N$ beschreibt deren Abstand $d_G(i, j)$ und falls kein solcher Pfad existiert, wird $d_G(i, j) = \infty$ gesetzt. Weiterhin bezeichnet

$$g(G) \coloneqq \begin{cases} \infty & \text{wenn } \nexists\, C_k \subseteq G \ \forall\, k \in N, \\ \min\limits_{C_k \subseteq G} k & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{die Taillenweite von } G,$$

$$p(G) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{wenn } \nexists\, C_k \subseteq G \ \forall\, k \in N, \\ \max\limits_{C_k \subseteq G} k & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{den Umfang von } G,$$

$$\operatorname{diam}(G) \coloneqq \max_{i,\, j \in N} d_G(i, j) \qquad \text{den Durchmesser von } G,$$

$$\operatorname{rad}(G) \coloneqq \min_{i \in N} \max_{j \in N} d_G(i, j) \qquad \text{den Radius von } G.$$

Aus Definition 2.8 folgt sofort, dass der Abstand zweier Knoten eines Graphen eine Metrik auf seiner Knotenmenge beschreibt. Werden nun $k, l, m \in N$ mit $\operatorname{diam}(G) = d_G(k, l)$ sowie $\operatorname{rad}(G) = \max_{i \in N} d_G(i, m)$ gewählt, so liefern die Symmetrie und die Dreiecksungleichung der Metrik gerade $\operatorname{diam}(G) = d_G(k, l) \leq d_G(k, m) + d_G(m, l) \leq 2 \operatorname{rad}(G)$ und schließlich $\operatorname{rad}(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2 \operatorname{rad}(G)$.

Definition 2.9 (Zusammenhangskomponente, Knoten- und Kantenzusammenhang)

Ein Graph $G = (N, E)$ ist zusammenhängend, falls $d_G(i, j) < \infty \ \forall\, i, j \in N,\ i \neq j$ gilt, anderenfalls heißt G unzusammenhängend. Es sei $N_1, N_2, \ldots, N_k \subseteq N$ mit $k \geq 1$ und $\bigcup_{i=1}^{k} N_i = N$ eine disjunkte Zerlegung der Knotenmenge von G, so dass zwei adjazente Knoten des Graphen in der gleichen Knotenmenge N_i liegen. Die k induzierten Untergraphen $G[N_i]$ heißen Zusammenhangskomponenten von G. Ein Graph wird k-zusammenhängend genannt, wenn er mindestens $k+1$ Knoten besitzt und nach dem Entfernen von beliebigen $k-1$ Knoten inklusive inzidenter Kanten noch zusammenhängend ist. Analog heißt ein Graph l-kantenzusammenhängend, wenn er nach dem Entfernen von beliebigen $l-1$ Kanten noch zusammenhängend ist. Für einen Graphen G bezeichnet

$$v(G) \coloneqq \max\{k : G \text{ ist } k\text{-zusammenhängend}\} \qquad \text{den Knotenzusammenhang,}$$

$$e(G) \coloneqq \max\{l : G \text{ ist } l\text{-kantenzusammenhängend}\} \qquad \text{den Kantenzusammenhang.}$$

Es ist $v(K_n) = n - 1$ zu vereinbaren und mit $G \neq K_1$ wird $v(G) = e(G) = 0$ genau dann erfüllt, wenn G unzusammenhängend ist.

Beobachtung 2.10 (vgl. z. B. [12, Proposition 0.4.2])

Für einen beliebigen Graphen $G = (N, E)$ gilt $v(G) \leq e(G) \leq \delta(G)$.

Definition 2.11 (Wald, Baum, Blatt)

Ein Graph heißt Wald, sofern er keine Kreise enthält. Unter einem Baum ist ein zusammenhängender Wald zu verstehen. Ein Knoten i eines Baumes T mit $d_T(i) = 1$ wird Blatt des Baumes genannt.

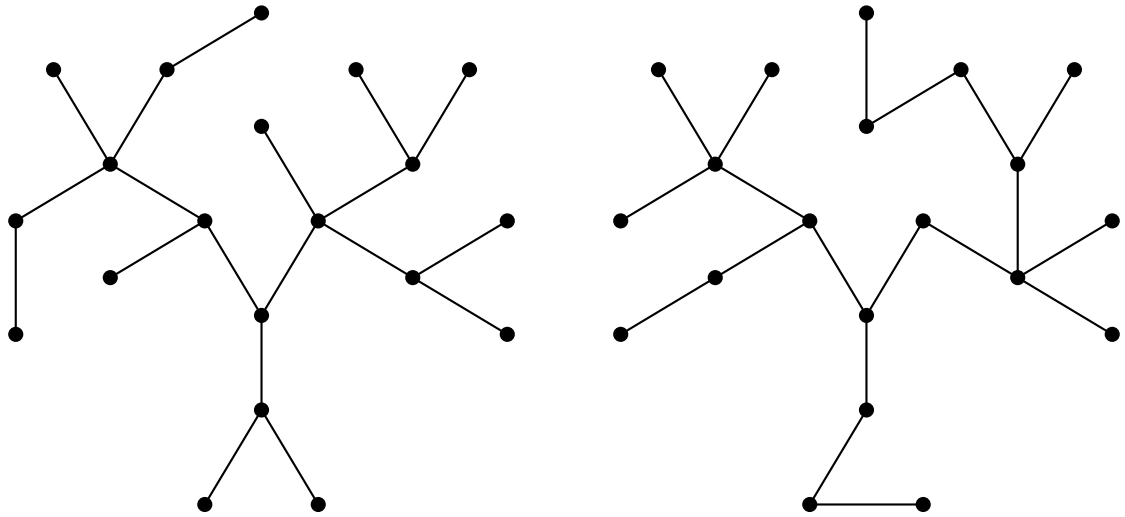


Abbildung 2.4: Ein Wald aus zwei Bäumen

Beobachtung 2.12 (vgl. z. B. [44, Satz 2.4] und [12, Satz 0.5.1, Korollar 0.5.3])

Für einen Graphen $T = (N, E)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Der Graph T ist ein Baum;

(ii) Der Graph T hat $n - 1$ Kanten und enthält keine Kreise;

(iii) Der Graph T hat $n - 1$ Kanten und ist zusammenhängend;

(iv) Zwischen je zwei Knoten enthält T einen eindeutig bestimmten Pfad;

(v) Der Graph T ist zusammenhängend, aber für alle $ij \in E$ ist $T - ij$ unzusammenhängend;

(vi) Der Graph T enthält keine Kreise, aber für je zwei nicht adjazente Knoten $i, j \in N$ besitzt $T + ij$ einen Kreis.

Definition 2.13 (Multipartiter Graph)

Existieren $r \geq 2$ disjunkte Knotenmengen $N_1, N_2, \ldots, N_r \subseteq N$ mit $\bigcup_{i=1}^{r} N_i = N$ derart, dass zwei adjazente Knoten von $G = (N, E)$ nicht in der gleichen Knotenmenge N_i liegen, so ist von einem r-partiten bzw. multipartiten Graphen G zu sprechen. Falls je zwei Knoten aus verschiedenen Knotenmengen N_i, N_j adjazent sind, so heißt G vollständig r-partit und wird mit $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ für $|N_i| = n_i$ bzw. mit K_s^r für $|N_1| = |N_2| = \ldots = |N_r| = s$ benannt. Ein 2-partiter Graph ist alternativ als bipartit zu bezeichnen.

2.2 Symmetrische Matrizen

Für die Definition des Spektrums eines Graphen, den damit zusammenhängenden Matrizen und das Verständnis derer spezifischen Eigenschaften ist eine Auseinandersetzung mit der Spektraltheorie symmetrischer Matrizen wesentlich. Sämtliche nicht explizit bewiesenen Aussagen dieses Abschnittes sind aus Grundkursen über die Lineare Algebra bekannt. Deren Beweise tauchen z. B. in [20, 21, 37] auf.

Es bezeichne $M_{m,n}(\mathbb{R})$ den linearen Raum aller $m \times n$-Matrizen $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ mit Einträgen b_{ij} aus der Menge reeller Zahlen $\mathbb{R}$ und $M_n(\mathbb{R})$ die Menge aller solcher $n \times n$-Matrizen. Für $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ beschreibt $B^\top \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ die transponierte Matrix und für $B \in M_n(\mathbb{R})$ wird mit $\det(B)$ die Determinante benannt. Unter $I = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_n\big(\{0,1\}\big)$ ist die übliche Einheitsmatrix zu verstehen, wobei δ_{ij} das bekannte Kronecker-Symbol verkörpert.

Eine Untermatrix der Ordnung s von $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ist eine $s \times s$-Matrix, welche aus B durch Streichen von $m - s$ Zeilen und $n - s$ Spalten entsteht. Die Determinante einer Untermatrix der Ordnung s heißt Minor der Ordnung s. Es wird gesagt, dass $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ den Rang s hat und $\operatorname{rg}(B) = s$ geschrieben, wenn B einen von Null verschiedenen Minor der Ordnung s besitzt und alle Minoren von größerer Ordnung als s gleich Null sind. Alternativ ist der Rang einer Matrix als die maximale Anzahl ihrer linear unabhängigen Zeilen oder Spalten zu erkennen.

Mit $\langle x, y\rangle := x^\top y$ und $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ werden das übliche Skalarprodukt und die euklidische Norm von Vektoren $x, y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind orthogonal, falls $\langle x, y\rangle = 0$ gilt. Eine Menge $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ von Elementen aus dem $\mathbb{R}^n$ heißt Orthogonalsystem, wenn $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ für alle $i \neq j$ ist, Orthonormalsystem, wenn $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle i, j gilt, Orthogonalbasis, wenn die Menge gleichzeitig ein Orthogonalsystem und eine Basis ist, Orthonormalbasis, wenn die Menge sowohl ein Orthonormalsystem als auch eine Basis darstellt.

Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ wird Eigenwert von $B \in M_n(\mathbb{C})$ genannt, wenn es ein Element $y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $B\,y = \lambda\,y$ gibt. Jedes solche Element y heißt zu λ gehörenden Eigenvektor. Die Menge $U_\lambda := \{y : A\,y = \lambda\,y\}$ ist der zu λ gehörende Eigenunterraum, dessen Dimension die geometrische Vielfachheit $\gamma(\lambda)$ des Eigenwertes λ bezeichnet. Es wird $\lambda(B)$ oder einfach nur λ geschrieben, wenn aus dem Kontext klar ist, dass λ ein Eigenwert von B sein soll. Für $B \in M_n(\mathbb{C})$ ist $\chi_B(\lambda) := \det(B - \lambda\,I)$ das charakteristische Polynom. Die Menge der komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms, das heißt die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\det(B - \lambda\,I) = 0$, wird Spektrum von B genannt und mit $\operatorname{sp}(B)$ bezeichnet. Die Menge aller Eigenwerte von $B \in M_n(\mathbb{R})$ ist als $\operatorname{sp}(B) \cap \mathbb{R}$ zu erkennen. Unter der algebraischen Vielfachheit $\alpha(\lambda)$ eines Eigenwertes $\lambda(B)$ wird die Vielfachheit von λ als Nullstelle von $\det(B - \lambda\,I)$ verstanden. Ein Eigenwert λ heißt einfach, wenn $\alpha(\lambda) = 1$ gilt.

Definition 2.14 (Orthogonale Matrix, symmetrische Matrix)

Eine Matrix $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_n(\mathbb{R})$ wird orthogonal genannt, wenn ihre Spalten ein Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^n$ mit dem üblichen Skalarprodukt bilden, das heißt, wenn die Beziehung $b_{1j}\,b_{1k} + \ldots + b_{nj}\,b_{nk} = \delta_{jk}\ \forall\, j,\, k$ gilt. Ferner heißt B symmetrisch, falls $B = B^\top$ bzw. äquivalent dazu $\langle B\,x, y\rangle = \langle x, B\,y\rangle\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt wird. Es ist S_n für die Menge aller symmetrischen $n \times n$-Matrizen zu schreiben.

Ist B eine orthogonale Matrix, so bilden offenbar auch die Zeilen von B ein Orthonormalsystem, es gilt $B^\top B = B\,B^\top = I$ und dies liefert die Invertierbarkeit von B mit $B^{-1} = B^\top$. Weiterhin wird $\det B \in \{-1, 1\}$ erfüllt und die Eigenwerte einer orthogonalen

Matrix liegen in $\{-1, 1\}$. Zu verschiedenen Eigenwerten gehörende Eigenvektoren sind orthogonal.

Eine Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$, die selbst einen linearen Raum darstellt, wird Unterraum genannt und mit $U^\perp := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = 0 \ \forall\, y \in U\right\}$ ist das orthogonale Komplement von U zu bezeichnen. Die Aufspannung oder lineare Hülle $\operatorname{span}(U)$ eines Unterraumes $U \subseteq \mathbb{R}^n$ beschreibt den Durchschnitt aller Unterräume des $\mathbb{R}^n$, die U enthalten und fällt als bzgl. Mengeninklusion kleinster solcher Unterraum mit der Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus U mit reellen Koeffizienten zusammen.

Symmetrische Matrizen zeigen eine besonders freundliche Struktur beim Auffinden ihrer Spektren, wie es das nachstehende Resultat zeigt:

Satz 2.15 (Spektralsatz für symmetrische Matrizen, vgl. z. B. [37, Theorem 2.5.6])

Jede Matrix $B \in S_n$ erfüllt $\operatorname{sp}(B) \subseteq \mathbb{R}$, hat mindestens einen Eigenwert und zu verschiedenen Eigenwerten gehörende Eigenvektoren sind orthogonal. Bezeichnet $\Lambda := (\lambda_i\, \delta_{ij})_{i,j=1}^n$ die Matrix mit den reellen Eigenwerten von B auf ihrer Hauptdiagonalen, so existiert eine orthogonale Matrix $V \in M_n(\mathbb{R})$ mit $B = V\,\Lambda\,V^\top$.

Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix werden in dieser Arbeit stets aufsteigend über $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ sortiert. Aus Satz 2.15 folgt $\gamma(\lambda_k) = \alpha(\lambda_k)$ für $k \in N$ und ist hierbei von dazugehörigen Eigenvektoren $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Rede, so bezeichnet y_k einen Eigenvektor zu λ_k. Es sei z. B. $\alpha(\lambda_2) = 3$, dann folgt $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ und y_2, y_3, y_4 spannen den Eigenunterraum U_{λ_2} auf. Trotzdem bleibt es in dieser Ausdrucksweise korrekt, y_k als einen Eigenvektor zu λ_k für $k = 2, 3, 4$ zu bezeichnen, wobei y_k bis auf Multiplikation mit einem Skalar eindeutig bestimmt ist. Es gilt $\sum_{k=1}^n \lambda_k(B) = \sum_{k=1}^n b_{kk} =: \operatorname{tr}(B)$ für die Spur von $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in S_n$ und im Weiteren ist von Interesse, wann eine symmetrische Matrix ausschließlich nichtnegative Eigenwerte besitzt.

Definition 2.16 (Positiv (semi-)definite Matrix)

Eine Matrix $B \in S_n$ heißt positiv semidefinit, falls $\langle B\,x, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist und positiv definit, wenn $\langle B\,x, x\rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt. Es bezeichne S_n^+ die Menge aller positiv semidefiniten $n \times n$-Matrizen und S_n^{++} die Menge aller positiv definiten $n \times n$-Matrizen.

Satz 2.17 (Eigenschaften positiv (semi-)definiter Matrizen)

Für die Matrizen $B, C, D, V \in M_n(\mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $B \in S_n^+$;	(i) $B \in S_n^{++}$;
(ii) $\exists\, C\colon B = C^\top C$;	(ii) $\exists$ invertierbares $C\colon B = C^\top C$;
(iii) $\exists\, D\colon D = D^\top,\ B = D^2$;	(iii) $\exists$ invertierbares $D\colon D = D^\top,\ B = D^2$;
(iv) $\lambda_k(B) \geq 0\ \forall\, k = 1, 2, \ldots, n$;	(iv) $\lambda_k(B) > 0\ \forall\, k = 1, 2, \ldots, n$;
(v) $\exists\, V\colon V^\top V = I,\ B = V\,\Lambda\,V^\top,\ \Lambda \in S_n^+$.	(v) $\exists\, V\colon V^\top V = I,\ B = V\,\Lambda\,V^\top,\ \Lambda \in S_n^{++}$.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (v): Nach Satz 2.15 existiert eine orthogonale Matrix V mit $B = V\,\Lambda\,V^\top$, wobei die Spalten von V gerade den Eigenvektoren $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von B entsprechen,

das heißt $\lambda_k = \lambda_k \langle y_k, y_k\rangle = \langle \lambda_k y_k, y_k\rangle = \langle B y_k, y_k\rangle \overset{(}{\geq}) 0$.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v): Es bezeichnet $\lambda_k \overset{(}{\geq}) 0$ genau dann einen Eigenwert von B und y_k einen Eigenvektor zu λ_k, wenn $B y_k = \lambda_k y_k$ gilt, das heißt genau dann, wenn die Beziehung $V^\top B V = \Lambda \in S_n^{+(+)}$ hält, falls die Spalten von V gerade den Eigenvektoren $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von B entsprechen.

(v) $\Rightarrow$ (iii): Dies ergibt sich über $D \coloneqq \Lambda^{\frac{1}{2}} V$ mit $\Lambda^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{\lambda_i}\,\delta_{ij}\right)_{i,j=1}^n$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Für $C \coloneqq D$ wird $B = C^2 = C\,C = C^\top C$ erfüllt.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Mit $B^\top = (C^\top C)^\top = C^\top C = B$ und $\langle B\,x, x\rangle = \langle C^\top C\,x, x\rangle = \langle C\,x, C\,x\rangle \geq 0$ darf gerade $B \in S_n^+$ geschlussfolgert werden. Falls C zusätzlich invertierbar ist, gilt $\langle C\,x, C\,x\rangle = 0 \Leftrightarrow C\,x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. □

Das nun folgende Variationsprinzip erweist sich als äußerst hilfreich für die Bestimmung oberer und unterer Schranken von Eigenwerten einer symmetrischen Matrix:

Satz 2.18 (Courant-Fischer, Rayleigh-Ritz, vgl. z. B. [37, Theoreme 4.2.2, 4.2.11])

Gegeben seien eine Matrix $B \in S_n$ mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$, dazugehörigen Eigenvektoren $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sowie $U_k \coloneqq \operatorname{span}\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $U_0 \coloneqq \{0\}$. Es gilt

$$\lambda_k = \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ x \in U_{k-1}^\perp}} \langle B\,x, x\rangle \tag{2.1}$$

und insbesondere

$$\lambda_1 = \min_{\|x\|_2 = 1} \langle B\,x, x\rangle, \tag{2.2}$$

$$\lambda_2 = \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ \langle x, y_1\rangle = 0}} \langle B\,x, x\rangle, \tag{2.3}$$

$$\lambda_n = \max_{\|x\|_2 = 1} \langle B\,x, x\rangle. \tag{2.4}$$

Mit Satz 2.18 finden sich nachstehende Ungleichungen für die Eigenwerte der Summe zweier symmetrischer Matrizen:

Korollar 2.19 (Courant-Weyl, vgl. z. B. [37, Theorem 4.3.1])

Die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ von $B, C \in S_n$ erfüllen

$$\lambda_k(B) + \lambda_1(C) \leq \lambda_k(B + C) \leq \lambda_k(B) + \lambda_n(C) \;\; \forall\, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Beweis:

Aus Satz 2.18 folgt zunächst

$$\begin{aligned} \lambda_k(B + C) \overset{(2.1)}{=\!=} \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ x \in U_{k-1}^\perp}} \big\langle (B + C)\,x, x\big\rangle \quad &= \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ x \in U_{k-1}^\perp}} \Big[\langle B\,x, x\rangle + \underbrace{\langle C\,x,\, x\rangle}_{\substack{(2.4) \\ \leq \lambda_n(C)}}\Big] \\ \leq \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ x \in U_{k-1}^\perp}} \langle B\,x, x\rangle + \lambda_n(C) &\overset{(2.1)}{=\!=} \lambda_k(B) + \lambda_n(C). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Wird nun B durch $B+C$ und C durch $-C$ in (2.6) ersetzt, so zeigt sich mit

$$\lambda_k(B) = \lambda_k(B+C+(-C)) \overset{(2.6)}{\leq} \lambda_k(B+C) + \underbrace{\lambda_n(-C)}_{\substack{\overset{(2.2)}{=\!=} \\ (2.4)}} - \lambda_1(C)$$

die Behauptung. □

Korollar 2.20 (vgl. z. B. [37, Theorem 4.3.6])

Die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ von $B, C \in S_n$ mit $\operatorname{rg}(C) = r$ erfüllen

$$\lambda_k(B) \leq \lambda_{k+r}(B+C) \leq \lambda_{k+2r}(B) \;\; \forall\, k = 1, 2, \ldots, n-2r. \tag{2.7}$$

Beweis:

Nach Satz 2.15 existiert eine orthogonale Matrix V mit $V^\top C V = (\mu_i \delta_{ij})_{i,j=1}^n$ und $\mu_i = 0$ für $i = r+1, r+2, \ldots, n$ bzw. $\mu_i \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, r$. Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_r$ die zu $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ gehörenden Eigenvektoren der Matrix C und $W_r := \operatorname{span}\{z_1, z_2, \ldots, z_r\}$. Für $k = 1, 2, \ldots, n-r$ liefert Satz 2.18 gerade

$$\begin{aligned} \lambda_k(B) = \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ x \in U_{k-1}^\perp}} \langle Bx, x\rangle \qquad &\leq \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ x \in U_{k-1}^\perp \cap W_r^\perp}} \langle Bx, x\rangle \leq \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ x \in U_{k-1}^\perp \cap W_r^\perp}} \big\langle (B+C)x, x\big\rangle \\ \leq \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ x \in U_{k+r-1}^\perp}} \big\langle (B+C)x, x\big\rangle &= \lambda_{k+r}(B+C). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Analog zum Beweis von Korollar 2.19 ist B durch $B+C$ sowie C durch $-C$ in (2.8) zu ersetzen und es folgt $\lambda_{k+r}(B+C) \leq \lambda_{k+r+r}(B+C+(-C)) = \lambda_{k+2r}(B)$. □

2.3 Das Spektrum eines Graphen

Seit den Anfängen der Spektralen Graphentheorie in den 50er- und 60er-Jahren wurden verschiedene Konzepte zur Definition des Spektrums eines Graphen entwickelt. Die gewöhnliche Variante erfolgt dabei direkt über die Eigenwerte der Adjazenzmatrix eines Graphen. Bis heute lieferten zahlreiche spektrale Untersuchungen der Adjazenzmatrix Schranken für die Eigenwerte im Zusammenhang mit graphentheoretischen Kenngrößen wie dem Durchmesser, Umfang, Knoten- oder Kantenzusammenhang [2, 4, 9, 10, 23].

Definition 2.21 (Adjazenzmatrix)

Für einen Graphen $G = (N, E)$ wird über

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } ij \in E, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

seine Adjazenzmatrix $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n\big(\{0,1\}\big)$ definiert und nur A für die Adjazenzmatrix eines beliebigen Graphen geschrieben oder falls aus dem Kontext klar ist, auf welchen Graphen sich A bezieht. Offenbar gilt $A \in S_n$.

Ein Großteil aller Entwürfe von Spektren für Graphen benutzt diese Matrix bzw. gewisse Modifikationen ihrerseits, so z. B. das Kelmans-Spektrum [38, 39] oder das Seidel-Spektrum [65]. Im Laufe der letzten Jahre kam dem Laplace-Spektrum immer mehr Aufmerksamkeit zugute mit vielseitigen Anwendungen in Physik, Chemie und Mathematik, u. a. in der Kombinatorischen Optimierung, der Untersuchung elektrischer Netzwerke und im Automatischen Lernen [2, 5, 8, 23, 26, 51, 52, 64]. Daher konzentriert sich diese Arbeit auf die Laplace-Matrix eines Graphen, für deren Definition $\mathbf{1} \in M_{n,1}\big(\{1\}\big)$ den Vektor beschreibt, dessen Einträge allesamt gleich Eins sind.

Definition 2.22 (Laplace-Matrix, Spektrum, charakteristisches Polynom des Graphen)

Es sei A die Adjazenzmatrix eines Graphen $G = (N, E)$. Unter $L(G) \coloneqq \operatorname{diag}(A\,\mathbf{1}) - A$ ist die Laplace-Matrix von G zu verstehen und nur L für die Laplace-Matrix eines beliebigen Graphen zu schreiben oder falls aus dem Kontext klar ist, auf welchen Graphen sich L bezieht. Ferner bezeichne $\operatorname{sp}(G) \coloneqq \operatorname{sp}(L)$ das Spektrum von G und $\lambda_k(G) \coloneqq \lambda_k(L)$ seien für $k = 1, 2, \ldots, n$ die Eigenwerte des Graphen als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_G(\lambda) \coloneqq \chi_L(\lambda)$ von G.

Mit einer alternativen Formulierung der Laplace-Matrix L des Graphen $G = (N, E)$ lassen sich ihre grundlegenden Eigenschaften erkennen. Dazu seien $i, j \in N$ zwei verschiedene Knoten von G und $E_{ij} \coloneqq L(G - E + ij)$ diejenige Matrix, deren ii- und jj-Eintrag gleich Eins, ij- und ji-Eintrag gleich minus Eins und alle restlichen Einträge gleich Null sind, das heißt $L = \sum_{ij \in E} E_{ij}$. Wegen $\langle E_{ij}\, x, x\rangle = (x_i - x_j)^2 \geq 0 \;\forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ gilt $E_{ij} \in S_n^+$ und über $\langle L\, x, x\rangle = \sum_{ij \in E}(x_i - x_j)^2 \geq 0 \;\forall\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ ist sofort $L \in S_n^+$ zu erkennen. Nach Satz 2.17 sind alle Eigenwerte eines Graphen nichtnegativ und da laut Definition sämtliche Zeilen- und Spaltensummen einer Laplace-Matrix zu Null verschwinden, gilt $\lambda_1(G) = 0$ mit dazugehörigem Eigenvektor $y_1(G) = \mathbf{1}$. Wird via

$$c_{k,ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k \text{ der Anfangsknoten von } ij \text{ ist,} \\ -1 & \text{wenn } k \text{ der Endknoten von } ij \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die orientierte Inzidenzmatrix $C = (c_{k,ij}) \in M_{n,|E|}\big(\{-1, 0, 1\}\big)$ des Graphen $G = (N, E)$ definiert, so ergibt sich $L = C\,C^\top$. Da der ii-Eintrag der Laplace-Matrix dem Knotengrad $d_G(i)$ für $i \in N$ entspricht, folgt $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(G) = \operatorname{tr}(L) = \sum_{k=1}^{n} d_G(i) = 2\,|E|$, vgl. z. B. [4, Proposition 4.8] und [51, Theorem 2.2].

Für einen unzusammenhängenden Graphen zerfällt das Spektrum in die einzelnen Spektren der Zusammenhangskomponenten des Graphen, wie es die nachfolgende Beobachtung schildert:

Beobachtung 2.23 (vgl. z. B. [23, Lemma 13.1.1])

Es sei $N_1, N_2, \ldots, N_p \subseteq N$ mit $p \geq 1$ und $\bigcup_{i=1}^{p} N_i = N$ eine disjunkte Zerlegung der Knotenmenge eines Graphen $G = (N, E)$, so dass zwei adjazente Knoten des Graphen in der gleichen Knotenmenge N_i liegen. Für die p Zusammenhangskomponenten $G[N_i]$ von G gilt $\operatorname{sp}(G) = \bigcup_{i=1}^{p} \operatorname{sp}\big(G[N_i]\big)$ und $\alpha(\lambda_1(G)) = \alpha(0) = p$.

Beweis:

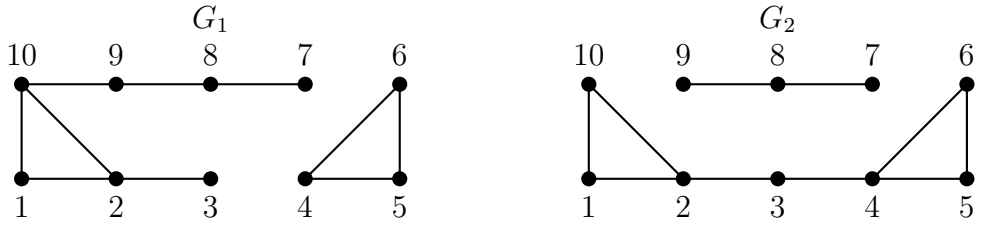
Bezeichnet L_i die Laplace-Matrix von $G[N_i]$ für $i = 1, 2, \ldots, p$ und $p \geq 1$, so ist die Laplace-Matrix L von G blockdiagonal mit Diagonalblöcken $L_1, L_2, \ldots, L_p$.

Es zeigt sich

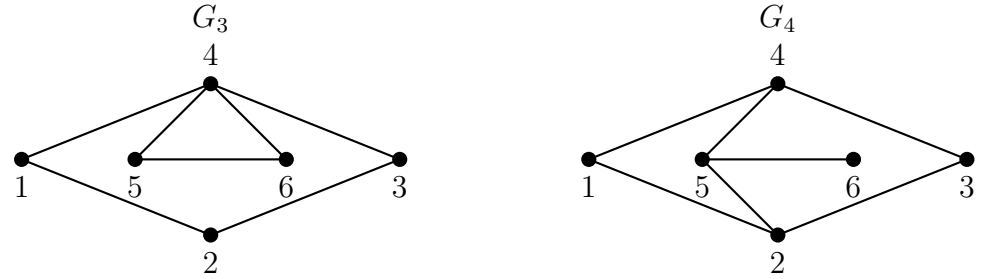
$$\chi_G(\lambda) = \det(L - \lambda I) = \prod_{i=1}^{p} \det(L_i - \lambda I) = \prod_{i=1}^{p} \chi_{G[N_i]}(\lambda)$$

und somit $\operatorname{sp}(G) = \bigcup_{i=1}^{p} \operatorname{sp}\big(G[N_i]\big)$. Die Behauptung folgt nun, wenn $\alpha(\lambda_1(G[N_i])) = 1$ für alle Zusammenhangskomponenten von G erfüllt wird. In der Tat, ist G zusammenhängend, so bezeichnet $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann einen Eigenvektor von G zu $\lambda_1 = 0$, wenn $L\,y = 0 \Leftrightarrow 0 = \langle L\,y, y\rangle = \sum_{ij \in E}(y_i - y_j)^2$ gilt, das heißt, wenn $y = c\,\mathbf{1}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erfüllt wird. Dies muss $1 = \gamma(\lambda_1) = \alpha(\lambda_1)$ bedeuten. □

Beobachtung 2.23 zeigt, dass es keinen Sinn macht, in dieser Arbeit unzusammenhängende Graphen $G = (N, E)$ zu betrachten, für die $G + ij$ mit $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ wiederum unzusammenhängend ist. Somit hat ein jeder unzusammenhängender Graph G, welcher für die Maximierung von $\lambda_2(G + ij)$ herangezogen wird, höchstens zwei Zusammenhangskomponenten. Eine optimale Kantenwahl wird stets diese beiden Zusammenhangskomponenten miteinander verbinden. Analog hat ein unzusammenhängender Graph, dem $p > 1$ Kanten hinzugefügt werden sollen, sinnvollerweise höchstens $p+1$ Zusammenhangskomponenten.



$G_1 \ncong G_2$ mit Spektren $\big\{0,\ 0,\ 2-\sqrt{3},\ 1,\ 3-\sqrt{2},\ 3,\ 3,\ 3,\ 2+\sqrt{3},\ 3+\sqrt{2}\big\}$.



$G_3 \ncong G_4$ mit Spektren $\big\{0,\ 3-\sqrt{5},\ 2,\ 3,\ 3,\ 3+\sqrt{5}\big\}$.

Abbildung 2.5: Isospektrale Graphen

Beim Hinzufügen von Kanten zu einem vorgegebenen Graphen mit dem Ziel, den zweitkleinsten Eigenwert zu maximieren, stellt sich im Zusammenhang mit der Eindeutigkeit einer optimalen Lösung die Frage, welche Varianten des Hinzufügens den zweitkleinsten Eigenwert unberührt lassen. Dazu ist es hilfreich zu wissen, inwiefern ein Graph durch sein Spektrum eindeutig bestimmt wird. Nicht isomorphe Graphen gleichen Spektrums werden als isospektral bezeichnet. Sind G und G' zwei isomorphe Graphen mit Laplace-Matrizen L und L', so existiert offenbar eine Permutationsmatrix $P \in M_n\big(\{0,1\}\big)$ derart, dass $P^\top L'\,P = L$ ist [23, Lemma 8.1.1]. Aus der Orthogonalität von P folgt

$$\begin{aligned}\chi_G(\lambda) &= \det(L - \lambda I) = \det\big(P^{-1}L'\,P - \lambda\,P^{-1}I\,P\big)\\ &= \det\big(P^{-1}\big)\det(L' - \lambda I)\det(P) = \det(L' - \lambda I) = \chi_{G'}(\lambda),\end{aligned}$$

das heißt, isomorphe Graphen haben immer das gleiche Spektrum. Die Umkehrung

gilt im Allgemeinen jedoch nicht, wie es in Abbildung 2.5 zu erkennen ist.

In [11] erwähnen die Autoren, dass von über einer Milliarde Graphen mit 11 Knoten etwa 21 % isospektral bzgl. ihrer Adjazenzmatrix sind, hingegen nur ca. 9 % bzgl. ihrer Laplace-Matrix und verweisen auf [33]. Von über zwei Millionen Bäumen auf 21 Knoten sind rund 21,3 % isospektral bzgl. ihrer Adjazenzmatrix und nur 0,05 % bzgl. ihrer Laplace-Matrix [62]. Das Spektrum der Laplace-Matrix verschluckt daher deutlich weniger Informationen über einen Graphen als jenes der Adjazenzmatrix – ein weiterer Grund, dieses für spektrale Untersuchungen von Graphen zu bevorzugen.

2.4 Der zweitkleinste Eigenwert eines Graphen

Aus Beobachtung 2.23 und Satz 2.24 muss sofort geschlussfolgert werden, dass $\lambda_2(G) > 0$ genau dann gilt, wenn der Graph $G = (N, E)$ zusammenhängend ist. Die enge Beziehung des zweitkleinsten Eigenwertes der Laplace-Matrix eines Graphen zu seinem Zusammenhang veranlasste M. Fiedler im Jahre 1973 dazu, diesen als algebraische Konnektivität zu bezeichnen [18]. Ihm zu Ehren wird heute unter einem Fiedler-Vektor ein zur algebraischen Konnektivität gehörender Eigenvektor $y_2(G)$ verstanden. Der nachstehende Satz beschreibt Fiedlers erste Schranken für $\lambda_2(G)$ hinsichtlich des Knoten- und Kantenzusammenhangs eines Graphen:

Satz 2.24 (vgl. z. B. [18, 19] und Beobachtung 2.10)

Mit $K_n \neq G = (N, E)$, $c_1 := 2\left(\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\pi}{n}\right)$ und $c_2 := 2\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$ gilt

$$2\,e(G)\left(1-\cos\tfrac{\pi}{n}\right) \leq \lambda_2(G) \leq v(G) \leq e(G) \leq \delta(G),$$
$$c_1\,e(G) - c_2\,\Delta(G) \leq \lambda_2(G).$$

Die untere Schranke $c_1\,e(G) - c_2\,\Delta(G)$ ist genau dann echt größer als $2\,e(G)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$, wenn $2\,e(G) > \Delta(G)$ erfüllt wird.

Im Laufe der Jahre folgten weitere Schranken für $\lambda_2(G)$ in Verbindung mit zahlreichen Kenngrößen eines Graphen, wie der Anzahl der Knoten und Kanten, dem Minimal- und Maximalgrad oder dem Durchmesser. Hierzu gibt es exzellente Übersichten [36, 51, 63].

Wird Satz 2.24 speziell auf einen Baum $T = (N, E)$ angewandt, so erweist sich die Ungleichung $\lambda_2(T) \leq 1$ von großer Bedeutung für Abschnitt 3.4. Um dies einzusehen, sollte $1 = \delta(T) = v(T) = e(T)$ aus den Beobachtungen 2.10, 2.12 (i) $\Leftrightarrow$ (v) geschlossen werden. Eine bessere obere Schranke für die algebraische Konnektivität eines Baumes liefern Grone, Merris und Sunder mit folgendem Resultat:

Korollar 2.25 (vgl. z. B. [26, Corollary 4.4])

Für einen Baum $T = (N, E)$ mit $\operatorname{diam}(T) = d$ gilt $\lambda_2(T) \leq 2 - 2\cos\frac{\pi}{d+1}$.

Es wird vermerkt, dass Korollar 2.25 direkt aus (3.8) in Verbindung mit Lemma 3.3 (i) folgt, da sich ein Baum T mit $\operatorname{diam}(T) = d$ aus einem Pfad P_d durch wiederholtes Hinzufügen eines neuen Knotens plus inzidenter Kante konstruieren lässt. Satz 2.18 und die Überlegungen aus Abschnitt 2.3 erzeugen gemäß

$$\lambda_2(G) = \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ \langle x, \mathbf{1}\rangle = 0}} \langle L(G)\,x, x\rangle = \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ \langle x, \mathbf{1}\rangle = 0}} \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2 \tag{2.9}$$

eine erste Charakterisierung der algebraischen Konnektivität eines Graphen $G = (N, E)$.

3 Maximierung des zweitkleinsten Eigenwertes durch Hinzufügen einer Kante

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, einfache Graphenklassen betrachtend, einem Graphen $G = (N, E)$ derart eine Kante hinzuzufügen, dass der zweitkleinste Eigenwert $\lambda_2(G + ij)$ maximiert wird. Sinnvollerweise ist $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ zu wählen und y_k^l bezeichne stets den l-ten Eintrag eines gegebenen Eigenvektors zu $\lambda_k(G)$.

Analog zu Abschnitt 2.3 sei $E_{ij} = L(G - E + ij)$ die Laplace-Matrix der Kante $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$. Es gilt $L(G + ij) = L(G) + E_{ij}$ und das Optimierungsproblem lautet mit (2.9) gerade

$$\begin{aligned}\max_{ij \in \binom{N}{2} \setminus E} \lambda_2(G + ij) &= \max_{ij \in \binom{N}{2} \setminus E} \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ \langle x, \mathbf{1} \rangle = 0}} \langle L(G + ij)\, x, x \rangle \\ &= \max_{ij \in \binom{N}{2} \setminus E} \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ \langle x, \mathbf{1} \rangle = 0}} \Big[\langle L(G)\, x, x \rangle + \langle E_{ij}\, x, x \rangle \Big] \\ &= \max_{ij \in \binom{N}{2} \setminus E} \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ \langle x, \mathbf{1} \rangle = 0}} \Big[\langle L(G)\, x, x \rangle + (x_i - x_j)^2 \Big].\end{aligned} \tag{3.1}$$

Bevor nun in den Abschnitten 3.3, 3.4, 3.5 versucht wird, das Problem (3.1) für konkrete Graphen einfacher Struktur exakt zu lösen, ist es sinnvoll zu verstehen, welche Stellen eines beliebigen Graphen für das Hinzufügen einer Kante tendenziell anderen zu bevorzugen sind. Vor allem werden diejenigen Knoten $i \neq j$ aus N mit $\lambda_2(G) = \lambda_2(G + ij)$ für eine Maximierung von $\lambda_2(G + ij)$ auszuschließen sein.

Wird jedem Knoten $i \in N$ der Eintrag y_2^i eines Fiedler-Vektors zugeordnet, so ergibt sich daraus eine Charakterisierung der Position des Knotens im Graphen. In Abschnitt 3.1 ermöglicht die Angabe von Schranken für $\lambda_2(G + ij)$ abhängig von y_2^i und y_2^j eine Aussage über günstige Stellen für das Hinzufügen der Kante ij. Anschließend untersucht Abschnitt 3.2 Eigenschaften der Einträge eines Fiedler-Vektors und stellt dar, inwiefern sich die algebraische Konnektivität eines Graphen in Abhängigkeit dieses Fiedler-Vektors ändert, wenn der Graph einer gewissen Modifizierung unterliegt. Letztere Erkenntnisse sind notwendig, um in den späteren Abschnitten zu zeigen, wo einem Graphen einfacher Struktur eine optimale Kante hinzuzufügen ist und ob dies in eindeutiger Weise so geschehen kann.

3.1 Schranken für den zweitkleinsten Eigenwert beim Hinzufügen einer Kante

Um herauszufinden, welche Kante die algebraische Konnektivität beim Hinzufügen maximiert, hilft es zu wissen, wie sich die Eigenwerte eines Graphen bei diesem Vorgang verändern. Glücklicherweise verflechten sie sich derart, dass obere und untere Schranken für alle Eigenwerte erzeugt werden:

Satz 3.1 (vgl. z. B. [51, Theorem 3.2])

Beim Hinzufügen einer Kante $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ zu einem Graphen $G = (N, E)$ gilt

$$0 \leq \lambda_k(G) \leq \lambda_k(G + ij) \leq \lambda_{k+1}(G) \leq \lambda_{k+1}(G + ij) \;\; \forall\, k = 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{3.2}$$

Beweis:

Die Laplace-Matrix eines beliebigen Graphen ist stets positiv semidefinit und hat laut Satz 2.17 ausschließlich nichtnegative Eigenwerte. Es gilt $L(G+ij) = L(G) + E_{ij}$ sowie $\lambda_1(E_{ij}) = 0$. Wird nun $B := L(G)$ und $C := E_{ij}$ gesetzt, so liefert Korollar 2.19 gerade $\lambda_k(G) \leq \lambda_k(G+ij)$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$. Mit $\operatorname{rg}(E_{ij}) = 1$ und Korollar 2.20 folgt schließlich $\lambda_{k+1}(G+ij) \leq \lambda_{k+2}(G)$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n-2$. □

Aus Satz 3.1 und Korollar 2.19 ist zu schließen, dass das Hinzufügen einer oder mehrerer Kanten die algebraische Konnektivität eines Graphen nicht verkleinern kann. Umgekehrt wird das Entfernen einer oder mehrerer Kanten $\lambda_2(G)$ nicht vergrößern. Aufgrund von $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(G) = \operatorname{tr}(L(G)) = \sum_{i=1}^{n} d_G(i) = 2|E|$ ist $\sum_{k=1}^{n} \left[\lambda_k(G+ij) - \lambda_k(G)\right] = 2$ bzw. $\lambda_k(G) \leq \lambda_k(G+ij) \leq \lambda_k(G) + 2$ und mindestens eine der Ungleichungen in (3.2) muss streng erfüllt sein. Außerdem lässt sich die nachstehende wichtige Folgerung erkennen:

Korollar 3.2

Falls $\alpha(\lambda_2(G)) > 1$ für einen Graphen $G = (N, E)$ erfüllt wird, folgt $\lambda_2(G) = \lambda_2(G+ij)$ für alle $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$.

Beweis:

Die Bedingung $\alpha(\lambda_2(G)) = p > 1$ bedeutet gerade $\lambda_2(G) = \lambda_3(G) = \ldots = \lambda_{p+1}(G)$ und nach Satz 3.1 ist $\lambda_2(G) = \lambda_2(G+ij) = \lambda_3(G)$. □

Ein zusammenhängender Graph $G = (N, E)$ mit $\alpha(\lambda_2(G)) = 1$ lässt die Schranken (3.2) für $\lambda_2(G+ij)$ folgendermaßen verbessern: In Anlehnung an die Arbeit von Maas [47] wird der normierte Fiedler-Vektor $\overline{y}_2 = \overline{y}_2(G) := \frac{y_2(G)}{\|y_2(G)\|_2}$ in (3.1) eingesetzt und dies erzeugt

$$\begin{aligned} \lambda_2(G+ij) &= \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ \langle x, \mathbf{1} \rangle = 0}} \left[\langle L(G)\, x, x \rangle + (x_i - x_j)^2 \right] \\ &\leq \langle L(G)\, \overline{y}_2, \overline{y}_2 \rangle + \left(\overline{y}_2^i - \overline{y}_2^j\right)^2 = \lambda_2(G) + \left(\overline{y}_2^i - \overline{y}_2^j\right)^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die Gleichungen (3.2) und (3.3) zusammen ergeben

$$\lambda_2(G+ij) \leq \min \left\{ \lambda_3(G),\, \lambda_2(G) + \left(\overline{y}_2^i - \overline{y}_2^j\right)^2 \right\} \tag{3.4}$$

als obere Schranke [47, Gleichung (4.1)]. Zur Berechnung einer unteren Schranke verwendet Maas eine Technik von Weinstein und Stenger für symmetrische Eigenwertprobleme [59], welche hier nicht im Detail beschrieben werden soll, um den Fokus auf die letztendlich errechnete Schranke zu wahren. Für eine grobe Skizzierung der Vorgehensweise wird die Eigenwertgleichung $\left[L(G) + E_{ij}\right] z = \lambda(G+ij)\, z$ betrachtet. Die Matrix $L(G) + E_{ij}$ ist positiv semidefinit und muss in der Eigenwertgleichung derart über ein $\varepsilon_{ij} > 0$ variiert werden, dass sich $L(G) + E_{ij} + \varepsilon_{ij} I$ als positiv definit erweist. Die Lösungen dieses abgeänderten Problems lassen sich in Abhängigkeit der Lösungen $\lambda_k(G+ij)$ des Ausgangsproblems formulieren. Analog zu Maas werden $\alpha_{ij}^2 := \left(\overline{y}_2^i - \overline{y}_2^j\right)^2$ sowie $\beta := \lambda_3(G) - \lambda_2(G)$ gesetzt, um

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &:= \frac{\beta - 2}{2} + \sqrt{\frac{(\beta-2)^2}{4} + \beta\left(2 - \alpha_{ij}^2\right)}, \\ \lambda_2(G+ij) &\geq \lambda_2(G) + \frac{\varepsilon_{ij}\, \alpha_{ij}^2}{\varepsilon_{ij} + 2 - \alpha_{ij}^2} = \lambda_3(G) - \varepsilon_{ij} \end{aligned} \tag{3.5}$$

zu erhalten, vgl. [47, Gleichung (4.2)]. Eine ausführlichere Beschreibung des Rechenweges von Maas liefern beispielsweise Sydney, Scoglio und Gruenbacher in [58, Abschnitt 4.2]. Weitere Schranken für $\lambda_2(G+ij)$ errechnen Ghosh und Boyd via

$$\lambda_2(G) + \frac{2\,\beta\,\alpha_{ij}^2}{12+3\,\beta} \leq \lambda_2(G+ij) \leq \lambda_2(G) + \frac{\left[\lambda_n(G) - \lambda_2(G)\right]\alpha_{ij}^2}{\lambda_n(G) - \lambda_2(G) + 2 - \alpha_{ij}^2} \tag{3.6}$$

in [22, Gleichungen (8) und (9)]. Nun lässt sich bei der Betrachtung von (3.4), (3.5), (3.6) unschwer erkennen, dass eine Kante ij eine umso größere untere bzw. obere Schranke für die algebraische Konnektivität von $G+ij$ erzeugt, je größer α_{ij}^2 ist. Es wird somit tendenziell besser im Sinne der Maximierung von $\lambda_2(G+ij)$ sein, eine Kante auszuwählen, die $\left(\overline{y}_2^i - \overline{y}_2^j\right)^2$ möglichst groß gestaltet und daher zwei „schlechter miteinander verbundene" Knoten großen Abstands im Graphen verbindet, vgl. dazu [17, Theorem 3.12]. Der Ausdruck „tendenziell" ist hierbei so zu verstehen, dass im Allgemeinen aus $\alpha_{ij}^2 > \alpha_{kl}^2$ nicht $\lambda_2(G+ij) > \lambda_2(G+kl)$ geschlussfolgert werden kann, wie es bereits die Untersuchungen in Abschnitt 3.3 zeigen.

3.2 Fiedler-Vektoren und Modifikationen eines Graphen

Bei der Interpretation der Schranken aus Abschnitt 3.1 erscheint $\lambda_2(G)$ als ein Maß, das kurze Pfade zwischen allen Knoten eines Graphen $G=(N,E)$ mit einer eher hohen Maßzahl belohnt und „schlecht verbundene" Graphen mit niedrigen Werten belegt. Dabei verwundert es nicht, dass sich die algebraische Konnektivität eines Graphen nicht vergrößert, wenn ihm ein weiterer Knoten plus inzidenter Kante hinzuzufügen ist. Wird dieses Hinzufügen einer Kante $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ zu G als Modifikation des Graphen aufgefasst, so stellt sich im Zuge der Untersuchung von $\lambda_2(G+ij)$ die Frage, wie sich $\lambda_2(G)$ bei gewissen Modifikationen von G verändert. Abbildung 3.1 soll zu nachstehender Auflistung wichtiger Hilfsresultate verglichen werden:

Lemma 3.3 (vgl. (i) [26, Co. 4.2], (ii) [54, Th. 3.1], (iii) [29, Th. 4.4], (iv) [29, Th. 3.2])

(i) Besitzt der Graph $G=(N,E)$ auf $n \geq 2$ Knoten ein $v \in N$ mit $d_G(v)=1$ und wird $G' := G - v$ gesetzt, so gilt $\lambda_2(G') \geq \lambda_2(G)$.

(ii) Gegeben sei ein Baum $T=(N,E)$ auf $n \geq 2$ Knoten. Stellt T' den über die Entfernung einer Kante $ij \in E$ und nachfolgender Identifizierung der Knoten $i \neq j$ via $i := j$ konstruierten Baum dar, so gilt $\lambda_2(T') \geq \lambda_2(T)$.

(iii) Für einen zusammenhängenden Graphen $G=(N,E)$ auf $n \geq 2$ Knoten sei $G_{k,l}^m$ der Graph, welcher sich formt, wenn einem beliebigen Knoten $m \in N$ für $k \geq l \geq 1$ zwei disjunkte Pfade der Längen k bzw. l mit jeweiligen Endknoten r bzw. s angehängt werden. Es gilt $\lambda_2(G_{k,l}^m) \geq \lambda_2(G_{k+1,l-1}^m)$ und die Ungleichung ist strikt erfüllt, falls entweder $y_2^r(G_{k,l}^m) \neq 0$ oder $y_2^s(G_{k,l}^m) \neq 0$ für die entsprechenden Einträge eines Fiedler-Vektors von $G_{k,l}^m$ eintritt.

(iv) Es bezeichne $G=(N,E)$ einen zusammenhängenden Graphen auf $n \geq 2$ Knoten mit einer Kante $ij \in E$, die $\lambda_2(G-ij)=0$ erzeugt. Ist unter G' jener Graph zu verstehen, der nach Entfernung von $ij \in E$, Identifizierung beider Knoten $i \neq j$ via $i := j$ und anschließendem Hinzufügen eines neuen Knotens $v \notin N$ inklusive inzidenter Kante iv aus G entsteht, so folgt $\lambda_2(G') \geq \lambda_2(G)$, wobei diese Ungleichung strikt erfüllt wird, falls $y_2^v(G') \neq 0$ ist.

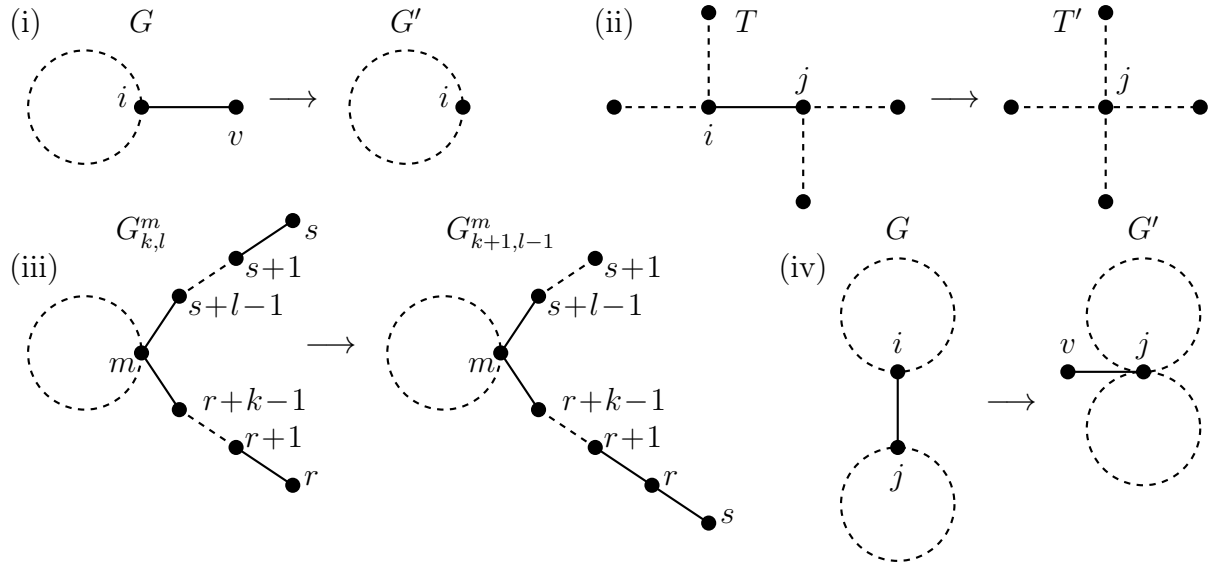


Abbildung 3.1: Modifikationen eines Graphen

Die bisherige Interpretation der algebraischen Konnektivität eines Graphen $G = (N, E)$ als Maß der Erreichbarkeit aller Knoten aus N über Pfade in G liefert intuitiv Aufklärung darüber, warum die Ungleichungen aus Lemma 3.3 (i) bis (iv) ihre Gültigkeit besitzen. Dennoch ist ein Beweis dieser Resultate nicht trivial und erfordert u. a. von Kirkland et al. entwickelte Perron-Techniken, denen hier weniger Aufmerksamkeit zugute kommt, vgl. Abschnitt 1. Stattdessen soll folgender Feststellung größere Beachtung geschenkt werden: Lemma 3.3 (iii), (iv) zeigt, dass es möglich ist, Aussagen über strikte Ungleichungen zwischen den algebraischen Konnektivitäten eines Graphen und seiner Modifikation mit Hilfe der Fiedler-Vektoren zu treffen. Dies ist vor allem für die Eindeutigkeit einer optimal hinzuzufügenden Kante von Bedeutung. Somit werden Erkenntnisse über Eigenschaften von Fiedler-Vektoren im Zusammenhang mit der Struktur des Graphen benötigt. Im Falle eines Baumes gibt es hierzu zahlreiche Untersuchungen, von denen im Folgenden eine Auswahl mit hohem Nutzen für spätere Beweise betrachtet werden soll. Den Startpunkt legt eine Strukturaussage von Fiedler selbst fest:

Satz 3.4 (vgl. z. B. [17, Theorem 3.14])

Für einen Baum $T = (N, E)$ mit einem Fiedler-Vektor y_2 kann nur eine der folgenden beiden Situationen auftreten:

(i) Es gilt $N' = \{i \in N : y_2^i = 0\} \neq \emptyset$ und $T[N']$ ist zusammenhängend. Ferner existiert genau ein zu mindestens einem Knoten aus $N \setminus N'$ adjazenter Knoten $j \in N'$. Die Einträge eines Fiedler-Vektors bzgl. der Knoten entlang eines jeden Pfades in T mit Anfangsknoten j verhalten sich monoton wachsend oder monoton fallend oder sind alle gleich Null.

(ii) Es gilt $y_2^i \neq 0 \ \forall i \in N$ und T besitzt genau eine Kante jk mit $y_2^j > 0$ sowie $y_2^k < 0$. Die Einträge eines Fiedler-Vektors bzgl. der Knoten entlang eines jeden Pfades in T mit Anfangsknoten j, welcher k nicht durchläuft, treten monoton wachsend auf und jene entlang eines jeden Pfades in T mit Anfangsknoten k, welcher j nicht enthält, verlaufen monoton fallend.

Satz 3.4 verlangt danach, Bezeichnungen zur Unterscheidung von Bäumen in Bezug auf ihre Fiedler-Vektoren einzuführen. Dazu soll Abbildung 3.2 betrachtet werden:

Definition 3.5 (Bäume vom Typ I oder II, charakteristische Knoten und Kanten)

Ein Baum $T = (N, E)$ ist vom Typ I, falls er Satz 3.4 (i) erfüllt und vom Typ II, falls für ihn Satz 3.4 (ii) gilt. Der Knoten $j \in N'$ aus Satz 3.4 (i) heißt charakteristischer Knoten eines Baumes T vom Typ I und die Kante jk aus Satz 3.4 (ii) wird charakteristische Kante eines Baumes T vom Typ II genannt.

Definition 3.5 ist korrekt in dem Sinne, dass die Situationen (i) bzw. (ii) aus Satz 3.4 nicht von der speziellen Wahl eines Fiedler-Vektors abhängen [49, Theorem 2].

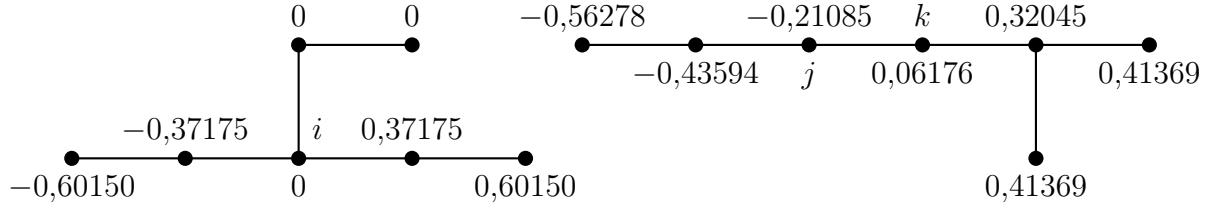


Abbildung 3.2: Links ein Baum vom Typ I mit charakteristischem Knoten i und rechts ein Baum vom Typ II mit charakteristischer Kante jk, zu jedem Knoten steht der dazugehörige Eintrag eines normierten Fiedler-Vektors.

Definition 3.6 (Aktive und passive Komponenten eines Knotens)

Gegeben sei ein Baum $T = (N, E)$. Die Zusammenhangskomponenten von $T - i$ heißen Komponenten des Knotens $i \in N$. Falls $y_2^j(T) = 0$ für alle Knoten j einer Komponente von i gilt, so wird diese Komponente als passiv und anderenfalls als aktiv bezeichnet.

Nach Satz 3.4 (ii) besitzen die Knoten eines Baumes vom Typ II ausschließlich aktive Komponenten. Abbildung zeigt beispielhaft die aktiven und passiven Komponenten des charakteristischen Knotens eines Baumes vom Typ I.

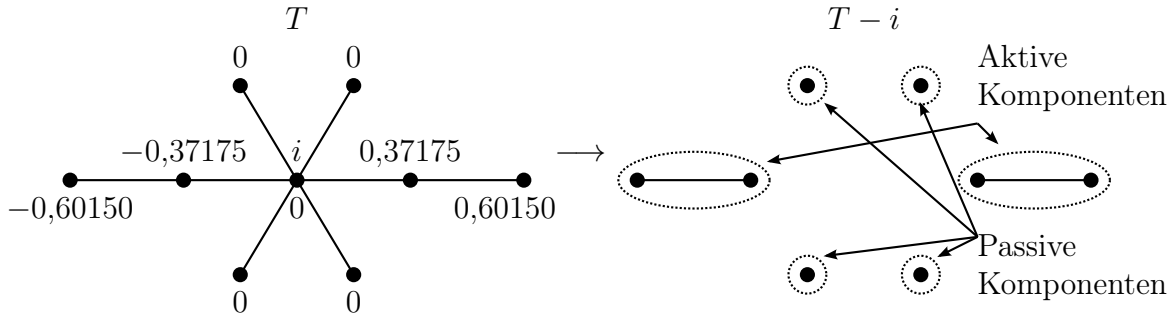


Abbildung 3.3: Komponenten des charakteristischen Knotens i vom Baum T, zu jedem Knoten steht der dazugehörige Eintrag eines normierten Fiedler-Vektors.

Ist ein Baum vom Typ I derart zu modifizieren, dass eine passive Komponente des charakteristischen Knotens von ebendiesem Knoten „wegbewegt“ wird, so verkleinert sich die algebraische Konnektivität, wie es das nachstehende Resultat von Grone und Merris besagt. Hierzu ist Abbildung 3.4 zu vergleichen:

Lemma 3.7 (vgl. z. B. [25, Theorem 5])

Es sei $T = (N, E)$ ein Baum vom Typ I mit charakteristischem Knoten $i \in N$. Ferner bezeichne B eine passive Komponente von i sowie v den zu i adjazenten Knoten in B. Ist j ein Knoten einer beliebigen aktiven Komponente von i und $T' = (N, E') := T - iv + jv$, so gilt $\lambda_2(T) > \lambda_2(T')$.

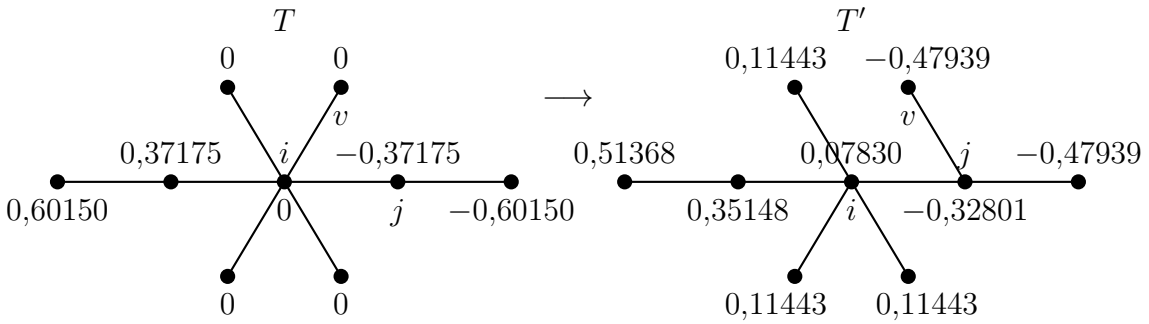


Abbildung 3.4: Ein Beispiel für Lemma 3.7 mit $\lambda_2(T) \approx 0{,}38197 > 0{,}31576 \approx \lambda_2(T')$, zu jedem Knoten steht der dazugehörige Eintrag eines normierten Fiedler-Vektors.

Das folgende Lemma von Merris charakterisiert Situationen, in denen die Modifikation aus Lemma 3.3 (i) die algebraische Konnektivität unberührt lässt, vgl. Abbildung 3.5. Merris spricht dabei von einem Reduktionstheorem für Bäume vom Typ I:

Lemma 3.8 (vgl. z. B. [49, Theorem 3])

Für einen Baum $T = (N, E)$ auf $n \geq 4$ Knoten bezeichne $i \in N$ ein Blatt und $j \in N$, $j \neq i$ den adjazente Knoten zu i. Gilt $y_2^i(T) = 0$ und $T' \coloneqq T - i$, so folgt:

(i) $y_2^j(T) = 0$;

(ii) $\lambda_2(T') = \lambda_2(T)$;

(iii) Die Einschränkung von $y_2(T)$ auf $N \setminus \{i\}$ ist ein Fiedler-Vektor von T';

(iv) Die Bäume T und T' haben die gleiche Anzahl charakteristischer Knoten.

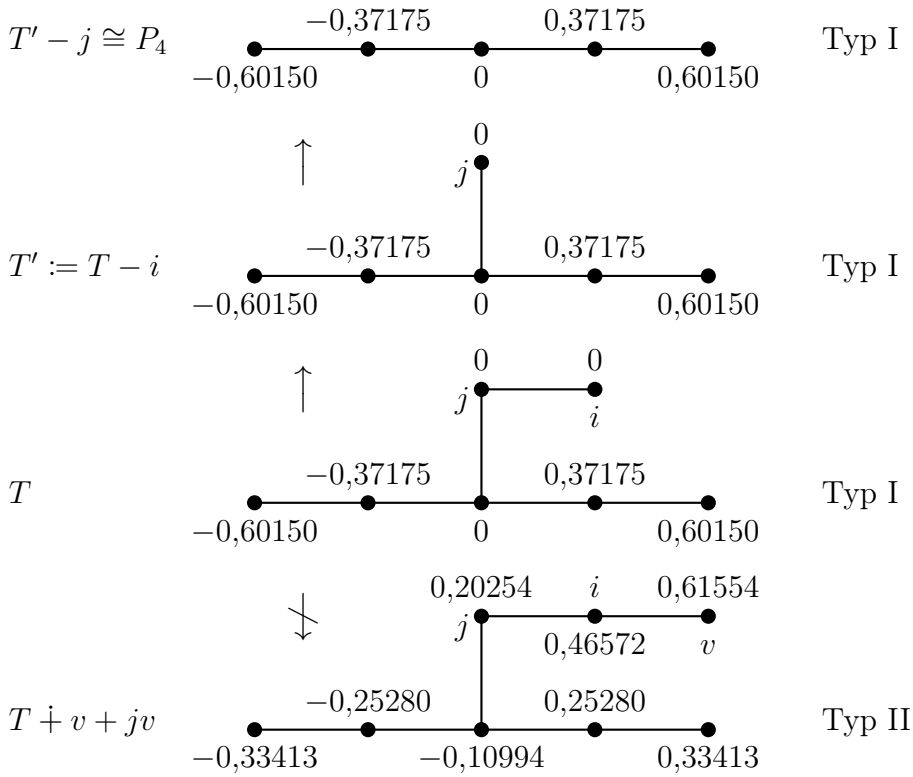


Abbildung 3.5: Ein Beispiel für Lemma 3.8 mit $\lambda_2(T) = \lambda_2(T') = \lambda_2(P_4) \approx 0{,}38197$ und diese Methode funktioniert wegen $\lambda_2(T) > \lambda_2(T \dot{+} v + jv) \approx 0{,}24340$ nicht in entgegengesetzter Richtung. Zu jedem Knoten steht der dazugehörige Eintrag eines normierten Fiedler-Vektors.

Mit Lemma 3.8 werden gewisse Bäume gleicher algebraischer Konnektivität erkannt. Wie ist die Situation bei allgemeinen Graphen? An welchen Stellen im Graphen führt das Hinzufügen einer Kante zu keiner Veränderung seines zweitkleinsten Eigenwertes? Um Antworten auf diese Fragen formulieren zu können, wird der nachstehende Begriff eingeführt:

Definition 3.9 (Laplace-Untermatrix eines Knotens)

Die Untermatrix der Ordnung $n-1$, welche entsteht, wenn für einen Knoten $u \in N$ des Graphen $G = (N, E)$ auf $n \geq 2$ Knoten die u-te Zeile und u-te Spalte von $L(G)$ gestrichen werden, ist mit $L_u(G)$ zu bezeichnen und als Laplace-Untermatrix des Knotens u von G zu benennen.

Soll z. B. die Laplace-Untermatrix des Anfangsknotens $u \in N$ eines Pfades $P_{n-1} = (N, E)$ der Länge $n-1$ betrachtet werden, so ist

$$L_u(P_{n-1}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n-1}\left(\{-1, 0, 1, 2\}\right).$$

In [60, Theorem 2] berechnet Yueh die Eigenwerte von $L_u(P_n)$ für dortiges $a = c = -1$, $\alpha = 0$ und $\beta = -1$ zu $\lambda_k(L_u(P_n)) = 2 - 2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}$ mit $k = 1, 2, \dots, n$. Demnach gilt

$$\lambda_1(L_u(P_{n-1})) = 2 - 2\cos\frac{\pi}{2(n-1)+1} = 2 - 2\cos\frac{\pi}{2n-1} \overset{(3.8)}{=\!=} \lambda_2(P_{2(n-1)})$$

und Abbildung 3.6 ist zu folgendem Lemma über Situationen zu vergleichen, in denen sich die algebraische Konnektivität beim Hinzufügen einer Kante zu einem Graphen spezieller Struktur nicht verändert:

Lemma 3.10 (vgl. z. B. (i) [50, Theorem 3.1] und (ii) [55, Corollary 4.1])

Gegeben sei ein Graph $G = (N, E)$ mit Eigenwerten λ_k und dazugehörigen Eigenvektoren y_k für $k = 1, 2, \dots, n$.

(i) Falls $y_k^i = y_k^j$ für zwei Knoten $i \neq j$ aus N gilt, so ist λ_k ein Eigenwert von $G + ij$ mit dazugehörigem Eigenvektor y_k. Hierbei muss beachtet werden, dass die Eigenwerte λ_k von $G + ij$ nicht notwendigerweise sortiert sind. Insbesondere ist festzustellen, dass für einen zusammenhängenden Graphen $G = (N, E)$ aus $y_2^i(G) = y_2^j(G)$ gerade $\lambda_2(G) = \lambda_2(G + ij)$ folgt, vgl. dazu (3.2).

(ii) Es sei G zusammenhängend und enthalte $s \geq 2$ disjunkte Pfade gleicher Länge $k \geq 1$ auf den Knoten $v, v_{ik}, v_{i,k-1}, \dots, v_{i1} \in N$, $i = 1, 2, \dots, s$, die nur ihren Anfangsknoten $v \in N$ gemeinsam haben. Ferner bezeichne G' den Graphen, welcher aus G entsteht, wenn t Kanten für $0 \leq t \leq \frac{s(s-1)}{2}$ bzw. $1 \leq j \leq k$ beliebig zwischen den Knoten $v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{sj}$ hinzugefügt werden und $L_u(P_k)$ beschreibe die Laplace-Untermatrix des Anfangs- oder Endknotens u eines Pfades P_k der Länge k. Falls die Beziehung $\lambda_2(G) \neq \lambda_1(L_u(P_k)) = \lambda_2(P_{2k})$ gilt, so folgt $\lambda_2(G) = \lambda_2(G')$.

Obige Überlegungen und (3.8) liefern $\lambda_1(L_u(P_1)) = \lambda_2(P_2) = 1$ und das nächste Korollar beschreibt die Situation aus Lemma 3.10 (ii) für den Spezialfall $k = 1$:

Korollar 3.11 (vgl. z. B. [55, Corollary 4.2])

Angenommen, der Graph $G = (N, E)$ besitzt unter seinen n Knoten $s \geq 2$ verschiedene mit je Knotengrad 1, wobei alle adjazent zu einem gemeinsamen Knoten sind. Bezeichnet G' den Graphen, welcher aus G entsteht, wenn t Kanten für $0 \leq t \leq \frac{s(s-1)}{2}$ beliebig zwischen den erwähnten s Knoten hinzugefügt werden und gilt $\lambda_2(G) \neq 1$, so folgt $\lambda_2(G) = \lambda_2(G')$.

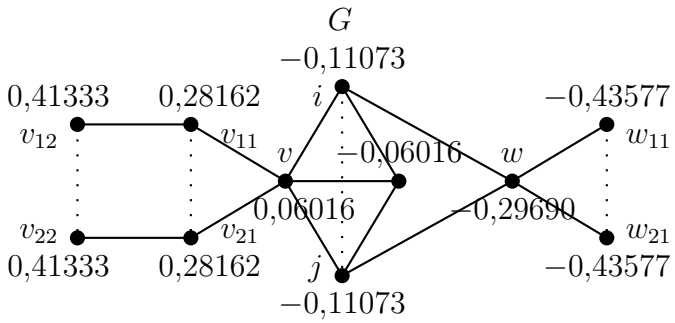


Abbildung 3.6: Ein Beispiel für Lemma 3.10 und Korollar 3.11 mit $\lambda_2(G) \approx 0{,}31867$, zu jedem Knoten steht der dazugehörige Eintrag eines normierten Fiedler-Vektors. Eine der Kanten $ij, v_{11}v_{21}, v_{12}v_{22}, w_{11}w_{21}$ kann via Lemma 3.10 (i) zu G hinzugefügt werden, ohne λ_2 zu verändern, da die jeweiligen Einträge eines Fiedler-Vektors übereinstimmen. Nach Korollar 3.11 darf dazu wegen $\lambda_2(G) \neq 1$ die Kante $w_{11}w_{21}$ hinzugefügt werden, ohne die Einträge eines Fiedler-Vektors berechnen zu müssen. Für Lemma 3.10 (ii) ist offenbar $\lambda_1(L_u(P_2)) = \lambda_2(P_4) \approx 0{,}38197 \neq \lambda_2(G)$ zu erkennen und dies ermöglicht, beide Kanten $v_{11}v_{21}, w_{11}w_{21}$ oder $v_{12}v_{22}, w_{11}w_{21}$ ohne Beeinflussung von λ_2 hinzuzufügen – nicht jedoch beide Kanten $v_{11}v_{21}, v_{12}v_{22}$.

3.3 Pfade und Kreise

Die Informationen der Abschnitte 3.1 und 3.2 schaffen hinreichende Voraussetzungen dafür, Graphen einfacher Struktur auf ihre algebraische Konnektivität beim Hinzufügen einer Kante zu untersuchen. Es ist naheliegend, mit einem Pfad $P_{n-1} = (N, E)$ der Länge $n-1$ auf $n \geq 2$ Knoten zu beginnen, vgl. Abbildung 3.7. Für eine Identifikation des Spektrums von P_{n-1} werden die Eigenwerte und Eigenvektoren der Laplace-Matrix

$$L(P_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_n\left(\{-1, 0, 1, 2\}\right) \tag{3.7}$$

benötigt. Die Eigenwertaufgabe $L(P_{n-1})\, y = \lambda\, y$ einer solchen Tridiagonalmatrix erfordert das Lösen einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösungstheorie z. B. in [3, Kapitel I] zu finden ist.

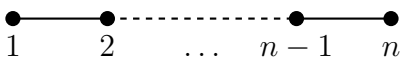


Abbildung 3.7: P_{n-1}

Beobachtung 3.12 (vgl. z. B. [24, Example 7.7] und [60, Theorem 5])

Ein Pfad $P_{n-1} = (N, E)$ der Länge $n-1 \geq 1$ besitzt folgende Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} \lambda_k(P_{n-1}) &= 2 - 2\cos\frac{(k-1)\pi}{n}, & k &= 1, 2, \ldots, n, \\ y_k^l(P_{n-1}) &= \cos\left(\frac{l(k-1)\pi}{n} - \frac{(k-1)\pi}{2n}\right), & l &= 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Beweis:

Das Gleichungssystem $L(P_{n-1})\, y_k = \lambda_k\, y_k$ führt via (3.7) auf die homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$-y_k^{l-1} + (2 - \lambda_k)\, y_k^l - y_k^{l+1} = 0 \;\; \forall\, l = 1, \ldots, n, \;\; y_k^0 := y_k^1, \;\; y_k^{n+1} := y_k^n \tag{3.9}$$

mit konstanten Koeffizienten. Offenbar ist $y_k^l = 0$ für alle $l = 1, \ldots, n$ eine triviale Lösung von (3.9). Um weitere Lösungen zu erhalten, wird der Ansatz $y_k^l = \alpha^l$ für $\alpha \neq 0$ in (3.9) eingesetzt, womit y_k^l genau dann eine Lösung von (3.9) darstellt, wenn α eine beliebige Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\alpha) := -1 + (2 - \lambda_k)\,\alpha - \alpha^2$ bezeichnet [3, § 1]. Hierbei ist zu beachten, dass der Buchstabe l für y_k^l einen Index und für α^l die l-te Potenz bedeutet. Die Nullstellen $\alpha_{1/2} := 1 - \frac{1}{2}\lambda_k \mp \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_k(\lambda_k - 4)}$ von $P(\alpha)$ liefern über $y_k^l = c_1\,\alpha_1^l + c_2\,\alpha_2^l$ sämtliche Lösungen von (3.9), falls die Konstanten $c_1,\, c_2 \in \mathbb{C}$ durch die Randbedingungen $y_k^0 := y_k^1$ bzw. $y_k^{n+1} := y_k^n$ festgelegt werden, vgl. (70) aus Abschnitt A und [3, Sätze 1.1, 1.2]. Beim Einsetzen des behaupteten Eigenwertes $\lambda_k(P_{n-1})$ aus (3.8) in $\alpha_{1/2}$ besagen (71) aus Abschnitt A und $\sin\frac{(k-1)\pi}{n} > 0$ für $k = 1, 2, \ldots, n$ gerade

$$\begin{aligned} \alpha_{1/2} &= \cos\frac{(k-1)\pi}{n} \mp \sqrt{\left(\cos\frac{(k-1)\pi}{n}\right)^2 - 1} \\ &= \cos\frac{(k-1)\pi}{n} \mp \sqrt{(-1)\sin\frac{(k-1)\pi}{n}} = \cos\frac{(k-1)\pi}{n} \mp \mathrm{i}\sin\frac{(k-1)\pi}{n}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung $y_k^l = c_1\,\alpha_1^l + c_2\,\alpha_2^l$ ist somit komplex. Da jedoch die Nullstellen $\alpha_{1/2}$ konjugiert komplex auftreten, gibt es die Möglichkeit einer reellen Formulierung der allgemeinen Lösung von (3.9) mit neuen reellen Konstanten $\tilde{c}_1,\, \tilde{c}_2$ [3, § 1, S. 19]. Dazu sind die Nullstellen $\alpha_{1/2}$ in (3.9) einzusetzen, um nach Trennung des Real- und Imaginärteils

$$\begin{aligned} 0 = &-\cos\tfrac{(l-1)(k-1)\pi}{n} \pm \mathrm{i}\sin\tfrac{(l-1)(k-1)\pi}{n} + (2-\lambda_k)\left(\cos\tfrac{l(k-1)\pi}{n} \mp \mathrm{i}\sin\tfrac{l(k-1)\pi}{n}\right) \\ &- \cos\tfrac{(l+1)(k-1)\pi}{n} \pm \mathrm{i}\sin\tfrac{(l+1)(k-1)\pi}{n} \\ \Leftrightarrow \text{Re.}:\; 0 = &-\cos\tfrac{(l-1)(k-1)\pi}{n} + (2-\lambda_k)\cos\tfrac{l(k-1)\pi}{n} - \cos\tfrac{(l+1)(k-1)\pi}{n}, \\ \text{Im.}:\; 0 = &\mp\left[-\sin\tfrac{(l-1)(k-1)\pi}{n} + (2-\lambda_k)\sin\tfrac{l(k-1)\pi}{n} - \sin\tfrac{(l+1)(k-1)\pi}{n}\right] \end{aligned}$$

genau $\cos\frac{l(k-1)\pi}{n}$ und $\sin\frac{l(k-1)\pi}{n}$ als reelle Lösungen von (3.9) zu erkennen. Schließlich ist $y_k^l = \tilde{c}_1\cos\frac{l(k-1)\pi}{n} + \tilde{c}_2\sin\frac{l(k-1)\pi}{n}$ die allgemeine Lösung von (3.9) mit noch zu ermittelnden reellen Konstanten $\tilde{c}_1,\, \tilde{c}_2$. Für $\tilde{c}_1 := \cos\frac{(k-1)\pi}{2n}$ und $\tilde{c}_2 := \sin\frac{(k-1)\pi}{2n}$ zeigt sich $y_k^l = \cos\frac{(k-1)\pi}{2n}\cos\frac{l(k-1)\pi}{n} + \sin\frac{(k-1)\pi}{2n}\sin\frac{l(k-1)\pi}{n} = \cos\left(\frac{l(k-1)\pi}{n} - \frac{(k-1)\pi}{2n}\right)$ wie in (3.8) behauptet. Einerseits gilt $y_k^0 = \cos\frac{-(k-1)\pi}{2n} = \cos\frac{(k-1)\pi}{2n} = y_k^1$ und (72) aus Abschnitt A

liefert andererseits

$$\begin{aligned} y_k^{n+1} &= \cos\left((k-1)\,\pi + \tfrac{(k-1)\,\pi}{2\,n}\right) \\ &= \cos\big((k-1)\,\pi\big)\,\cos\tfrac{(k-1)\,\pi}{2\,n} - \underbrace{\sin\big((k-1)\,\pi\big)}_{=0}\,\sin\tfrac{(k-1)\,\pi}{2\,n} \\ &= \cos\big((k-1)\,\pi\big)\,\cos\tfrac{(k-1)\,\pi}{2\,n} + \sin\big((k-1)\,\pi\big)\,\sin\tfrac{(k-1)\,\pi}{2\,n} \\ &= \cos\left((k-1)\,\pi - \tfrac{(k-1)\,\pi}{2\,n}\right) = y_k^n, \end{aligned}$$

das heißt, die Randbedingungen werden ebenfalls erfüllt. So bezeichnet (3.8) in der Tat die allgemeine Lösung von $L\,(P_{n-1})\,y_k = \lambda_k\,y_k$ und da (3.8) genau n verschiedene einfache Eigenwerte angibt, ist die Eigenwertzerlegung von $L\,(P_{n-1})$ vollständig bestimmt. □

Nach Beobachtung 3.12 treten sämtliche Eigenwerte eines Pfades nur einfach auf und laut Satz 2.24 ist $\lambda_2\,(P_{n-1})$ minimal unter allen zusammenhängenden Graphen auf n Knoten. Wird z. B. ein Pfad auf sechs Knoten betrachtet, so gibt es genau sechs zueinander nicht isomorphe Möglichkeiten, ihm eine Kante hinzuzufügen. Mit (3.8) bzw. (73) aus Abschnitt A folgt $\big\|y_2\,(P_{n-1})\big\|_2 = \sqrt{\sum_{l=1}^{n}\cos^2\left(\frac{l\,\pi}{n} - \frac{\pi}{2\,n}\right)} = \frac{1}{2}\,\sqrt{2\,n}$ und Tabelle 3.1 zeigt, wie die algebraische Konnektivität von $P_5 + ij$ mit dem Abstand der zur Kante ij gehörenden Einträge eines normierten Fiedler-Vektors ansteigt.

Kante ij	Untere Schranke aus		$\lambda_2\,(P_5 + ij)$	Obere Schranke aus		$\big(\overline{y}_2^{\,i} - \overline{y}_2^{\,j}\big)^2$
	(3.6)	(3.5)		(3.6)	(3.4)	
16	0,39625	0,65656	1,00000	1,28911	1,00000	1,24402
15	0,36417	0,54631	0,69722	0,98126	1,00000	0,93301
25	0,33671	0,46010	0,65708	0,74933	0,93462	0,66667
14	0,31952	0,40923	0,43845	0,61687	0,76795	0,50000
24	0,30002	0,35400	0,41309	0,47702	0,57895	0,31100
13	0,28514	0,31336	0,32487	0,37694	0,43462	0,16667
keine	–	–	0,26795	–	–	–

Tabelle 3.1: Schranken für $\lambda_2\,(P_5 + ij)$

Auf dem Weg zu einem Resultat über das optimale Hinzufügen einer Kante zu P_{n-1} ist es sinnvoll, das Spektrum eines Kreises C_n der Länge $n \geq 3$ zu kennen, da es in ähnlicher Struktur zu jenem aus Beobachtung 3.12 auftritt und mit den bisher bekannten Aussagen direkt zum Ziel führt. Die Laplace-Matrix eines solchen Kreises

$$L\,(C_n) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n\big(\{-1, 0, 1, 2\}\big) \tag{3.10}$$

präsentiert sich in spezieller zirkulanter Gestalt [3, § 9].

Beobachtung 3.13 (vgl. z. B. [4, Proposition 3.5] und [18, Abschnitt 4.4])

Für die Eigenwerte und dazugehörigen Eigenvektoren eines Kreises der Länge $n \geq 3$ gilt

$$\lambda_k(C_n) = \begin{cases} 2 - 2\cos\dfrac{(k-1)\,\pi}{n} & \text{für ungerades } k, \\ 2 - 2\cos\dfrac{k\,\pi}{n} & \text{für gerades } k, \end{cases}$$

$$y_k^l(C_n) = \begin{cases} \cos\dfrac{l\,(k-1)\,\pi}{n} & \text{für ungerades } 1 \leq k \leq n, \\ \sin\dfrac{l\,k\,\pi}{n} & \text{für gerades } 2 \leq k \leq n-1, \\ \cos\dfrac{l\,k\,\pi}{n} & \text{für gerades } k = n \end{cases} \tag{3.11}$$

mit $k = 1, 2, \ldots, n$ sowie $l = 1, 2, \ldots, n$.

Beweis:

Die aufwendige Darstellung (3.11) der Eigenvektoren dient der korrekten Zuordnung zu den aufsteigend sortierten Eigenwerten unter Berücksichtigung algebraischer Vielfachheiten. Eine natürliche Zahl p mit $k = 2\,p$ für gerades k bzw. $k = 2\,p + 1$ für ungerades k bringt sofort Licht ins Dunkel, denn so sind alle Eigenwerte laut Behauptung von der Form $\lambda_p = 2 - 2\cos\frac{2\,p\,\pi}{n}$. Im Falle $\alpha(\lambda_p) = 1$ liefert (3.11) den Eigenvektor y_{p1} zu λ_p mit Einträgen $y_{p1}^l = \cos\frac{2\,l\,p\,\pi}{n}$ und gilt $\alpha(\lambda_p) = 2$, so sind y_{p1}, y_{p2} die zwei zu λ_p gehörenden linear unabhängigen Eigenvektoren, wobei y_{p2} die Einträge $y_{p2}^l = \sin\frac{2\,l\,p\,\pi}{n}$ vorweist. In der Tat berechnet (74) aus Abschnitt A die Orthogonalität $\langle y_{p1}, y_{p2}\rangle = 0$. Somit bleibt zu zeigen, dass die Eigenwerte und Eigenvektoren aus (3.11) gerade $L(C_n)\,y_k = \lambda_k\,y_k$ erfüllen. Dies ist wegen (3.10) äquivalent zur Lösung der homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$-y_p^{l-1} + (2 - \lambda_p)\,y_p^l - y_p^{l+1} = 0 \;\; \forall\, l = 1, \ldots, n, \;\; y_p^0 := y_p^n, \;\; y_p^{n+1} := y_p^1 \tag{3.12}$$

mit konstanten Koeffizienten. Da (3.12) das gleiche charakteristische Polynom wie (3.9) besitzt, ist $\alpha_{1/2} := 1 - \frac{1}{2}\,\lambda_p \mp \frac{1}{2}\,\sqrt{\lambda_p\,(\lambda_p - 4)} = \cos\frac{2\,p\,\pi}{n} + \mathrm{i}\,\sin\frac{2\,p\,\pi}{n}$ für dessen Nullstellen analog zum Beweis von Beobachtung 3.12 zu erkennen, wenn $\lambda_p = 2 - 2\cos\frac{2\,p\,\pi}{n}$ eingesetzt wird. Die allgemeine Lösung von (3.12) lautet daher $y_p^l = c_1\cos\frac{2\,l\,p\,\pi}{n} + c_2\sin\frac{2\,l\,p\,\pi}{n}$ mit noch zu ermittelnden reellen Konstanten c_1, c_2. Die Wahl $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ führt auf y_{p1} und $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ zeigt y_{p2} als Lösung von (3.12). Wegen

$$\begin{aligned} y_{p1}^0 &= \cos 0 = 1 = \cos 2\,p\,\pi = y_{p1}^n, \\ y_{p1}^{n+1} &= \cos\left(2\,p\,\pi + \tfrac{2\,p\,\pi}{n}\right) = \underbrace{\cos 2\,p\,\pi}_{=1}\cos\tfrac{2\,p\,\pi}{n} - \underbrace{\sin 2\,p\,\pi}_{=0}\sin\tfrac{2\,p\,\pi}{n} = \cos\tfrac{2\,p\,\pi}{n} = y_{p1}^1, \\ y_{p2}^0 &= \sin 0 = 0 = \sin 2\,p\,\pi = y_{p2}^n, \\ y_{p2}^{n+1} &= \sin\left(2\,p\,\pi + \tfrac{2\,p\,\pi}{n}\right) = \underbrace{\sin 2\,p\,\pi}_{=0}\cos\tfrac{2\,p\,\pi}{n} + \underbrace{\cos 2\,p\,\pi}_{=1}\sin\tfrac{2\,p\,\pi}{n} = \sin\tfrac{2\,p\,\pi}{n} = y_{p2}^1 \end{aligned}$$

werden die Randbedingungen ebenfalls erfüllt. □

Tabelle 3.2 liefert eine anschauliche Darstellung des Spektrums eines Kreises der Länge

$n \geq 3$ mit den entsprechenden algebraischen Vielfachheiten:

n ist ungerade		n ist gerade	
$\lambda(C_n)$	$\alpha(\lambda(C_n))$	$\lambda(C_n)$	$\alpha(\lambda(C_n))$
0	1	0	1
$2-2\cos(2\pi/n)$	2	$2-2\cos(2\pi/n)$	2
$2-2\cos(4\pi/n)$	2	$2-2\cos(4\pi/n)$	2
$2-2\cos(6\pi/n)$	2	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$2-2\cos((n-2)\pi/n)$	2
$2-2\cos((n-1)\pi/n)$	2	4	1

Tabelle 3.2: Das Spektrum eines Kreises

Die bisherigen Feststellungen lassen nun nachstehende Aussage zu:

Satz 3.14

Es ist optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität, einem Pfad $P_{n-1} = (N, E)$ eine Kante derart hinzuzufügen, dass sie dessen Anfangs- und Endknoten verbindet, sprich

$$\lambda_2(P_{n-1} + 1n) \geq \lambda_2(P_{n-1} + ij) \;\; \forall\, ij \in \tbinom{N}{2} \setminus E, \;\; n \geq 3. \tag{3.13}$$

Beweis:

Aus den Beobachtungen 3.12, 3.13 sowie Satz 3.1 folgt

$$\lambda_2(P_{n-1} + ij) \overset{(3.2)}{\leq} \lambda_3(P_{n-1}) \overset{(3.8)}{=\!=} 2 - 2\cos\frac{2\pi}{n} \overset{(3.11)}{=\!=} \lambda_2(C_n)$$

und wegen $P_{n-1} + 1n = C_n$ die Ungleichung (3.13). □

Satz 3.14 liefert keine strenge Ungleichung und damit keine Aussage über die Eindeutigkeit einer optimalen Lösung. Dieses Problem soll kurz näher beleuchtet werden: Die Schranken (3.4), (3.5), (3.6) und Tabelle 3.1 lassen die Annahme zu, dass $\lambda_2(P_{n-1} + ij)$ tendenziell mit $d_{P_{n-1}}(i, j)$ ansteigt. Bei der Betrachtung der drei vermeintlich besten Kandidaten $\{1, n\}$, $\{1, n-1\}$, $\{2, n-1\}$ für eine Maximierung von $\lambda_2(P_{n-1} + ij)$ entsteht u. a. ein spezieller Lollipop-Graph $P_{n-1} + \{1, n-1\} =: C_{n,n-1}$.

Definition 3.15 (Lollipop-Graph)

Gegeben sei ein Pfad $P_{n-1} = (N, E)$. Jeder zu $P_{n-1} + 1j$ für $j \in N \setminus \{1, 2\}$ isomorphe Graph wird Lollipop-Graph genannt und mit $C_{n,j}$ bezeichnet.

Offenbar gilt $C_{n,n} \cong C_n$ und $g(C_{n,j}) = j$ für die Taillenweite eines Lollipop-Graphen, vgl. z. B. Abbildung 3.8:

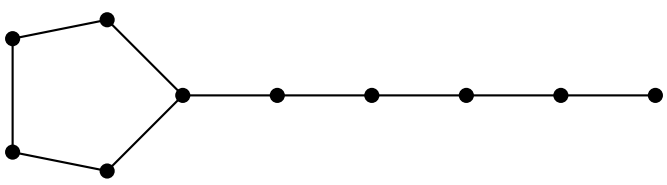


Abbildung 3.8: Lollipop-Graph $C_{10,5}$

Es werden Informationen benötigt, die zumindest eine teilweise Sortierung der algebraischen Konnektivitäten $\lambda_2(P_{n-1}+ij)$ für verschiedene ij ermöglichen. Abbildung 3.9 ist zum nächsten Lemma zu vergleichen:

Lemma 3.16 (vgl. (i) [30, Th. 2.11], [14, Le. 2.8], [13, Th. 4.10] und (ii) [27, Le. 2.9])

Erfüllen zwei Knoten $i \neq j$ von $P_{n-1} = (N, E)$ für $n \geq 5$ die Bedingungen $j \in N \setminus \{1, 2, 3\}$ und $2 < i+1 < j < n$, so gelten folgende strenge Ungleichungen:

(i) $\lambda_2(C_{n,j}) > \lambda_2(C_{n,j-1})$;

(ii) $\lambda_2(P_{n-1}+ij) > \lambda_2(C_{n,j-i+1})$.

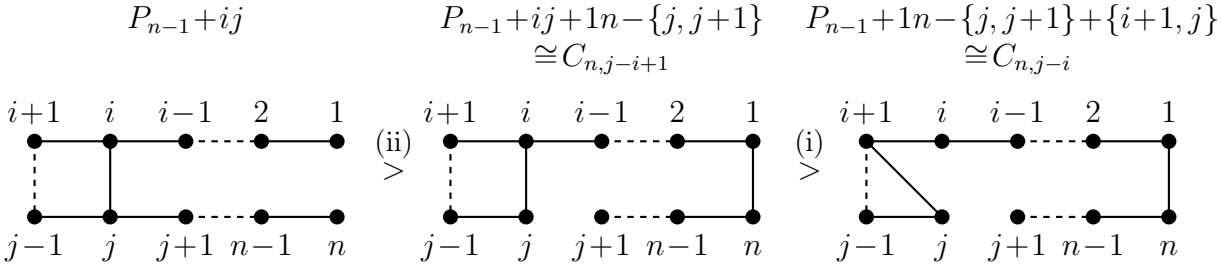


Abbildung 3.9: $\lambda_2(P_{n-1}+ij) > \lambda_2(C_{n,j-i+1}) > \lambda_2(C_{n,j-i})$ nach Lemma 3.16

Wegen $\lambda_2(C_4) = 2 > 1 = \lambda_2(C_{4,3})$ ist sicher $\lambda_2\left(P_{n-1}+\{1,n-1\}\right) < \lambda_2\left(P_{n-1}+\{1,n\}\right)$ für $n \geq 4$. Allgemeiner kann laut Lemma 3.16 keine Kantenwahl optimal bzgl. des Hinzufügens zu einem Pfad sein, die genau eines der beiden Blätter des Pfades verwendet. Tabelle 3.3 präsentiert alle auftretenden algebraischen Konnektivitäten nicht isomorpher Varianten für $n = 3, 4, 5, 6, 7$:

Kante ij	$\lambda_2(P_2+ij)$	$\lambda_2(P_3+ij)$	$\lambda_2(P_4+ij)$	$\lambda_2(P_5+ij)$	$\lambda_2(P_6+ij)$
17					0,75302
26					0,62280
16				1,00000	0,58579
15			1,38197	0,69722	0,38197
25				0,65708	0,38197
35					0,30037
14		2,00000	0,82991	0,43845	0,27652
24			0,69722	0,41309	0,26795
13	3,00000	1,00000	0,51881	0,32487	0,22538
keine	1,00000	0,58579	0,38197	0,26795	0,19806

Tabelle 3.3: Nicht isomorphe Varianten $\lambda_2(P_{n-1}+ij)$ für $n = 3, 4, 5, 6, 7$

Offenbar zeigt Tabelle 3.3 die Kante $1n$ für $n \leq 7$ als einzige optimale Lösung von Satz 3.14. Trotz dass die Knoten 2 und 6 eines Pfades P_6 im Sinne ihres Abstandes „besser verbunden“ sind als 1 und 6 bzw. obwohl $\alpha_{26}^2 \approx 0{,}69858 < 0{,}88177 \approx \alpha_{16}^2$ für $n = 7$ gilt, wird $\lambda_2(P_6+16) < \lambda_2(P_{n-1}+26)$ erfüllt, woraus $\alpha_{ij}^2 > \alpha_{kl}^2 \not\Rightarrow \lambda_2(G+ij) > \lambda_2(G+kl)$ für einen beliebigen Graphen $G = (N, E)$ folgt. Jedoch ist es aufgrund von (3.4), (3.5), (3.6) legitim, für eine genügend große Ungleichung $\alpha_{ij}^2 \gg \alpha_{kl}^2$ gerade $\lambda_2(G+ij) > \lambda_2(G+kl)$ zu schlussfolgern. Mit $n \geq 8$ treten plötzlich mehrere optimale Kanten auf. Werden ausschließlich solche ij betrachtet, für die $P_{n-1}+ij$ eine fest vorgegebene Taillenweite besitzt,

so lässt Lemma 3.16 (ii) vermuten, dass die größten algebraischen Konnektivitäten bzgl. dieser Taillenweite von $P_{n-1} + \{i, n-i+1\}$ für $i \in N$ mit $n - 2\,i > 0$ erzeugt werden. Tabelle 3.4 wurde mit (75) aus Abschnitt A für $n = 8, \ldots, 16$ errechnet und bestätigt diese Annahme:

i	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$n=12$	$n=13$	$n=14$	$n=15$	$n=16$
1	**0,58579**	**0,46791**	**0,38197**	**0,31749**	**0,26795**	**0,22909**	**0,19806**	**0,17291**	**0,15224**
2	**0,58579**	**0,46791**	**0,38197**	**0,31749**	**0,26795**	**0,22909**	**0,19806**	**0,17291**	**0,15224**
3	0,29072	0,28406	0,27859	0,27342	**0,26795**	**0,22909**	**0,19806**	**0,17291**	**0,15224**
4		0,16576	0,16199	0,15957	0,15776	0,15627	0,15492	0,15361	**0,15224**
5				0,10475	0,10290	0,10174	0,10092	0,10027	0,09973
6						0,07210	0,07105	0,07041	0,06996
7								0,05262	0,05197

Tabelle 3.4: $\lambda_2\left(P_{n-1} + \{i, n-i+1\}\right)$ für $n = 8, \ldots, 16$

Für $i = 1$ in Tabelle 3.4 ist die optimale Lösung $\lambda_2\left(P_{n-1} + 1n\right) = \lambda_2\left(C_n\right) = 2 - 2\cos\frac{2\,\pi}{n}$ aus Satz 3.14 zu erkennen. Selbige wird offenbar von einer mit $n \geq 8$ steigenden Anzahl zusätzlicher Kanten erreicht. Wie viele optimale Lösungen treten in Abhängigkeit von n auf? Mit den Tabellen 3.3 und 3.4 erhöht sich deren Bestand um eine optimale Kante bei Vergrößerung der Knotenanzahl des Pfades um vier Knoten. Tabelle 3.5 soll die Behauptung verstärken, dieses Verhalten für ein beliebig großes n erwarten zu dürfen, vgl. (75) aus Abschnitt A:

i	$n=19$	$n=20$	i	$n=23$	$n=24$	i	$n=51$	$n=52$
$1, \ldots, 4$	**0,10837**	**0,09789**	$1, \ldots, 5$	**0,07417**	**0,06815**	$1, \ldots, 12$	**0,015159**	**0,014582**
5	0,09835	**0,09789**	6	0,06834	**0,06815**	13	0,014586	**0,014582**
6	0,06911	0,06890	7	0,05059	0,05050	14	0,012590	0,012587
7	0,05110	0,05094	8	0,03890	0,03883	15	0,010975	0,010973
8	0,03939	0,03922	9	0,03085	0,03078	16	0,009651	0,009649
9	0,03154	0,03124	10	0,02512	0,02503	17	0,008553	0,008551

Tabelle 3.5: $\lambda_2\left(P_{n-1} + \{i, n-i+1\}\right)$ für $n = 19, 20, 23, 24, 51, 52$

Obige Ergebnisse führen zur nachstehenden Annahme über die Zahl optimaler Kanten für Satz 3.14:

Vermutung 3.17

Es ist optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität, einem Pfad $P_{n-1} = (N, E)$ eine der Kanten $\{i, n-i+1\}$ für $n \geq 4$ und $i \in \left\{1, 2, \ldots, \lfloor\frac{n}{4}\rfloor\right\}$ hinzuzufügen. Alle übrigen Kanten aus $\binom{N}{2} \setminus E$, die keiner dieser optimalen Kanten entsprechen, erzeugen ein zur optimalen algebraischen Konnektivität echt kleineres λ_2. Damit gibt es genau $\lfloor\frac{n}{4}\rfloor$ optimale Lösungen, einem Pfad der Länge $n-1 \geq 3$ eine Kante hinzuzufügen.

Ein Beweis von Vermutung 3.17 stellt sich als schwierig heraus. Dennoch soll eine Formel für das charakteristische Polynom von $P_{n-1} + ij$ hergeleitet werden, um eine erste Einsicht in die vorherrschenden Mechanismen zu erhalten. Hierfür sind mehrere spektrale Zusammenhänge notwendig:

Lemma 3.18 (vgl. z. B. [28, Lemma 8])

Für $G_1 = (N_1, E_1)$, $G_2 = (N_2, E_2)$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, $u \in N_1$, $v \in N_2$, $G \coloneqq G_1 \dot{+} G_2 + uv$ gilt die Beziehung $\chi_G\left(\lambda\right) = \chi_{G_1}\left(\lambda\right)\chi_{G_2}\left(\lambda\right) - \chi_{G_1}\left(\lambda\right)\chi_{L_v(G_2)}\left(\lambda\right) - \chi_{G_2}\left(\lambda\right)\chi_{L_u(G_1)}\left(\lambda\right)$.

Im nachfolgenden Lemma 3.19 sind unter B_n und H_n die $n \times n$-Matrizen

$$B_n := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_n := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

zu verstehen:

Lemma 3.19 (vgl. (i) bis (iv) [27, Le. 2.8], (v) [55, Le. 3.6] und (vi) [30, Le. 2.4])

Mit $n \geq 1$ seien der Endknoten u von P_n, der Anfangsknoten v von P_{n+1}, der Endknoten w von P_{n+1}, $B_n := L_u(P_n)$, $H_n := L_v(L_w(P_{n+1}))$, $P_{-1} := \emptyset$, $B_0 := L_n(P_0) := 1$, der isolierte Knoten P_0, die Spektren $\chi_{P_{-1}}(\lambda) := 0$, $\chi_{P_0}(\lambda) := \lambda$, $\chi_{B_0}(\lambda) := 1$, $\chi_{H_0}(\lambda) := 1$ und via E_{ii} diejenige Matrix passender Dimension gegeben, deren ii-Eintrag gleich Eins ist und deren übrige Einträge gleich Null sind. Es werden folgende Gleichungen erfüllt:

(i) $\lambda\,\chi_{B_n}(\lambda) = \chi_{P_n}(\lambda) + \chi_{P_{n-1}}(\lambda)$ für $n \geq 0$;

(ii) $\chi_{P_n}(\lambda) = (\lambda - 2)\,\chi_{P_{n-1}}(\lambda) - \chi_{P_{n-2}}(\lambda)$ für $n \geq 1$;

(iii) $\chi_{P_{n-1}}(\lambda) = \lambda\,\chi_{H_{n-1}}(\lambda)$ für $n \geq 1$;

(iv) $\lambda\,\chi_{C_n}(\lambda) = \chi_{P_n}(\lambda) - \chi_{P_{n-2}}(\lambda) + 2\,\lambda\,(-1)^{n+1}$ für $n \geq 3$;

(v) $\chi_{B_n+E_{22}}(\lambda) = \chi_{B_n}(\lambda) - (\lambda - 1)\,\chi_{H_{n-2}}(\lambda)$ für $n \geq 2$;

(vi) $\chi_{C_{n,n-1}}(\lambda) = (\lambda - 1)\,\chi_{C_{n-1}}(\lambda) - \chi_{P_{n-2}}(\lambda)$ für $n \geq 4$.

Zur Berechnung des charakteristischen Polynoms von $P_{n-1} + ij$ für $n \geq 5$ werden ausschließlich Kanten ij mit $j \in N \setminus \{1, 2, 3\}$ und $2 < i + 1 < j < n$ benutzt, da bekanntlich keine Kante optimal sein kann, die genau eines der beiden Blätter des Pfades verwendet. Offenbar ist $P_{n-1} + ij \cong C_{j,j-i+1} \dot{+} P_{n-j-1} + \{j, j+1\}$, vgl. Abbildung 3.10:

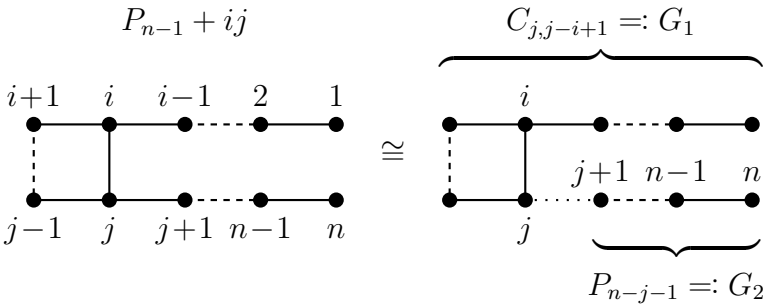


Abbildung 3.10: $P_{n-1} + ij \cong C_{j,j-i+1} \dot{+} P_{n-j-1} + \{j, j+1\}$

Über $G_1 := C_{j,j-i+1}$ und $G_2 := P_{n-j-1}$ wie in Abbildung 3.10 liefert Lemma 3.18 gerade

$$\chi_{P_{n-1}+ij}(\lambda) = \chi_{C_{j,j-i+1}}(\lambda)\,\chi_{P_{n-j-1}}(\lambda) - \chi_{C_{j,j-i+1}}(\lambda)\,\chi_{L_{j+1}(P_{n-j-1})}(\lambda) - \chi_{P_{n-j-1}}(\lambda)\,\chi_{L_j(C_{j,j-i+1})}(\lambda).$$

Für einen Beweis von Vermutung 3.17 müsste aufgrund der Beobachtungen aus den Tabellen 3.4, 3.5 gezeigt werden, dass die zweitkleinste Nullstelle dieses charakteristischen

Polynoms für alle $j \in N \setminus \{1,2,3\}$, $2 < i+1 < j < n$, $j \neq n-i+1$ echt kleiner als die zweitkleinste Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$\chi_{P_{n-1}+\{i,n-i+1\}}(\lambda) = \chi_{C_{n-i+1,n-2i+2}}(\lambda)\,\chi_{P_{i-2}}(\lambda) - \chi_{C_{n-i+1,n-2i+2}}(\lambda)\,\chi_{L_{n-i+2}(P_{i-2})}(\lambda) - \chi_{P_{i-2}}(\lambda)\,\chi_{L_{n-i+1}(C_{n-i+1,n-2i+2})}(\lambda)$$

von $P_{n-1}+\{i,n-i+1\}$ für $i \in \left\{1,2,\ldots,\lfloor\frac{n}{4}\rfloor\right\}$ ist. Zudem sollen die maximalen algebraischen Konnektivitäten gerade $\lambda_2\left(P_{n-1}+\{i,n-i+1\}\right) = \lambda_2(C_n)$ für $i \in \left\{1,2,\ldots,\lfloor\frac{n}{4}\rfloor\right\}$ erfüllen. Eine Methode zur Lösung dieser Aufgaben wäre es, die Differenzen der Polynome $\chi_{C_n}(\lambda) - \chi_{P_{n-1}+\{i,n-i+1\}}(\lambda)$ bzw. $\chi_{P_{n-1}+\{i,n-i+1\}}(\lambda) - \chi_{P_{n-1}+ij}(\lambda)$ oder Variationen davon derart zu vereinfachen, dass Aussagen über deren Nullstellen möglich sind. Einige Beweise aus Abschnitt 3.4 unterliegen einer solchen Verfahrensweise. Die komplizierte Gestalt von $\chi_{P_{n-1}+\{i,n-i+1\}}(\lambda)$ vereinfacht sich schlagartig, wenn ein konkreter Knoten i von P_{n-1} vorgegeben wird. Für beispielsweise $i=2$ ist $\chi_{P_{n-1}+\{2,n-1\}}(\lambda)$ über Lemma 3.19 zu ermitteln, wobei abkürzend nur (i) statt Lemma 3.19 (i) usw. geschrieben werden soll. Es gilt

$$\begin{aligned}
\chi_{P_{n-1}+\{2,n-1\}}(\lambda) &= \chi_{C_{n-1,n-2}}(\lambda)\overbrace{\chi_{P_0}(\lambda)}^{=\lambda} - \chi_{C_{n-1,n-2}}(\lambda)\overbrace{\chi_{L_n(P_0)}(\lambda)}^{=\chi_{B_0}(\lambda)=1} \\
&\quad - \underbrace{\chi_{P_0}(\lambda)}_{=\lambda}\underbrace{\chi_{L_{n-1}(C_{n-1,n-2})}(\lambda)}_{=\chi_{B_{n-2}+E_{22}}(\lambda)} \\
&\overset{\text{(vi)}}{=\!=} \lambda(\lambda-1)\chi_{C_{n-2}}(\lambda) - \lambda\chi_{P_{n-3}}(\lambda) - (\lambda-1)\chi_{C_{n-2}}(\lambda) \\
&\quad + \chi_{P_{n-3}}(\lambda) - \lambda\underbrace{\chi_{B_{n-2}+E_{22}}(\lambda)}_{\overset{\text{(v)}}{=\!=}\chi_{B_{n-2}}(\lambda)-(\lambda-1)\chi_{H_{n-4}}(\lambda)} \\
&= (\lambda-1)^2\chi_{C_{n-2}}(\lambda) - (\lambda-1)\chi_{P_{n-3}}(\lambda) \\
&\quad - \lambda\big[-(\lambda-1)\underbrace{\chi_{H_{n-4}}(\lambda)}_{\overset{\text{(iii)}}{=\!=}\frac{1}{\lambda}\chi_{P_{n-4}}(\lambda)} + \underbrace{\chi_{B_{n-2}}(\lambda)}_{\overset{\text{(i)}}{=\!=}\frac{1}{\lambda}\chi_{P_{n-2}}(\lambda)+\frac{1}{\lambda}\chi_{P_{n-3}}(\lambda)}\big] \\
&= (\lambda-1)^2\chi_{C_{n-2}}(\lambda) - \underbrace{\chi_{P_{n-2}}(\lambda)}_{\overset{\text{(ii)}}{=\!=}(\lambda-2)\chi_{P_{n-3}}(\lambda)-\chi_{P_{n-4}}(\lambda)} - \lambda\chi_{P_{n-3}}(\lambda) + (\lambda-1)\chi_{P_{n-4}}(\lambda) \\
&= (\lambda-1)^2\chi_{C_{n-2}}(\lambda) - 2(\lambda-1)\chi_{P_{n-3}}(\lambda) + \lambda\chi_{P_{n-4}}(\lambda)
\end{aligned}$$

und daher gibt es einen Zusammenhang zwischen den Spektren der Graphen C_{n-2}, P_{n-3}, P_{n-4} bzw. $P_{n-1}+\{2,n-1\}$. Alternativ lässt sich $\chi_{C_{n-2}}(\lambda)$ via

$$\begin{aligned}
\chi_{P_{n-1}+\{2,n-1\}}(\lambda) &= (\lambda-1)^2\overbrace{\chi_{C_{n-2}}(\lambda)}^{\overset{\text{(iv)}}{=\!=}\frac{1}{\lambda}\chi_{P_{n-2}}(\lambda)-\frac{1}{\lambda}\chi_{P_{n-4}}(\lambda)+2(-1)^{n+1}} - 2(\lambda-1)\chi_{P_{n-3}}(\lambda) + \lambda\chi_{P_{n-4}}(\lambda) \\
&= \tfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda}\overbrace{\chi_{P_{n-2}}(\lambda)}^{\overset{\text{(ii)}}{=\!=}(\lambda-2)\chi_{P_{n-3}}(\lambda)-\chi_{P_{n-4}}(\lambda)} - 2(\lambda-1)\chi_{P_{n-3}}(\lambda) + \tfrac{2\lambda-1}{\lambda}\chi_{P_{n-4}}(\lambda) \\
&\quad + 2(\lambda-1)^2(-1)^{n+1} \\
&= \tfrac{(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+2)}{\lambda}\chi_{P_{n-3}}(\lambda) - \tfrac{\lambda^2-4\lambda+2}{\lambda}\chi_{P_{n-4}}(\lambda) \\
&\quad + 2(\lambda-1)^2(-1)^{n+1}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

eliminieren. Um nun z. B. $\lambda_2(C_n) = \lambda_2\left(P_{n-1}+\{2,n-1\}\right)$ für $n \geq 8$ zu zeigen, müsste

$\lambda_2(C_n)$ zumindest als Nullstelle von $\chi_{P_{n-1}+\{2,n-1\}}(\lambda)$ erkannt werden. Mit den Gleichungen (3.8), (3.11), (3.14) und (76) aus Abschnitt A ist dies äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \chi_{P_{n-1}+\{2,n-1\}}(\lambda_2(C_n)) \\
&\overset{(3.14)}{=\!=\!=} \tfrac{[\lambda_2(C_n)-1][\lambda_2(C_n)^2-5\lambda_2(C_n)+2]}{\lambda_2(C_n)} \chi_{P_{n-3}}(\lambda_2(C_n)) - \tfrac{\lambda_2(C_n)^2-4\lambda_2(C_n)+2}{\lambda_2(C_n)} \chi_{P_{n-4}}(\lambda_2(C_n)) \\
&\quad + 2\left[\lambda_2(C_n)-1\right]^2 (-1)^{n+1} \\
&= \tfrac{[\lambda_2(C_n)-1][\lambda_2(C_n)^2-5\lambda_2(C_n)+2]}{\lambda_2(C_n)} \prod_{k=1}^{n-2} \left[\lambda_2(C_n) - \lambda_k(P_{n-3})\right] \\
&\quad - \tfrac{\lambda_2(C_n)^2-4\lambda_2(C_n)+2}{\lambda_2(C_n)} \prod_{k=1}^{n-3} \left[\lambda_2(C_n) - \lambda_k(P_{n-4})\right] + 2\left[\lambda_2(C_n)-1\right]^2 (-1)^{n+1} \\
&\overset{(3.8)}{\underset{(3.11)}{=\!=\!=}} 2^{n-2} \tfrac{2+4\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)^3 - 5\cos\frac{2\pi}{n}}{-1+\cos\frac{2\pi}{n}} \prod_{k=1}^{n-2} \left[\cos\tfrac{(k-1)\pi}{n-2} - \cos\tfrac{2\pi}{n}\right] \\
&\quad + 2^{n-3} \tfrac{2\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2 - 1}{-1+\cos\frac{2\pi}{n}} \prod_{k=1}^{n-3} \left[\cos\tfrac{(k-1)\pi}{n-3} - \cos\tfrac{2\pi}{n}\right] + 8\left(\cos\tfrac{2\pi}{n}\right)^2 (-1)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Es erweist sich als sichtbar schwierig, bereits diese Beziehung für einen Anfang des Beweises von Vermutung 3.17 einzusehen.

Im Anschluss an die Erkenntnis aus Satz 3.14 stellt sich sofort die Frage nach der optimalen Kante, welche einem Kreis hinzugefügt werden soll. Mit den bisherigen Aussagen ist auch diese zu beantworten:

Satz 3.20

Das Hinzufügen einer beliebigen Kante zu einem Kreis $C_n = (N, E)$ der Länge $n \geq 4$ lässt dessen algebraische Konnektivität unberührt, das heißt, jede Kante $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ ist optimal im Sinne der Maximierung von $\lambda_2(C_n + ij) = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}$.

Beweis:

Dies folgt entweder sofort aus Korollar 3.2 und (3.11) oder nach Beobachtung 3.13 und Satz 3.1 über $2 - 2\cos\frac{2\pi}{n} = \lambda_2(C_n) \leq \lambda_2(C_n + ij) \leq \lambda_3(C_n) = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}$, womit $\lambda_2(C_n + ij) = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}$ für alle $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ gilt. □

Bemerkung 3.21

Die Ungleichung (3.13) ergibt sich alternativ aus Satz 3.20 und (3.2), denn für $ij \neq kl$, $ij, kl \in E(C_n)$ ist $\lambda_2(C_n) = \lambda_2(C_n + ij) \geq \lambda_2(C_n + ij - kl) = \lambda_2(P_{n-1} + ij)$, vgl. Abbildung 3.11.

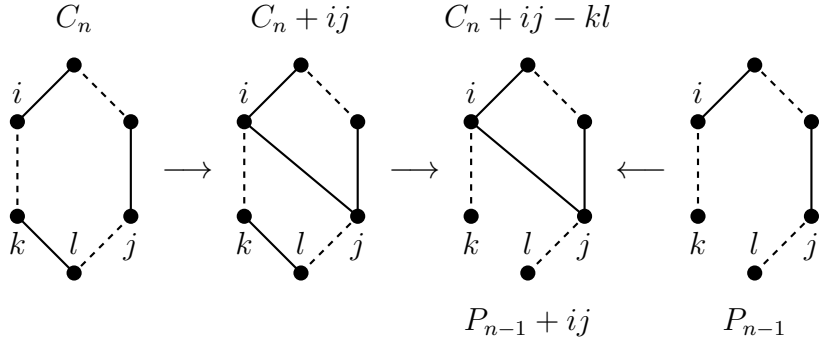


Abbildung 3.11: Zusammenhang zwischen Satz 3.14 und Satz 3.20

Bisher wurden mit P_{n-1} und C_n ausschließlich zusammenhängende Graphen betrachtet. Im unzusammenhängenden Fall besteht $G = (N, E)$ sinnvollerweise aus zwei Zusammenhangskomponenten und es gilt $\lambda_2(G) = 0$ laut Beobachtung 2.23. Ist $kl \in \binom{N}{2} \setminus E$ eine Kante, die diese Zusammenhangskomponenten beim Hinzufügen zu G nicht verbindet, so folgt $\lambda_2(G + kl) = 0$, für alle verbindenden Kanten $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ jedoch $\lambda_2(G + ij) > 0$, vgl. Abschnitt 2.4. Somit sind nur verbindende Kanten von Interesse.

Die Frage nach einer optimalen Verbindung zweier disjunkter Kreise ist ohne Belang, da alle auftretenden Varianten isomorph sind. Es bleiben diejenigen Situationen übrig, in denen $G = (N, E)$ aus zwei disjunkten Pfaden oder aus der disjunkten Vereinigung eines Pfades mit einem Kreis entsteht.

Zunächst sei $G = P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1}$ für $n \geq 5$ und $s = 2, 3, \ldots, n-2$, denn es lässt sich unschwer überlegen, dass die Lösungen für $n < 5$ allesamt trivial sind. Die Knotenmenge von P_{s-1} sei $\{1, \ldots, s\}$ und jene von P_{n-s-1} gerade $\{s+1, \ldots, n\}$.

Satz 3.22

Bei der Betrachtung zweier disjunkter Pfade P_{s-1} auf den Knoten $\{1, \ldots, s\}$ und P_{n-s-1} mit der Knotenmenge $\{s+1, \ldots, n\}$ ist es optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität, dem Graphen $P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} = (N, E)$ eine Kante derart hinzuzufügen, dass sie die mittig platzierten Knoten beider Pfade verbindet, das heißt

$$\begin{aligned}
\lambda_2\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + \lfloor \tfrac{s+1}{2} \rfloor \lfloor \tfrac{n+s+1}{2} \rfloor\right) &= \lambda_2\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + \lfloor \tfrac{s+1}{2} \rfloor \lceil \tfrac{n+s+1}{2} \rceil\right) \\
&= \lambda_2\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + \lceil \tfrac{s+1}{2} \rceil \lfloor \tfrac{n+s+1}{2} \rfloor\right) \\
&= \lambda_2\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + \lceil \tfrac{s+1}{2} \rceil \lceil \tfrac{n+s+1}{2} \rceil\right) \\
&\geq \lambda_2\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + ij\right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

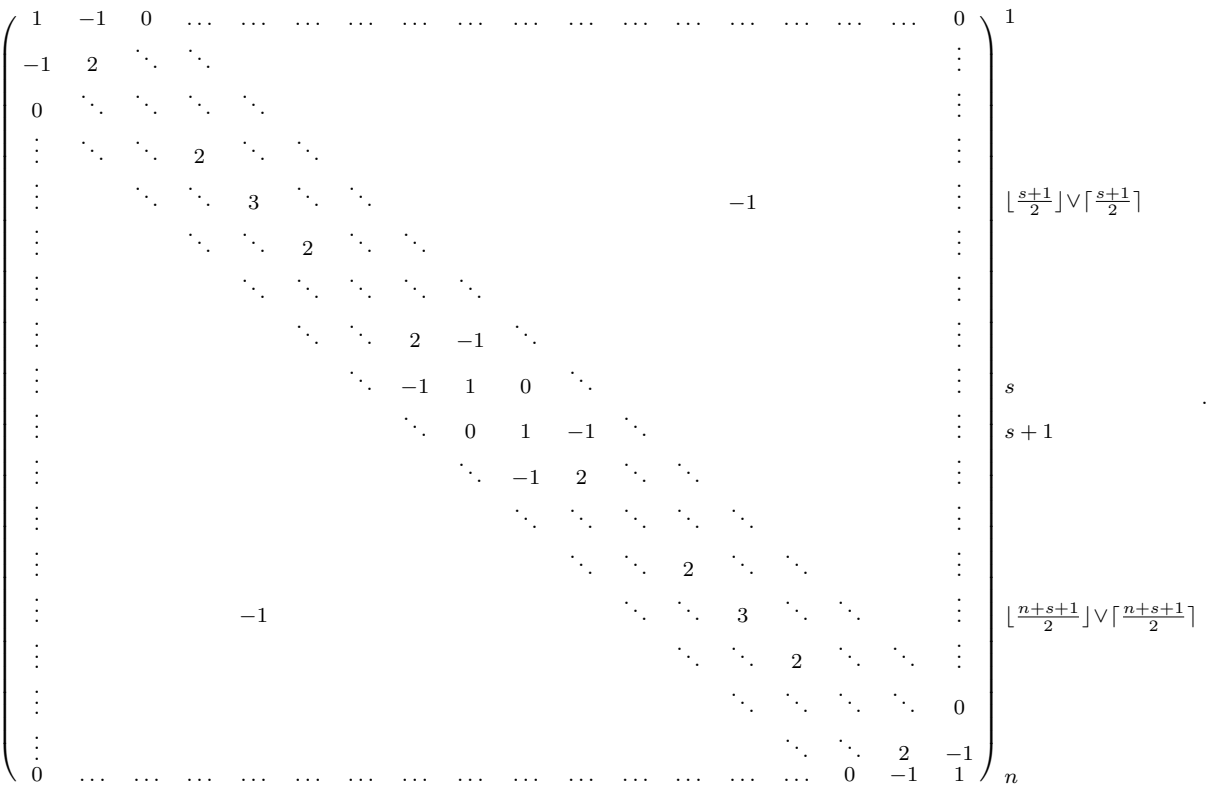
für alle $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$, $n \geq 5$, $s = 2, 3, \ldots, n-2$. Gleichheit gilt in (3.15) genau dann, wenn $ij \in \left\{\lfloor \tfrac{s+1}{2} \rfloor \lfloor \tfrac{n+s+1}{2} \rfloor, \lfloor \tfrac{s+1}{2} \rfloor \lceil \tfrac{n+s+1}{2} \rceil, \lceil \tfrac{s+1}{2} \rceil \lfloor \tfrac{n+s+1}{2} \rfloor, \lceil \tfrac{s+1}{2} \rceil \lceil \tfrac{n+s+1}{2} \rceil\right\}$ ist, vgl. Abbildung 3.13.

Beweis:

Mit $pq \in \left\{\lfloor \tfrac{s+1}{2} \rfloor \lfloor \tfrac{n+s+1}{2} \rfloor, \lfloor \tfrac{s+1}{2} \rfloor \lceil \tfrac{n+s+1}{2} \rceil, \lceil \tfrac{s+1}{2} \rceil \lfloor \tfrac{n+s+1}{2} \rfloor, \lceil \tfrac{s+1}{2} \rceil \lceil \tfrac{n+s+1}{2} \rceil\right\}$ sind alle Graphen der Form $P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq$ isomorph und haben gleiche Spektren. Offenbar können diese Graphen $P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq$ dank ihrer Gestalt als $G^m_{k,l}$ aus Lemma 3.3 (iii) mit Knoten $m \in \left\{\lfloor \tfrac{s+1}{2} \rfloor, \lceil \tfrac{s+1}{2} \rceil, \lfloor \tfrac{n+s+1}{2} \rfloor, \lceil \tfrac{n+s+1}{2} \rceil\right\}$ aufgefasst werden. Für $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$, $ij \neq pq$ sind sämtliche Varianten $P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + ij$ durch Modifikation von $P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq$ gemäß Lemma 3.3 (iii) zu erhalten und daher ist $\lambda_2(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq) \geq \lambda_2(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + ij)$ erfüllt, womit (3.15) gezeigt wurde. Laut Lemma 3.3 (iii) gilt die strikte Ungleichung, wenn

- für $m \in \left\{\lfloor \tfrac{s+1}{2} \rfloor, \lceil \tfrac{s+1}{2} \rceil\right\}$ entweder $y_2^1(G^m_{k,l}) \neq 0$ oder $y_2^s(G^m_{k,l}) \neq 0$ ist,
- mit $m \in \left\{\lfloor \tfrac{n+s+1}{2} \rfloor, \lceil \tfrac{n+s+1}{2} \rceil\right\}$ entweder $y_2^{s+1}(G^m_{k,l}) \neq 0$ oder $y_2^n(G^m_{k,l}) \neq 0$ folgt.

Da beide Fälle analog zu behandeln sind, sei $m \in \left\{\lfloor \tfrac{s+1}{2} \rfloor, \lceil \tfrac{s+1}{2} \rceil\right\}$ ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Nun werde $L(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq)\, y_2 = \lambda_2\, y_2$ betrachtet. Angenommen, es gilt $y_2^1 = y_2^s = 0$, dann liefert die spezielle Gestalt der Laplace-Matrix $-y_2^2 = \lambda_2\, y_2^1 = 0$ bzw. $-y_2^{s-1} = \lambda_2\, y_2^s = 0$, vgl. dazu $L(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq)$ für beispielsweise $n \geq 10$ und $s = 3, 4, \ldots, n-3$ via



Sukzessive ist $y_2^1 = \ldots = y_2^s = 0$ sowie entweder $y_2^{\lfloor\frac{n+s+1}{2}\rfloor} = 0$ oder $y_2^{\lceil\frac{n+s+1}{2}\rceil} = 0$ über die Struktur von $L\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq\right)$ für $n \geq 5$, $s = 2, 3, \ldots, n-2$ zu schlussfolgern. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $y_2^{\lfloor\frac{n+s+1}{2}\rfloor} = 0$, der Fall für $y_2^{\lceil\frac{n+s+1}{2}\rceil} = 0$ folgt analog. Wäre nun $y_2^r = 0$ für einen beliebigen Knoten $r \in \{s+1, \ldots, n\}$ auf P_{n-s-1}, $r \neq \lfloor\frac{n+s+1}{2}\rfloor$, so würde wegen der speziellen Gestalt von $L\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq\right)$ und Satz 3.4 (i) gerade $y_2^{s+1} = \ldots = y_2^n = 0$ gelten, das heißt $y_2^1 = \ldots = y_2^n = 0$ und y_2 wäre kein Eigenvektor zu λ_2. Dieser Widerspruch würde $y_2^1 \neq 0$ oder $y_2^s \neq 0$ und mit Lemma 3.3 (iii) die Behauptung zeigen. Es sei daher $y_2^r \neq 0$ für alle Knoten $r \in \{s+1, \ldots, n\}$ auf P_{n-s-1}, $r \neq \lfloor\frac{n+s+1}{2}\rfloor$. In diesem Fall ist $P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq$ ein Baum vom Typ I mit charakteristischem Knoten $\lfloor\frac{n+s+1}{2}\rfloor$, vgl. Abbildung 3.12 und Definition 3.5.

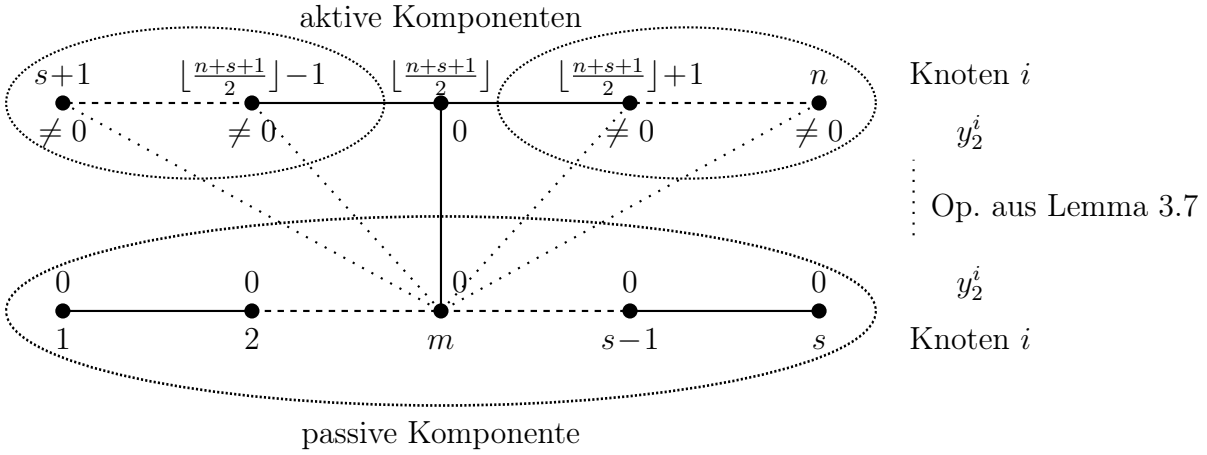


Abbildung 3.12: Mittige Verbindung zweier Pfade P_{s-1} und P_{n-s-1} als Baum vom Typ I

Mittels wiederholter Anwendung von Lemma 3.8 beginnend bei $P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq$ aus

Abbildung 3.12 ergibt sich die Gleichung

$$\lambda_2\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq\right) = \lambda_2\left(P_{n-s-1}\right). \tag{3.16}$$

Da jedoch $\lambda_2\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq\right) \leq \lambda_3\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1}\right) = \min\left\{\lambda_2\left(P_{s-1}\right), \lambda_2\left(P_{n-s-1}\right)\right\}$ aufgrund von (3.2) und Beobachtung 2.23 gilt, kann (3.16) nur für $\lambda_2\left(P_{s-1}\right) \geq \lambda_2\left(P_{n-s-1}\right)$ erfüllt sein, das heißt wegen (3.8) für $n - s \geq s \Leftrightarrow n \geq 2\,s$. Es darf somit $n \geq \max\left\{2\,s, 5\right\}$ angenommen werden. In diesem Fall lässt sich $P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + ij$ für alle $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ durch jeweilige Anwendung der Operation von Lemma 3.7 aus $P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq$ konstruieren. Lemma 3.7 besagt schließlich $\lambda_2\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + pq\right) > \lambda_2\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + ij\right)$, wobei m dem v und $\lfloor \frac{n+s+1}{2} \rfloor$ dem i aus Lemma 3.7 entspricht. □

Bemerkung 3.23

Laut Satz 3.22 gibt es für ein gerades s bei geradem n genau vier optimale Kanten $\lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n+s+1}{2} \rfloor$, $\lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor \lceil \frac{n+s+1}{2} \rceil$, $\lceil \frac{s+1}{2} \rceil \lfloor \frac{n+s+1}{2} \rfloor$, $\lceil \frac{s+1}{2} \rceil \lceil \frac{n+s+1}{2} \rceil$, für ein ungerades s bei ungeradem n genau zwei optimale Kanten $\frac{s+1}{2} \lfloor \frac{n+s+1}{2} \rfloor$, $\frac{s+1}{2} \lceil \frac{n+s+1}{2} \rceil$, für ein gerades s bei ungeradem n genau zwei optimale Kanten $\lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor \frac{n+s+1}{2}$, $\lceil \frac{s+1}{2} \rceil \frac{n+s+1}{2}$ und für ein ungerades s bei geradem n genau eine optimale Kante $\left\{\frac{s+1}{2}, \frac{n+s+1}{2}\right\}$, zwei disjunkte Pfade $P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1}$ mit dem Ziel der Maximierung von $\lambda_2\left(P_{s-1} \dot{+} P_{n-s-1} + ij\right)$ für $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ zu verbinden, vgl. Abbildung 3.13.

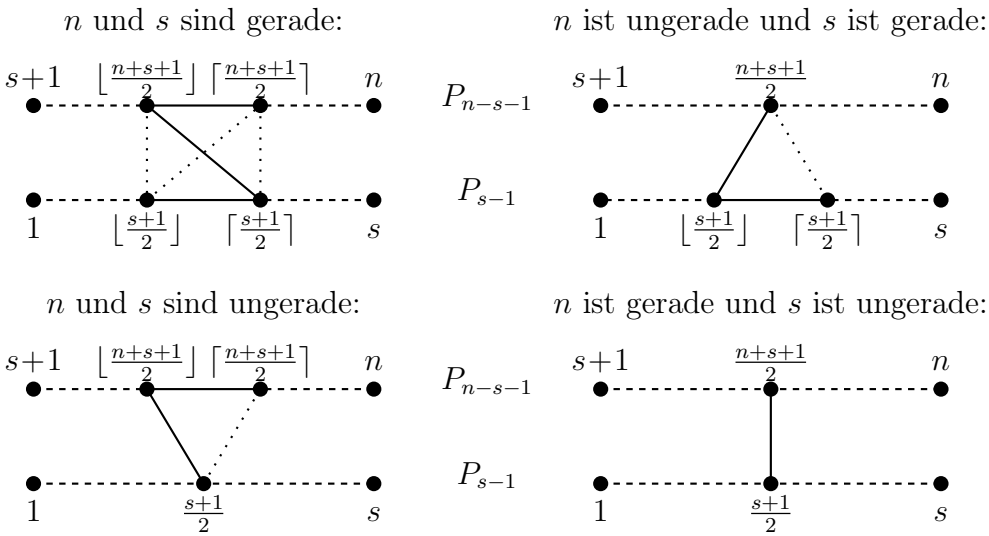


Abbildung 3.13: Optimale Verbindung zweier Pfade P_{s-1} und P_{n-s-1}

Sind beispielsweise für $n = 12$ und $s = 6$ zwei disjunkte Pfade $P_5 \dot{+} P_5$ gegeben, so existieren genau sechs zueinander nicht isomorphe Möglichkeiten, ihnen eine verbindende Kante hinzuzufügen. Tabelle 3.6 zeigt die dabei auftretenden algebraischen Konnektivitäten:

Kante ij	$\lambda_2\left(P_5 \dot{+} P_5 + ij\right)$	$P_5 \dot{+} P_5$
3 9, 3 10, 4 9, 4 10	0,14196	
2 9, 2 10, 3 8, 3 11, 4 8, 4 11, 5 9, 5 10	0,11286	
2 8, 2 11, 5 8, 5 11	0,09679	
1 9, 1 10, 3 7, 3 12, 4 7, 4 12, 6 9, 6 10	0,08920	
1 8, 1 11, 2 7, 2 12, 5 7, 5 12, 6 8, 6 11	0,07978	
1 7, 1 12, 6 7, 6 12	0,06815	
keine	0,00000	

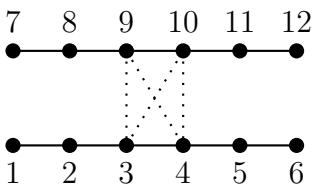


Tabelle 3.6: $\lambda_2\left(P_5 \dot{+} P_5 + ij\right)$

Zum Ende dieses Abschnittes soll noch die disjunkte Vereinigung eines Pfades mit einem Kreis $C_{n-s} \dot{+} P_{s-1}$ für $n \geq 5$ und $s = 2, 3, \ldots, n-3$ betrachtet werden. Hierbei besitzt P_{s-1} die Knotenmenge $\{1, \ldots, s\}$ und C_{n-s} die Knotenmenge $\{s+1, \ldots, n\}$. Wiederum erhöht nur eine den Kreis und den Pfad verbindende Kante die algebraische Konnektivität, wobei ein beliebiger Knoten des Kreises zum Verbinden gewählt werden darf.

Satz 3.24

Gegeben seien ein Pfad P_{s-1} auf den Knoten $\{1, \ldots, s\}$ und ein Kreis C_{n-s} mit der Knotenmenge $\{s+1, \ldots, n\}$. Es ist optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität, dem Graphen $C_{n-s} \dot{+} P_{s-1} = (N, E)$ eine Kante derart hinzuzufügen, dass sie einen mittig platzierten Knoten des Pfades P_{s-1} mit einem beliebigen Knoten des Kreises C_{n-s} verbindet, das heißt

$$\begin{aligned} \lambda_2\left(C_{n-s} \dot{+} P_{s-1} + a\left\lfloor \tfrac{s+1}{2} \right\rfloor\right) &= \lambda_2\left(C_{n-s} \dot{+} P_{s-1} + a\left\lceil \tfrac{s+1}{2} \right\rceil\right) \\ &\geq \lambda_2\left(C_{n-s} \dot{+} P_{s-1} + ij\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

für alle $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$, $n \geq 5$, $s = 2, 3, \ldots, n-3$, $a \in \{s+1, \ldots, n\}$. Gleichheit gilt in (3.17) genau dann, wenn $ij \in \left\{a\left\lfloor \tfrac{s+1}{2} \right\rfloor, a\left\lceil \tfrac{s+1}{2} \right\rceil\right\}$ ist, vgl. Abbildung 3.14.

Beweis:

Die Graphen $C_{n-s} \dot{+} P_{s-1} + a\left\lfloor \tfrac{s+1}{2} \right\rfloor$ bzw. $C_{n-s} \dot{+} P_{s-1} + a\left\lceil \tfrac{s+1}{2} \right\rceil$ sind für $a \in \{s+1, \ldots, n\}$ isomorph und haben das gleiche Spektrum. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde $G \coloneqq C_{n-s} \dot{+} P_{s-1} + a\left\lfloor \tfrac{s+1}{2} \right\rfloor$ mit $a \coloneqq s+1$ betrachtet. Analog zum Beweis von Satz 3.22 lässt sich G als der Graph $G_{k,l}^{\left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor}$ aus Lemma 3.3 (iii) auffassen. Bezeichnet $\overline{y}_2 = \overline{y}_2(G)$ einen normierten Fiedler-Vektor von G, so liefert Lemma 3.3 (iii) die Behauptung, falls entweder $\overline{y}_2^1 \neq 0$ oder $\overline{y}_2^s \neq 0$ ist. Angenommen, es gilt $\overline{y}_2^1 = \overline{y}_2^s = 0$. Aus $L(G)\,\overline{y}_2 = \lambda_2\,\overline{y}_2$ und der speziellen Gestalt der Laplace-Matrix

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & \ddots & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 3 & \ddots & \ddots & & & -1 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 2 & \ddots & \ddots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 2 & -1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & -1 & 1 & 0 & \ddots & & & & 0 \\ \vdots & & & & -1 & & & \ddots & 0 & 3 & -1 & \ddots & & & -1 \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & -1 & 2 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ \\ \left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor \\ \\ \\ \\ \\ \\ s \\ s+1 \\ \\ \\ \\ \\ n \end{array} \end{array},$$

von G ist $\overline{y}_2^1 = \overline{y}_2^2 = \ldots = \overline{y}_2^s = \overline{y}_2^{s+1} = 0$ festzustellen. Die nachfolgenden Ausführungen sind an den Beweis von [25, Theorem 5] angelehnt: Es darf sicher $\overline{y}_2^r \neq 0$ für einen Knoten $r \in \{s+2, \ldots, n\}$ angenommen werden, da sonst $\overline{y}_2 = 0$ keinen Eigenvektor bezeichnen würde. Mit $G' \coloneqq G - \{s+1, \lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor\} + \{r, \lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor\}$ wird ein zu G isomorpher Graph G' betrachtet. Für $z = (z_1, \ldots, z_n)^\top \coloneqq \big(\underbrace{\overline{y}_2^r, \ldots, \overline{y}_2^r}_{s\text{-mal}}, \overline{y}_2^{s+1}, \ldots, \overline{y}_2^n\big)^\top$ ist

$$\begin{aligned}
\langle L(G')\, z, z\rangle &= \sum_{ij \in E(C_{n-s})} \big(z_i - z_j\big)^2 + \sum_{ij \in E(P_{s-1})} \big(z_i - z_j\big)^2 + \big(z_r - z_{\lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor}\big)^2 \\
&= \sum_{ij \in E(C_{n-s})} \big(\overline{y}_2^i - \overline{y}_2^j\big)^2 + \underbrace{\sum_{ij \in E(P_{s-1})} \big(\overline{y}_2^r - \overline{y}_2^r\big)^2}_{= 0 = \sum\limits_{ij \in E(P_{s-1})} \left(\overline{y}_2^i - \overline{y}_2^j\right)^2} + \underbrace{\big(\overline{y}_2^r - \overline{y}_2^r\big)^2}_{= 0 = \left(\overline{y}_2^{s+1} - \overline{y}_2^{\lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor}\right)^2} \\
&= \langle L(G)\, \overline{y}_2, \overline{y}_2\rangle = \lambda_2(G)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

und $\langle z, \mathbf{1}\rangle = \langle \overline{y}_2, \mathbf{1}\rangle + s\, \overline{y}_2^r = s\, \overline{y}_2^r$. Über $x \coloneqq z - \frac{s}{n}\, \overline{y}_2^r\, \mathbf{1}$ mit

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^\top = \big(\underbrace{(1 - \tfrac{s}{n})\, \overline{y}_2^r, \ldots, (1 - \tfrac{s}{n})\, \overline{y}_2^r}_{s\text{-mal}}, \overline{y}_2^{s+1} - \tfrac{s}{n}\, \overline{y}_2^r, \ldots, \overline{y}_2^n - \tfrac{s}{n}\, \overline{y}_2^r\big)^\top$$

folgt $\langle x, \mathbf{1}\rangle = \langle z - \frac{s}{n}\, \overline{y}_2^r\, \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \langle z, \mathbf{1}\rangle - \frac{s}{n}\, \overline{y}_2^r\, \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = s\, \overline{y}_2^r - \frac{s}{n}\, \overline{y}_2^r\, n = 0$ bzw.

$$\begin{aligned}
\langle L(G')\, x, x\rangle &= \sum_{ij \in E(C_{n-s})} \big(x_i - x_j\big)^2 + \sum_{ij \in E(P_{s-1})} \big(x_i - x_j\big)^2 + \big(x_r - x_{\lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor}\big)^2 \\
&= \sum_{ij \in E(C_{n-s})} \big(\overline{y}_2^i - \tfrac{s}{n}\, \overline{y}_2^r - \overline{y}_2^j + \tfrac{s}{n}\, \overline{y}_2^r\big)^2 + \sum_{ij \in E(P_{s-1})} \big((1 - \tfrac{s}{n})\, \overline{y}_2^r - (1 - \tfrac{s}{n})\, \overline{y}_2^r\big)^2 \\
&\quad + \big(\overline{y}_2^r - \tfrac{s}{n}\, \overline{y}_2^r - (1 - \tfrac{s}{n})\, \overline{y}_2^r\big)^2 \\
&= \sum_{ij \in E(C_{n-s})} \big(\overline{y}_2^i - \overline{y}_2^j\big)^2 + \sum_{ij \in E(P_{s-1})} \big(\overline{y}_2^r - \overline{y}_2^r\big)^2 + \big(\overline{y}_2^r - \overline{y}_2^r\big)^2 \\
&= \langle L(G')\, z, z\rangle \overset{(3.18)}{=\!=} \langle L(G)\, \overline{y}_2, \overline{y}_2\rangle = \lambda_2(G).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Wegen $1 < s < n$ ist $s - \frac{s^2}{n} > 0$ und mit $(\overline{y}_2^r)^2 > 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= s\, \big(\overline{y}_2^r - \tfrac{s}{n}\, \overline{y}_2^r\big)^2 + \sum_{p=s+1}^{n} \big(\overline{y}_2^p - \tfrac{s}{n}\, \overline{y}_2^r\big)^2 \\
&= s\, \big(1 - \tfrac{s}{n}\big)^2 \big(\overline{y}_2^r\big)^2 + \sum_{p=s+1}^{n} \Big[\big(\overline{y}_2^p\big)^2 - 2\, \tfrac{s}{n}\, \overline{y}_2^r\, \overline{y}_2^p + \tfrac{s^2}{n^2} \big(\overline{y}_2^r\big)^2\Big] \\
&= s\, \big(1 - \tfrac{s}{n}\big)^2 \big(\overline{y}_2^r\big)^2 + (n-s)\, \tfrac{s^2}{n^2} \big(\overline{y}_2^r\big)^2 + \underbrace{\sum_{p=s+1}^{n} (\overline{y}_2^p)^2}_{= \|\overline{y}_2\|_2^2 = 1} - 2\, \tfrac{s}{n}\, \overline{y}_2^r \underbrace{\sum_{p=s+1}^{n} \overline{y}_2^p}_{= \langle \overline{y}_2, \mathbf{1}\rangle = 0} \\
&= \big(s - \tfrac{s^2}{n}\big) \big(\overline{y}_2^r\big)^2 + 1 > 1,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

das heißt

$$\lambda_2(G') \overset{(2.9)}{\leq} \frac{\langle L(G')\,x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \overset{(3.19)}{=\!=} \frac{\lambda_2(G)}{\langle x, x\rangle} \overset{(3.20)}{<} \lambda_2(G),$$

was einen Widerspruch zu $G' \cong G$ erzeugt. Schließlich muss entweder $\overline{y}_2^1 \neq 0$ oder $\overline{y}_2^s \neq 0$ gelten. □

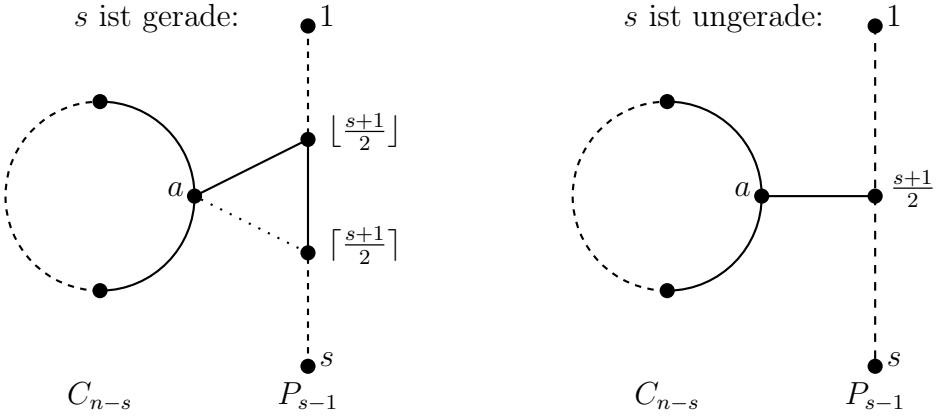


Abbildung 3.14: Optimale Verbindung eines Kreises C_{n-s} mit einem Pfad P_{s-1}

Wird beispielsweise für $n = 12$ und $s = 7$ ein Kreis C_5 mit einem Pfad P_6 verbunden, so existieren dafür genau vier zueinander nicht isomorphe Möglichkeiten. Tabelle 3.7 zeigt die hierbei auftretenden algebraischen Konnektivitäten:

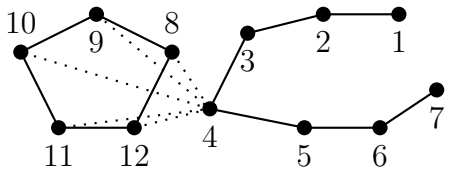
Kante ij	$\lambda_2(C_5 \dot{+} P_6 + ij)$	$C_5 \dot{+} P_6$
4 8 bis 4 12	0,16100	
3 8 bis 3 12, 5 8 bis 5 12	0,12751	
2 8 bis 2 12, 6 8 bis 6 12	0,09902	
1 8 bis 1 12, 7 8 bis 7 12	0,08047	
keine	0,00000	

Tabelle 3.7: $\lambda_2(C_5 \dot{+} P_6 + ij)$

3.4 Sternähnliche Bäume

Es sei $T = (N, E)$ ein Baum auf n Knoten. Nach Beobachtung 2.12 (vi) wird $T + ij$ für $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ genau einen Kreis enthalten. Für einen beliebigen Baum erweist sich das Auffinden vernünftiger Aussagen über die Maximierung von $\lambda_2(T + ij)$ als äußerst schwierig. Daher werden im Folgenden spezielle Bäume von einfacher Struktur untersucht.

Zu Beginn soll für $n \geq 3$ mit dem vollständig bipartiten Graphen $K_{1,n-1} = (N, E)$ ein Stern auf n Knoten betrachtet werden. Der Knoten $z \in N$ mit $d_{K_{1,n-1}}(z) = n-1$ bezeichnet das Zentrum des Sterns, vgl. Abbildung 3.15:

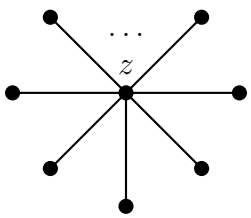


Abbildung 3.15: Stern $K_{1,n-1}$

Beobachtung 3.25 (vgl. z. B. [49, Ex. 1, Co. 1, Co. 2] und Korollar 3.42)

Ein Stern ist ein Baum vom Typ I mit seinem Zentrum z als charakteristischen Knoten. Für $n \geq 3$ lautet sein Spektrum $\operatorname{sp}(K_{1,n-1}) = \{0, 1, \ldots, 1, n\}$, wobei $\alpha(1) = n - 2$ gilt. Weiterhin existiert kein zu $K_{1,n-1}$ isospektraler Graph und jeder Baum $T \ncong K_{1,n-1}$ erfüllt $\lambda_2(T) < \lambda_2(K_{1,n-1}) = 1$.

Einzig ein Stern erreicht daher die maximal mögliche algebraische Konnektivität unter allen Bäumen. Das nachfolgende Lemma verallgemeinert diese Situation:

Lemma 3.26 (vgl. z. B. [40, Corollary 2.1])

Besitzt ein zusammenhängender Graph G einen Knoten v mit $\lambda_2(G - v) = 0$, so gilt $\lambda_2(G) \leq 1$ und Gleichheit genau dann, wenn der Knoten v adjazent zu jedem anderen Knoten von G ist.

Für $n = 3$ liefert Satz 3.14 wegen $K_{1,2} \cong P_2$ die zu $K_{1,2}$ optimal hinzuzufügende Kante. Wie lauten die Umstände für $n \geq 4$?

Satz 3.27 (vgl. alternativ Korollar 3.46)

Das Hinzufügen einer beliebigen Kante zu einem Stern $K_{1,n-1} = (N, E)$ auf $n \geq 4$ Knoten lässt dessen algebraische Konnektivität unberührt, das heißt, jede Kante $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ ist optimal im Sinne der Maximierung von $\lambda_2(K_{1,n-1} + ij) = 1$.

Beweis:

Dies folgt entweder aus Lemma 3.26 mit $G := K_{1,n-1} + ij$ für eine Kante $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ und $v := z$, wobei der Knoten z das Zentrum von $K_{1,n-1}$ bezeichnet, oder aus Korollar 3.2 und $\alpha(\lambda_2(K_{1,n-1})) = n - 2 > 1$ nach Beobachtung 3.25. □

In der Hoffnung, die einfache Struktur des Spektrums eines Sterns ausnutzen zu können, sollen nachfolgend Bäume untersucht werden, deren Erscheinungsbilder dem eines Sterns für eine genügend große Knotenanzahl stark ähneln. Mit anderen Worten, von Interesse sind Bäume, welche einen hohen „Sterngrad“ aufweisen. Faria liefert in [16, Abschnitt 2] eine Definition des Sterngrades und zeigt, dass die algebraische Vielfachheit von Eins als Eigenwert eines Graphen mindestens so groß ist wie ebendieser Sterngrad des Graphen [16, Theorem 2.1].

Das Ziel ist es, den Bäumen aus den Abbildungen 3.19, 3.21, 3.23, 3.25 in optimaler Weise eine Kante hinzuzufügen. Dazu werden Informationen über die zweitkleinsten Eigenwerte von Graphen benötigt, welche entstehen, wenn einem dieser „sternähnlichen“ Bäume eine Kante hinzugefügt wird, vgl. Abbildungen 3.16, 3.17. Zur genauen Literaturangabe der charakteristischen Polynome der Graphen G_i aus den Abbildungen 3.16, 3.17 in Beobachtung 3.29 ist Bemerkung 3.28 zu beachten:

Bemerkung 3.28 (Literaturnachweis für Beobachtung 3.29)

Im Beweis zu [32, Lemma 2.6] befinden sich die charakteristischen Polynome der Graphen G_i für $i \in \{3, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19\}$. Liu, Shao, Yuan zeigen $\chi_{G_{16}}(\lambda) = \chi_{G_{17}}(\lambda)$ in [45, Proposition 3.1]. Die Polynome der Graphen G_i werden für $i \in \{2, 4, 10\}$ von Guo in [31, S. 133] und für $i \in \{7, 8\}$ von Ying Liu, Yue Liu in [46, S. 843] genannt. Das Polynom $\chi_{G_1}(\lambda)$ ergibt sich z. B. aus [1, Corollary 15] mit Beobachtung 3.25 und $\chi_{G_2}(\lambda)$ ist alternativ ein Spezialfall von [61, Lemma 2.1] für dortiges $m = n = 2$.

Die Laplace-Matrizen der Graphen G_i aus den Abbildungen 3.16, 3.17 weisen jeweils eine

einfache Gestalt auf, sodass nachstehende Beobachtung Resultate aus elementaren Determinantenberechnungen beschreibt:

Beobachtung 3.29 (vgl. [32, Lemma 2.6], [45, Proposition 3.1], [31, S. 133], [46, S. 843])

Für $n \geq 8$ und $i \in \{1, 2, \ldots, 19\}$ lauten die charakteristischen Polynome der Graphen $G_i = (N, E_i)$ aus den Abbildungen 3.16, 3.17 gerade

$$
\begin{aligned}
\chi_{G_1}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-3}(\lambda-3)(\lambda-n), & \chi_{G_{10}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-5}(\lambda-3)f_{10}(\lambda),\\
\chi_{G_2}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-5}(\lambda-2)f_2(\lambda), & \chi_{G_{11}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-7}(\lambda-2)f_{11}(\lambda),\\
\chi_{G_3}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-8}(\lambda-2)^2(\lambda^2-4\lambda+2)f_3(\lambda), & \chi_{G_{12}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-7}f_{12}(\lambda),\\
\chi_{G_4}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-5}f_4(\lambda), & \chi_{G_{13}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-7}(\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+1)f_7(\lambda),\\
\chi_{G_5}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-8}(\lambda-2)f_5(\lambda), & \chi_{G_{14}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-5}f_{14}(\lambda), \qquad (3.21)\\
\chi_{G_6}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-8}(\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-3)f_6(\lambda), & \chi_{G_{15}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-6}(\lambda-2)f_{15}(\lambda),\\
\chi_{G_7}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-6}(\lambda^2-5\lambda+3)f_7(\lambda), & \chi_{G_{16}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-5}(\lambda-3)f_{16}(\lambda) = \chi_{G_{17}}(\lambda),\\
\chi_{G_8}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-6}(\lambda^2-5\lambda+5)f_7(\lambda), & \chi_{G_{18}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-6}f_{18}(\lambda),\\
\chi_{G_9}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-5}f_9(\lambda), & \chi_{G_{19}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-6}(\lambda-3)f_{19}(\lambda)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
f_2(\lambda) &= \lambda^3-(n+3)\lambda^2+(4n-2)\lambda-2n,\\
f_3(\lambda) &= \lambda^3-(n+2)\lambda^2+(4n-6)\lambda-2n,\\
f_4(\lambda) &= \lambda^4-(n+5)\lambda^3+(6n+3)\lambda^2-(9n-5)\lambda+3n,\\
f_5(\lambda) &= \lambda^6-(n+8)\lambda^5+(10n+15)\lambda^4-(35n-16)\lambda^3+(51n-53)\lambda^2-(30n-22)\lambda+6n,\\
f_6(\lambda) &= \lambda^4-(n+4)\lambda^3+(6n-3)\lambda^2-(9n-13)\lambda+3n,\\
f_7(\lambda) &= \lambda^3-(n+1)\lambda^2+(3n-5)\lambda-n,\\
f_9(\lambda) &= \lambda^4-(n+5)\lambda^3+(7n-1)\lambda^2-(13n-19)\lambda+4n,\\
f_{10}(\lambda) &= \lambda^3-(n+2)\lambda^2+(3n-2)\lambda-n, \qquad (3.22)\\
f_{11}(\lambda) &= \lambda^5-(n+5)\lambda^4+(7n+1)\lambda^3-(15n-17)\lambda^2+(10n-8)\lambda-2n,\\
f_{12}(\lambda) &= \lambda^6-(n+7)\lambda^5+(9n+10)\lambda^4-(28n-18)\lambda^3+(36n-42)\lambda^2-(18n-14)\lambda+3n,\\
f_{14}(\lambda) &= \lambda^4-(n+5)\lambda^3+(7n-3)\lambda^2-(11n-17)\lambda+3n,\\
f_{15}(\lambda) &= \lambda^4-(n+4)\lambda^3+(6n-4)\lambda^2-(8n-12)\lambda+2n,\\
f_{16}(\lambda) &= \lambda^3-(n+2)\lambda^2+(4n-7)\lambda-n,\\
f_{18}(\lambda) &= \lambda^5-(n+6)\lambda^4+(8n+4)\lambda^3-(20n-22)\lambda^2+(17n-26)\lambda-3n,\\
f_{19}(\lambda) &= \lambda^4-(n+3)\lambda^3+(5n-4)\lambda^2-(6n-10)\lambda+n.
\end{aligned}
$$

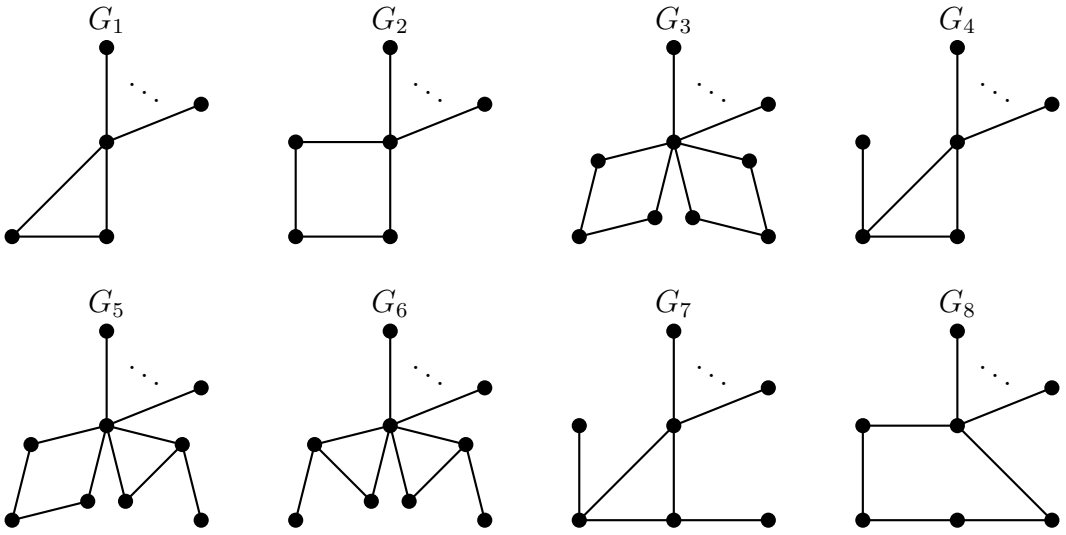


Abbildung 3.16: Die Graphen G_1 bis G_8

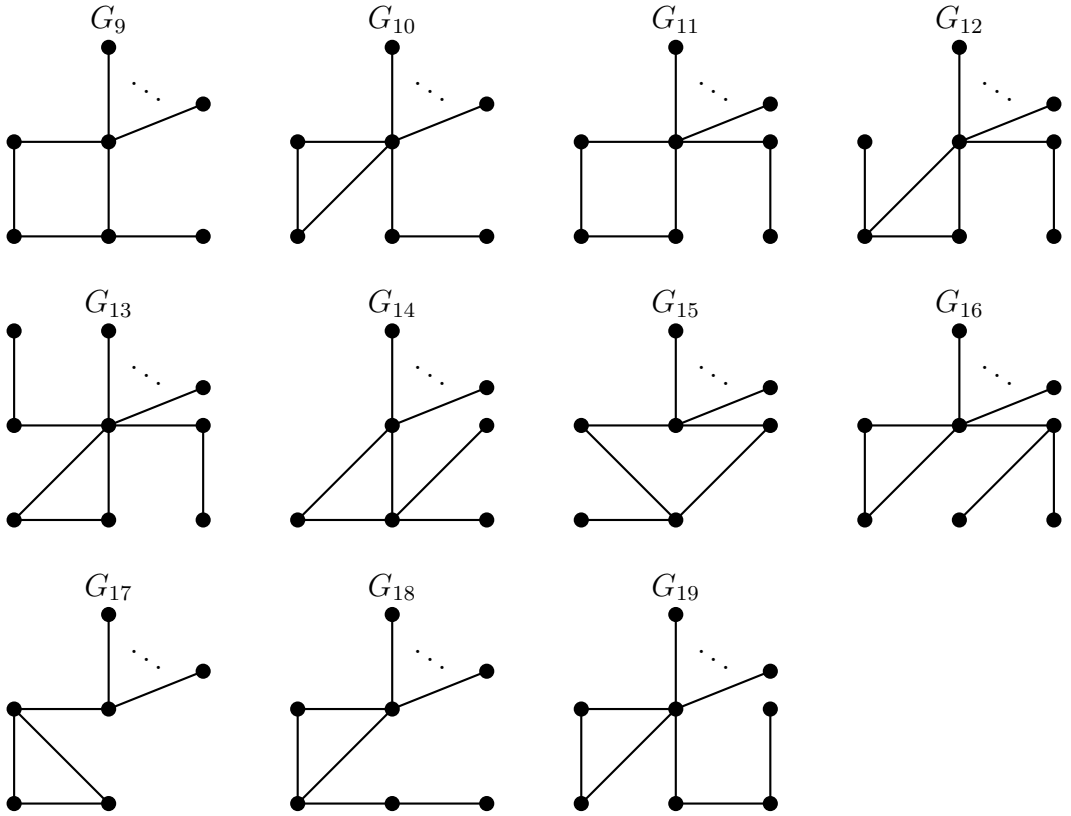


Abbildung 3.17: Die Graphen G_9 bis G_{19}

Beobachtung 3.30

Die zweitkleinsten Eigenwerte der Graphen $G_i = (N, E_i)$ aus den Abbildungen 3.16, 3.17 erfüllen für $n \geq 10$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}
1 = \lambda_2(G_1) &> \lambda_2(G_2) > \lambda_2(G_3) = \lambda_2(C_8) > \lambda_2(G_4) \\
&> \lambda_2(G_5) > \lambda_2(G_9) > \lambda_2(G_{10}) > \lambda_2(G_{11}) > \lambda_2(G_{12}) \\
&> \lambda_2(G_{13}) = \lambda_2(C_{10}) > \lambda_2(G_{16}) = \lambda_2(G_{17}) > \lambda_2(G_{18}) \\
&> \lambda_2(G_{19}), \\
\lambda_2(G_4) > \lambda_2(G_7) &= \lambda_2(G_8) > \lambda_2(G_9) > \lambda_2(G_{14}) > \lambda_2(G_{15}) \\
&> \lambda_2(G_{16}), \\
\lambda_2(G_5) > \lambda_2(G_6) &= \lambda_2(C_9) > \lambda_2(G_{10})
\end{aligned} \tag{3.23}$$

und mit $n \geq 25$ gilt

$$\begin{aligned}
1 = \lambda_2(G_1) &> \lambda_2(G_2) > \lambda_2(G_3) = \lambda_2(C_8) > \lambda_2(G_4) > \lambda_2(G_5) \\
&> \lambda_2(G_6) = \lambda_2(C_9) > \lambda_2(G_7) = \lambda_2(G_8) > \lambda_2(G_9) > \lambda_2(G_{10}) \\
&> \lambda_2(G_{11}) > \lambda_2(G_{12}) > \lambda_2(G_{13}) = \lambda_2(C_{10}) > \lambda_2(G_{14}) > \lambda_2(G_{15}) \\
&> \lambda_2(G_{16}) = \lambda_2(G_{17}) > \lambda_2(G_{18}) > \lambda_2(G_{19}).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Beweis:

Viele der Ungleichungen aus (3.23) bzw. (3.24) gelten sogar für $n \geq 8$, weshalb n an einigen Stellen des Beweises verschieden eingeschränkt wird. Zu Beginn sei $n \geq 8$. Lemma 3.26 liefert $1 = \lambda_2(G_1) > \lambda_2(G_i)$ für $i \in \{2, 3, \ldots, 19\}$ und zusammen mit Beobachtung 3.29

ist $\lambda_2(G_i)$ für $i \in \{2,4,5,6,9,10,11,12,14,15,16,18,19\}$ als kleinste Nullstelle von $f_i(\lambda)$ zu erkennen. Weiterhin besagt (3.21) gerade $\lambda_2(G_{16}) = \lambda_2(G_{17})$ und dass $\lambda_2(G_i)$ nicht notwendigerweise als kleinste Nullstelle von $f_i(\lambda)$ für $i \in \{3,6,7,8,13\}$ zu bezeichnen ist. Daher sollen zunächst für $i \in \{3,6,13\}$ die algebraischen Konnektivitäten der Graphen G_i berechnet und $\lambda_2(G_7) = \lambda_2(G_8)$ gezeigt werden. Es wird stets als bekannt vorausgesetzt, dass ein Polynom mit höchster Potenz $k \geq 1$ und reellen Koeffizienten maximal k reelle Nullstellen besitzt [20, Kapitel 1.3, Theorem auf S. 69]. Die Möglichkeit, ein solches Polynom als stetige Funktion aufzufassen, erlaubt es, den Nullstellensatz von Bolzano heranzuziehen, um offene Intervalle zu bestimmen, in denen die Nullstellen des Polynoms liegen [35, Satz 35.5]. Gilt z. B. $f_i(\xi_1) < 0$ bzw. $f_i(\xi_2) > 0$ für reelle Zahlen $\xi_1 < \xi_2$, so besitzt $f_i(\lambda)$ mindestens eine Nullstelle ξ mit $\xi_1 < \xi < \xi_2$.

$\lambda_2(G_3) = \lambda_2(C_8)$: Es sei $n \geq 8$. Laut (3.11) gilt $\lambda_2(C_8) = 2 - 2\cos\frac{\pi}{4}$ und $\lambda_2(C_8)$ ist als kleinste Nullstelle des Polynoms $\lambda^2 - 4\lambda + 2$ zu erkennen, vgl. (3) aus Abschnitt A. Folglich lässt (3.11) wiederum $\lambda_2(C_8)$ als einen Eigenwert von G_3 feststellen und es bleibt zu zeigen, dass die kleinste Nullstelle von $f_3(\lambda)$ echt größer als $\lambda_2(C_8)$ ist. Das Polynom $f_3(\lambda)$ besitzt wegen

$$\begin{aligned} f_3(\lambda_2(C_8)) &= -4 && < 0, \\ f_3(1) &= n - 7 && > 0, \\ f_3(4) &= 8 - 2n && < 0, \\ f_3(n) &= 2n(n-4) && > 0 \end{aligned}$$

genau drei verschiedene reelle Nullstellen und je eine davon in den offenen Intervallen $(\lambda_2(C_8), 1)$, $(1,4)$, $(4,n)$, vgl. (4) aus Abschnitt A. Somit sind alle Nullstellen von $f_3(\lambda)$ echt größer als $\lambda_2(C_8)$ und $\lambda_2(G_3) = \lambda_2(C_8)$.

$\lambda_2(G_6) = \lambda_2(C_9)$: Es wird $n \geq 8$ vorausgesetzt und $\lambda_2(C_9) = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{9}$ aus (3.11) erkannt. Das Polynom $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 3$ hat mit $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ drei verschiedene reelle Nullstellen

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2 - 2\cos\tfrac{2\pi}{9} = \lambda_2(C_9), \\ \xi_2 &= 2 - 2\cos\tfrac{4\pi}{9}, \\ \xi_3 &= 2 - 2\cos\tfrac{8\pi}{9}, \end{aligned}$$

vgl. (5) aus Abschnitt A. Somit bezeichnet $\lambda_2(C_9)$ laut (3.21) einen Eigenwert von G_6. Es bleibt zu zeigen, dass die kleinste Nullstelle von $f_6(\lambda)$ echt größer als $\lambda_2(C_9)$ ist. Das Polynom $f_6(\lambda)$ besitzt wegen

$$\begin{aligned} f_6(\lambda_2(C_9)) &\approx 5{,}06418 && > 0, \\ f_6(1) &= 7 - n && < 0, \\ f_6(2) &= n - 2 && > 0, \\ f_6(4) &= 4 - n && < 0, \\ f_6(n) &= 2n(n-2)(n-4) && > 0 \end{aligned}$$

genau vier verschiedene reelle Nullstellen und je eine davon in den

offenen Intervallen $(\lambda_2(C_9), 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, n)$, vgl. (6) aus Abschnitt A. Daher sind alle Nullstellen von $f_6(\lambda)$ echt größer als $\lambda_2(C_9)$ und $\lambda_2(G_6) = \lambda_2(C_9)$.

$\lambda_2(G_{13}) = \lambda_2(C_{10})$: Aufs Neue sei $n \geq 8$. Mit (3.11) gilt sicher $\lambda_2(C_{10}) = 2 - 2\cos\frac{\pi}{5}$ und $\lambda_2(C_{10})$ bezeichnet die kleinste Nullstelle des Polynoms $\lambda^2 - 3\lambda + 1$, vgl. (7) aus Abschnitt A. Laut (3.21) stellt $\lambda_2(C_{10})$ einen Eigenwert von G_{13} dar und es bleibt zu zeigen, dass die kleinste Nullstelle von $f_7(\lambda)$ echt größer als $\lambda_2(C_{10})$ ist. Das Polynom $f_7(\lambda)$ hat wegen

$$\begin{aligned} f_7(\lambda_2(C_{10})) &= -2 && < 0, \\ f_7(1) &= n - 5 && > 0, \\ f_7(3) &= 3 - n && < 0, \\ f_7(n) &= 2n(n-3) && > 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

genau drei verschiedene reelle Nullstellen und je eine davon in den offenen Intervallen $(\lambda_2(C_{10}), 1)$, $(1, 3)$, $(3, n)$, vgl. (8) aus Abschnitt A. Daher sind alle Nullstellen von $f_7(\lambda)$ echt größer als $\lambda_2(C_{10})$ und $\lambda_2(G_{13}) = \lambda_2(C_{10})$.

$\lambda_2(G_7) = \lambda_2(G_8)$: Ausgehend von $n \geq 8$ folgt $\lambda_2(C_5) = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}$ via (3.11) und $\lambda_2(C_5)$ ist als kleinste Nullstelle von $\lambda^2 - 5\lambda + 5$ ein Eigenwert von G_8, vgl. (3.21) sowie (9) aus Abschnitt A. Des Weiteren bezeichnet $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$ als kleinste Nullstelle des Polynoms $\lambda^2 - 5\lambda + 3$ einen Eigenwert von G_7, vgl. wiederum (3.21) sowie (9) aus Abschnitt A. Laut (3.21) bleibt zu zeigen, dass die kleinste Nullstelle von $f_7(\lambda)$ echt kleiner als $\lambda_2(C_5)$ und $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$ ist, um $\lambda_2(G_7) = \lambda_2(G_8)$ zu schlussfolgern. Stellt ξ die kleinste Nullstelle von $f_7(\lambda)$ dar, so besagt (3.25) gerade $f_7(\lambda) \leq 0$ für $\lambda \leq \xi$. Mit (10) aus Abschnitt A ist

$$\begin{aligned} f_7(\lambda_2(C_5)) &= \big(\sqrt{5} - 1\big)n - 5\sqrt{5} + 5 \\ &> \big(\sqrt{13} - 3\big)n - 6\sqrt{13} + 18 = f_7\left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{13}\right) > 0, \end{aligned}$$

und daher $\lambda_2(C_5) > \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} > \xi = \lambda_2(G_7) = \lambda_2(G_8)$, vgl. (3.21).

Die weiteren Ausführungen setzen stets voraus, dass den Anfangsbemerkungen entsprechend für $i \in \{2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19\}$ gerade $\lambda_2(G_i)$ als kleinste Nullstelle von $f_i(\lambda)$ zu erkennen ist.

$\lambda_2(G_2) > \lambda_2(G_3)$: Es sei $n \geq 8$. Das Polynom $f_2(\lambda)$ besitzt laut

$$\begin{aligned} f_2(\lambda_2(C_8)) &= -2 && < 0, \\ f_2(1) &= n - 4 && > 0, \\ f_2(4) &= 28 - 5n && < 0, \\ f_2(n) &= n(n-4) && > 0 \end{aligned}$$

genau drei verschiedene reelle Nullstellen und je eine davon in den offenen Intervallen $(\lambda_2(C_8), 1)$, $(1, 4)$, $(4, n)$, vgl. (11) aus Abschnitt A. Somit sind alle Nullstellen von $f_2(\lambda)$ echt größer als $\lambda_2(C_8)$ und $\lambda_2(G_2) > \lambda_2(C_8) = \lambda_2(G_3)$.

$\lambda_2(G_3) > \lambda_2(G_4)$: Wird $n \geq 8$ vorausgesetzt, so lässt $f_4(\lambda)$ wegen

$$\begin{aligned} f_4(0) &= 3n && > 0, \\ f_4(\lambda_2(C_8)) &= \left(1-\sqrt{2}\right)n + 5\sqrt{2} - 4 && < 0, \\ f_4(2) &= n-2 && > 0, \\ f_4(4) &= 4-n && < 0, \\ f_4(n) &= n(n-2)(n-4) && > 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

genau vier verschiedene reelle Nullstellen erkennen, je eine davon in den offenen Intervallen $(0, \lambda_2(C_8))$, $(\lambda_2(C_8), 2)$, $(2, 4)$, $(4, n)$, vgl. (12) aus Abschnitt A. Daher ist die kleinste Nullstelle von $f_4(\lambda)$ echt kleiner als $\lambda_2(C_8)$ und $\lambda_2(G_3) = \lambda_2(C_8) > \lambda_2(G_4)$.

$\lambda_2(G_5) > \lambda_2(G_6)$: Für $n \geq 8$ hat das Polynom $f_5(\lambda)$ aufgrund von

$$\begin{aligned} f_5(\lambda_2(C_9)) &\approx 0{,}87939 && > 0, \\ f_5(0{,}53) &\approx 0{,}02551 - 0{,}03757\,n && < 0, \\ f_5(1) &= n-7 && > 0, \\ f_5(2) &= 8-2n && < 0, \\ f_5(3{,}7) &\approx 1{,}05643\,n - 4{,}27065 && > 0, \\ f_5(4) &= 8-2n && < 0, \\ f_5(n) &= n(n-4)(2n^3 - 12n^2 + 19n - 7) && > 0 \end{aligned}$$

genau sechs verschiedene reelle Nullstellen, je eine davon in den offenen Intervallen $(\lambda_2(C_9); 0{,}53)$, $(0{,}53; 1)$, $(1, 2)$, $(2; 3{,}7)$, $(3{,}7; 4)$, $(4, n)$, vgl. (13) aus Abschnitt A. Dabei ist $f_5(n) > 0$ einzusehen, weil 4 die größte Nullstelle von $n(n-4)(2n^3-12n^2+19n-7) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ bezeichnet, vgl. (14) aus Abschnitt A. Somit sind alle Nullstellen des Polynoms $f_5(\lambda)$ echt größer als $\lambda_2(C_9)$ und $\lambda_2(G_5) > \lambda_2(C_9) = \lambda_2(G_6)$.

$\lambda_2(G_5) > \lambda_2(G_9)$: Nun sei $n \geq 13$. Das Polynom $f_9(\lambda)$ besitzt wegen

$$\begin{aligned} f_9(0) &= 4n && > 0, \\ f_9(\lambda_2(C_9)) &\approx 8{,}20708 - 0{,}65270\,n && < 0, \\ f_9(1) &= 14-3n && < 0, \\ f_9(3) &= n-6 && > 0, \\ f_9(5) &= 70-11n && < 0, \\ f_9(n) &= n(2n^2 - 14n + 23) && > 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

genau vier verschiedene reelle Nullstellen, je eine davon in den offenen Intervallen $(0, \lambda_2(C_9))$, $(\lambda_2(C_9), 3)$, $(3, 5)$, $(5, n)$, vgl. (15) aus Abschnitt A. Hierbei ist $f_9(n) > 0$ einzusehen, wenn $\approx 4{,}36603$ als größte Nullstelle von $n(2n^2 - 14n + 23) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ erkannt wird, vgl. (16) aus Abschnitt A. Daher ist die kleinste Nullstelle von $f_9(\lambda)$ echt kleiner als $\lambda_2(C_9)$ und $\lambda_2(G_5) > \lambda_2(G_6) = \lambda_2(C_9) > \lambda_2(G_9)$. Eine Rechnung ergibt $\lambda_2(G_5) > \lambda_2(G_9)$ für $n = 10, 11, 12$ und somit die Ungleichung für $n \geq 10$, vgl. (17) aus Abschnitt A.

$\lambda_2(G_6) > \lambda_2(G_{10})$: Es wird abermals $n \geq 8$ vorausgesetzt und eingesehen, dass das Polynom $f_{10}(\lambda)$ via

$$\begin{aligned} f_{10}(0) &= -n && < 0, \\ f_{10}(\lambda_2(C_9)) &\approx 0{,}18479\,n - 1{,}27126 && > 0, \\ f_{10}(3) &= 3 - n && < 0, \\ f_{10}(n) &= n(n-3) && > 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

genau drei verschiedene reelle Nullstellen besitzt, je eine davon in den offenen Intervallen $(0, \lambda_2(C_9))$, $(\lambda_2(C_9), 3)$, $(3, n)$, vgl. (18) aus Abschnitt A. Somit ist die kleinste Nullstelle von $f_{10}(\lambda)$ echt kleiner als $\lambda_2(C_9)$ und $\lambda_2(G_6) = \lambda_2(C_9) > \lambda_2(G_{10})$.

$\lambda_2(G_9) > \lambda_2(G_{10})$: Es sei $n \geq 8$. Die Berechnungen (19) aus Abschnitt A liefern gerade $f_9(\lambda) - (\lambda - 3) f_{10}(\lambda) = (n-5)\lambda^2 - (3n-13)\lambda + n =: f(\lambda)$ und $f(\lambda) > 0$ für $\lambda < \xi$, wobei $\xi := \frac{3n-13-\sqrt{5n^2-58n+169}}{2n-10}$ die kleinste Nullstelle von $f(\lambda)$ bezeichnet. Aus (3.27) lässt sich sofort $f_9(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G_9)$ schlussfolgern. Über

$$\begin{aligned} h_1(n) &:= 2n^3 - 23n^2 + 64n + 13, \\ h_2(n) &:= 5n^2 - 58n + 169 \end{aligned}$$

hat $h_1(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ mit $\approx -0{,}18995$ nur eine reelle Nullstelle, das Polynom $h_2(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ besitzt gar keine reelle Nullstelle und es gilt $h_1(n) > 0$ bzw. $h_2(n) > 0$, vgl. (20) aus Abschnitt A. Damit ist

$$f_9(\xi) = -\frac{\overbrace{(2n-11)}^{>0}\overbrace{h_1(n)}^{>0} + \overbrace{\left[h_1(n) + 4n - 24\right]}^{>0}\overbrace{\sqrt{h_2(n)}}^{>0}}{\underbrace{(n-5)^4}_{>0}} < 0,$$

vgl. (21) aus Abschnitt A, und es wurde $\lambda_2(G_9) < \xi$ gezeigt. Dies liefert sicher $f(\lambda_2(G_9)) > 0$ sowie $(\lambda_2(G_9) - 3) f_{10}(\lambda_2(G_9)) < 0$. Aus (3.28) ist $f_{10}(\lambda) \leq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G_{10})$ und somit $(\lambda - 3) f_{10}(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G_{10})$ zu erkennen. Daraus folgt $\lambda_2(G_9) > \lambda_2(G_{10})$.

$\lambda_2(G_{12}) > \lambda_2(G_{13})$: Mit $n \geq 8$ hat das Polynom $f_{12}(\lambda)$ wegen

$$\begin{aligned} f_{12}(\lambda_2(C_{10})) &= \lambda_2(C_{10}) && > 0, \\ f_{12}(0{,}42) &\approx 0{,}02996 - 0{,}01708\,n && < 0, \\ f_{12}(1) &= n - 6 && > 0, \\ f_{12}(2) &= 4 - n && < 0, \\ f_{12}(3) &= 3n - 12 && > 0, \\ f_{12}(4) &= 24 - 5n && < 0, \\ f_{12}(n) &= n(2n^4 - 18n^3 + 54n^2 - 60n + 17) && > 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

genau sechs verschiedene reelle Nullstellen und je eine davon in den

offenen Intervallen $(\lambda_2(C_{10}); 0{,}42)$, $(0{,}42; 1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,n)$, vgl. (22) aus Abschnitt A. Dabei ist $f_{12}(n) > 0$ insofern einzusehen, dass $\approx 3{,}94569$ die bzgl. $n(2n^4 - 18n^3 + 54n^2 - 60n + 17) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ größte Nullstelle bezeichnet, vgl. (23) aus Abschnitt A. Demzufolge sind alle Nullstellen von $f_{12}(\lambda)$ echt größer als $\lambda_2(C_{10})$ und daher $\lambda_2(G_{12}) > \lambda_2(C_{10}) = \lambda_2(G_{13})$.

$\lambda_2(G_{13}) > \lambda_2(G_{16})$: Wiederum wird $n \geq 8$ vorausgesetzt und erkannt, dass $f_{16}(\lambda)$ über

$$\begin{aligned} f_{16}(0) &= -n & &< 0, \\ f_{16}(\lambda_2(C_{10})) &= \tfrac{3}{2}n - \tfrac{17}{2} + 2\sqrt{5} & &> 0, \\ f_{16}(4) &= 4 - n & &< 0, \\ f_{16}(n) &= 2n(n-4) & &> 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

genau drei verschiedene reelle Nullstellen besitzt, je eine davon in den offenen Intervallen $(0, \lambda_2(C_{10}))$, $(\lambda_2(C_{10}), 4)$, $(4,n)$, vgl. (24) aus Abschnitt A. Daher ist die kleinste Nullstelle von $f_{16}(\lambda)$ echt kleiner als $\lambda_2(C_{10})$ und $\lambda_2(G_{13}) = \lambda_2(C_{10}) > \lambda_2(G_{16})$.

$\lambda_2(G_{18}) > \lambda_2(G_{19})$: Für $n \geq 8$ besitzt das Polynom $f_{19}(\lambda)$ vermittels

$$\begin{aligned} f_{19}(0) &= n & &> 0, \\ f_{19}(1) &= 4 - n & &< 0, \\ f_{19}(2) &= n - 4 & &> 0, \\ f_{19}(4) &= 40 - 7n & &< 0, \\ f_{19}(n) &= n(2n^2 - 10n + 11) & &> 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

genau vier verschiedene reelle Nullstellen und je eine davon in den offenen Intervallen $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,n)$, vgl. (25) aus Abschnitt A. Hierbei gilt $f_{19}(n) > 0$, da $\approx 3{,}36603$ die größte Nullstelle des Polynoms $n(2n^2 - 10n + 11) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ist, vgl. (26) aus Abschnitt A. Mit (3.31) folgt $f_{19}(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G_{19})$ bzw. $(\lambda - 3) f_{19}(\lambda) \leq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G_{19})$. Die Berechnungen (27) aus Abschnitt A liefern $f_{18}(\lambda) - (\lambda - 3) f_{19}(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(n - 2 - \lambda) < 0$ für $0 < \lambda < 2$ und wegen $0 < \lambda_2(G_{18}) < 2$ muss $(\lambda_2(G_{18}) - 3) f_{19}(\lambda_2(G_{18})) > 0$ gelten, das heißt $\lambda_2(G_{18}) > \lambda_2(G_{19})$.

$\lambda_2(G_6) > \lambda_2(G_7)$: Es sei $n \geq 14$. Via (3.25) ist bereits bekannt, dass die kleinste Nullstelle des Polynoms $f_7(\lambda)$ im offenen Intervall $(\lambda_2(C_{10}), 1)$ liegt und dass $f_7(\lambda_2(C_{10})) = -2 < 0$ gilt. Da $\lambda_2(C_{10}) < \lambda_2(C_9) < 1$ und $f_7(\lambda_2(C_9)) \approx 0{,}18479\,n - 2{,}45605 > 0$ erfüllt wird, vgl. (28) aus Abschnitt A, liegt die kleinste Nullstelle von $f_7(\lambda)$ im offenen Intervall $(\lambda_2(C_{10}), \lambda_2(C_9))$, das heißt $\lambda_2(G_6) = \lambda_2(C_9) > \lambda_2(G_7)$ für $n \geq 14$.

$\lambda_2(G_4) > \lambda_2(G_7)$: Wieder sei $n \geq 14$, womit bereits $\lambda_2(G_6) > \lambda_2(G_7)$ bekannt ist. Über (3.26) lässt sich feststellen, dass die kleinste Nullstelle von $f_4(\lambda)$ im offenen Intervall $(0, \lambda_2(C_8))$ liegt und dass $f_4(0) = 3n > 0$ gilt. Wegen $0 < \lambda_2(C_9) < \lambda_2(C_8)$ und $f_4(\lambda_2(C_9)) = 2\cos\frac{2\pi}{9} + 1 > 0$,

vgl. (29) aus Abschnitt A, liegt die kleinste Nullstelle von $f_4(\lambda)$ sogar in $(\lambda_2(C_9), \lambda_2(C_8))$, das heißt $\lambda_2(G_4) > \lambda_2(C_9) = \lambda_2(G_6) > \lambda_2(G_7)$ für $n \geq 14$. Eine Rechnung ergibt $\lambda_2(G_4) > \lambda_2(G_7)$ für $n = 8, \ldots, 13$, vgl. (30) aus Abschnitt A.

$\lambda_2(G_4) > \lambda_2(G_5)$: Für $n \geq 8$ werden die untere Reihe in Abbildung 3.18 betrachtet und Knoten i, j, k, z wie abgebildet gewählt. Korollar 3.11 sowie (3.2) liefern $\lambda_2(G_4) = \lambda_2(G_4+ij+jk) \geq \lambda_2(G_4+ij+jk-jz) = \lambda_2(G_5)$ und es verbleibt $\lambda_2(G_4) \neq \lambda_2(G_5)$ zu zeigen. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass zwei Polynome mit komplexen Koeffizienten genau dann eine gemeinsame Nullstelle haben, wenn ihre Resultante, welche über die Determinante der Sylvester-Matrix beider Polynome zu berechnen ist, zu Null wird, vgl. [20, Aufgaben zu 3.1, 6., S. 185]. Für die Sylvester-Matrix S von $f_4(\lambda)$ und $f_5(\lambda)$ gilt $\det(S) = 9\,n\,(n-4) \neq 0$, vgl. (31) aus Abschnitt A. Folglich besitzen die Polynome $f_4(\lambda)$ und $f_5(\lambda)$ keine gemeinsamen Nullstellen und $\lambda_2(G_4) > \lambda_2(G_5)$.

$\lambda_2(G_7) > \lambda_2(G_9)$: Es sei $n \geq 8$. Die Beziehung $(\lambda - 4)\,f_7(\lambda) - f_9(\lambda) = \lambda > 0$ gilt für $\lambda > 0$, vgl. (32) aus Abschnitt A. Dies liefert $f_9(\lambda_2(G_7)) < 0$ wegen $\lambda_2(G_7) > 0$. Aus (3.27) folgt schließlich $f_9(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G_9)$ und damit ist $\lambda_2(G_7) > \lambda_2(G_9)$.

$\lambda_2(G_{10}) > \lambda_2(G_{11})$: Für $n \geq 8$ werden die obere Reihe in Abbildung 3.18 betrachtet und Knoten i, j, k, z wie abgebildet gewählt. Korollar 3.11 sowie (3.2) liefern die Beziehungen

$$\begin{aligned}\lambda_2(T_1) = \lambda_2(T_1 + ij) = \lambda_2(G_{10}) = \lambda_2(G_{10} + jk)\\ \geq \lambda_2(G_{10} + jk - jz) = \lambda_2(G_{11})\end{aligned}$$

und es verbleibt $\lambda_2(G_{10}) \neq \lambda_2(G_{11})$ zu zeigen. Ist S die Sylvester-Matrix von $f_{10}(\lambda)$ und $f_{11}(\lambda)$, so gilt $\det(S) = n\,(5\,n - 24) \neq 0$, vgl. (33) aus Abschnitt A. Folglich besitzen $f_{10}(\lambda)$ und $f_{11}(\lambda)$ keine gemeinsamen Nullstellen, was $\lambda_2(G_{10}) > \lambda_2(G_{11})$ bedeutet.

$\lambda_2(G_{11}) > \lambda_2(G_{12})$: Ein weiteres Mal sei $n \geq 8$. Aus (3.28) folgt für $\lambda < \lambda_2(G_{10})$ gerade $f_{10}(\lambda) < 0$, woraus $(\lambda - 1)\,f_{10}(\lambda) > 0$ und damit die Ungleichung $(\lambda - 2)\,f_{11}(\lambda) - f_{12}(\lambda) = (\lambda - 1)\,f_{10}(\lambda) > 0$ geschlussfolgert wird, vgl. (33) aus Abschnitt A. Da bereits $\lambda_2(G_{10}) > \lambda_2(G_{11})$ bekannt ist, gilt $(\lambda_2(G_{11}) - 1)\,f_{10}(\lambda_2(G_{11})) > 0$, das heißt $f_{12}(\lambda_2(G_{11})) < 0$. Mit (3.25) wird jedoch $f_{12}(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G_{12})$ und schließlich $\lambda_2(G_{11}) > \lambda_2(G_{12})$ einzusehen sein.

$\lambda_2(G_{13}) > \lambda_2(G_{14})$: Nun sei $n \geq 25$. Das Polynom $f_{14}(\lambda)$ besitzt wegen

$$\begin{aligned}f_{14}(0) &= 3\,n &&> 0,\\ f_{14}(\lambda_2(C_{10})) &= \left(2 - \sqrt{5}\right)n + \tfrac{11}{2}\sqrt{5} - \tfrac{13}{2} &&< 0,\\ f_{14}(2) &= n - 2 &&> 0,\\ f_{14}(5) &= 10 - 2\,n &&< 0,\\ f_{14}(n) &= 2\,n\,(n-2)\,(n-5) &&> 0\end{aligned}$$

genau vier verschiedene reelle Nullstellen und je eine davon in den

offenen Intervallen $(0, \lambda_2(C_{10}))$, $(\lambda_2(C_{10}), 2)$, $(2, 5)$, $(5, n)$, vgl. (35) aus Abschnitt A. Somit ist die kleinste Nullstelle von $f_{14}(\lambda)$ echt kleiner als $\lambda_2(C_{10})$ und es wird $\lambda_2(G_{13}) = \lambda_2(C_{10}) > \lambda_2(G_{14})$ erfüllt.

$\lambda_2(G_9) > \lambda_2(G_{14})$: Wiederum sei $n \geq 25$. Mit (3.27) ist bereits bekannt, dass die kleinste Nullstelle von $f_9(\lambda)$ im offenen Intervall $(0, \lambda_2(C_9))$ liegt und dass sicher $f_9(0) = 4n > 0$ gilt. Wegen $0 < \lambda_2(C_{10}) < \lambda_2(C_9)$ und weiterhin $f_9(\lambda_2(C_{10})) = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5} > 0$, vgl. (36) aus Abschnitt A, liegt die kleinste Nullstelle von $f_9(\lambda)$ sogar im Intervall $(\lambda_2(C_{10}), \lambda_2(C_9))$ und es folgt $\lambda_2(G_9) > \lambda_2(C_{10}) = \lambda_2(G_{13}) > \lambda_2(G_{14})$ für $n \geq 25$. Eine Rechnung ergibt $\lambda_2(G_9) > \lambda_2(G_{14})$ für $n = 8, \ldots, 24$, vgl. (37) aus Abschnitt A.

$\lambda_2(G_{14}) > \lambda_2(G_{15})$: Mit $n \geq 8$ ist bereits $\lambda_2(G_7) > \lambda_2(G_9) > \lambda_2(G_{14})$ bekannt. Aus (3.25) folgt $f_7(\lambda) < 0$ für $\lambda < \lambda_2(G_7)$, das heißt $f_7(\lambda_2(G_{14})) < 0$. Wegen $f_{14}(\lambda) = f_{15}(\lambda) - f_7(\lambda)$, vgl. (38) aus Abschnitt A, gilt die Ungleichung $f_{15}(\lambda_2(G_{14})) < 0$. Das Polynom $f_{15}(\lambda)$ hat aufgrund von

$$\begin{aligned} f_{15}(0) &= 2n && > 0, \\ f_{15}(1) &= 5 - n && < 0, \\ f_{15}(2) &= 2n - 8 && > 0, \\ f_{15}(5) &= 85 - 13n && < 0, \\ f_{15}(n) &= 2n(n^2 - 6n + 7) && > 0 \end{aligned}$$

genau vier verschiedene reelle Nullstellen und je eine davon in den offenen Intervallen $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$, $(5, n)$, vgl. (39) aus Abschnitt A. Dabei ist $f_{15}(n) > 0$ einzusehen, wenn $\approx 4{,}41421$ als größte Nullstelle des Polynoms $2n(n^2 - 6n + 7) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ erkannt wird, vgl. (40) aus Abschnitt A. Es gilt daher $f_{15}(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G_{15})$ und somit $\lambda_2(G_{14}) > \lambda_2(G_{15})$.

$\lambda_2(G_{15}) > \lambda_2(G_{16})$: Wird erneut $n \geq 8$ vorausgesetzt, so ist $\lambda_2(G_7) > \lambda_2(G_{14}) > \lambda_2(G_{15})$ bereits bekannt. Mit (3.25) gilt $f_7(\lambda) < 0$ für $\lambda < \lambda_2(G_7)$, das heißt $f_7(\lambda_2(G_{15})) < 0$. Wegen $f_{15}(\lambda) = (\lambda - 1) f_{16}(\lambda) - f_7(\lambda)$, vgl. (41) aus Abschnitt A, folgt $(\lambda_2(G_{15}) - 1) f_{16}(\lambda_2(G_{15})) < 0$. Aus (3.30) ist $f_{16}(\lambda) \leq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G_{16})$ bzw. $(\lambda - 1) f_{16}(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G_{16})$ und daher $\lambda_2(G_{15}) > \lambda_2(G_{16})$ zu erkennen.

$\lambda_2(G_{16}) > \lambda_2(G_{18})$: Ein letztes Mal sei $n \geq 8$ und $f_{18}(\lambda)$ besitzt laut

$$\begin{aligned} f_{18}(0) &= -3n && < 0, \\ f_{18}(1) &= n - 5 && > 0, \\ f_{18}(2) &= 4 - n && < 0, \\ f_{18}(3) &= 3n - 15 && > 0, \\ f_{18}(5) &= 295 - 43n && < 0, \\ f_{18}(n) &= 2n(n^2 - 6n + 7) && > 0 \end{aligned}$$

genau fünf verschiedene reelle Nullstellen, je eine davon in den offenen

Intervallen $(0,1), (1,2), (2,3), (3,5), (5,n)$, vgl. (42) aus Abschnitt A. Hierbei ist $f_{18}(n) > 0$ einzusehen, weil $\approx 4{,}41421$ die größte Nullstelle des Polynoms $2\,n\,(n^2 - 6\,n + 7) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ bezeichnet, vgl. (43) aus Abschnitt A. Es gilt somit $f_{18}(\lambda) \leq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G_{18})$. Wegen $(\lambda-1)(\lambda-3) f_{16}(\lambda) - f_{18}(\lambda) = -(n-5)\lambda < 0$ für $\lambda > 0$, vgl. (44) aus Abschnitt A, folgt $f_{18}(\lambda_2(G_{16})) > 0$ und daher $\lambda_2(G_{16}) > \lambda_2(G_{18})$.

Schlussendlich wurden (3.23) und (3.24) gezeigt. □

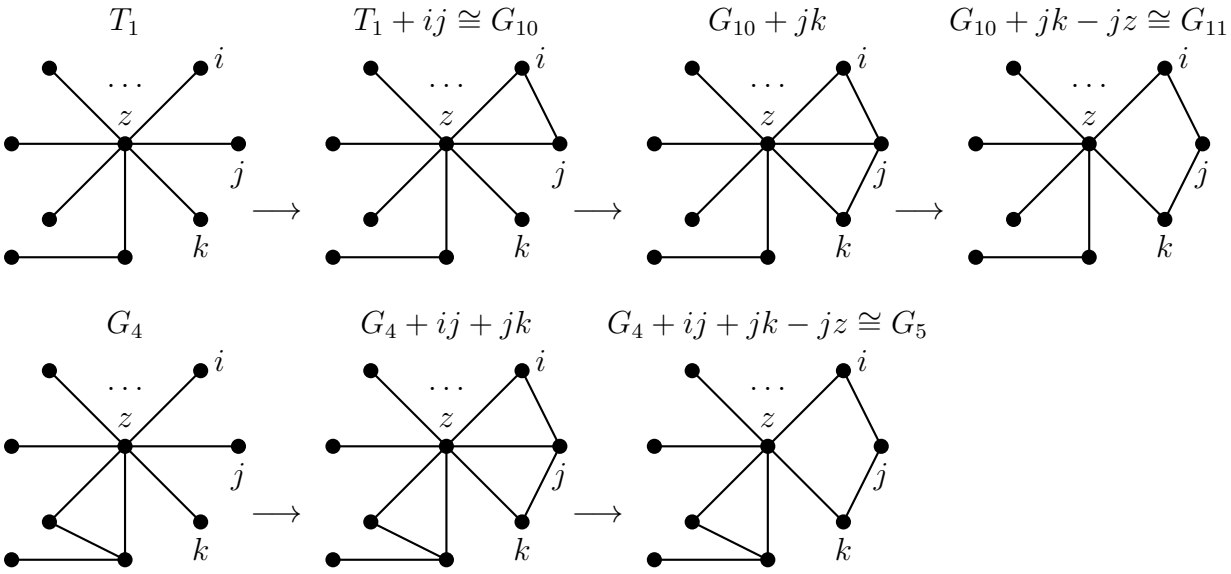


Abbildung 3.18: Zum Beweis von Beobachtung 3.30

Nun soll dem Baum $T_1 := K_{1,n-2} \dot{+} v + iv = (N, E)$ aus Abbildung 3.19 mit einem zu $K_{1,n-2}$ disjunkten Knoten v und $i \in N \setminus \{z\}$ für $n \geq 5$ eine Kante $rs \in \binom{N}{2} \setminus E$ hinzugefügt werden. Dabei wird unweigerlich einer der Graphen G_1, G_2, G_4, G_{10} entstehen. Die Aussage des nachfolgenden Satzes folgt somit direkt aus Beobachtung 3.30 für $n \geq 10$. Dennoch wird ein alternativer Beweis angegeben, welcher die aufwendige Beobachtung 3.30 nicht benötigt. Dies ist bei später betrachteten Bäumen nicht mehr möglich. Der Eigenwert $\lambda_2(T_1)$ wird als kleinste Nullstelle von $f_{10}(\lambda)$ aus (3.21) erkannt, da Korollar 3.11 gerade die Beziehung $\lambda_2(T_1) = \lambda_2(G_{10})$ liefert.

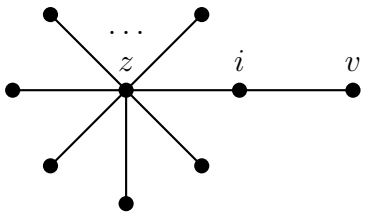


Abbildung 3.19: T_1

Satz 3.31

Es ist optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität, dem Baum $T_1 = (N, E)$ aus Abbildung 3.19 die Kante vz hinzuzufügen, das heißt

$$1 = \lambda_2(T_1 + vz) \geq \lambda_2(T_1 + rs) \;\; \forall rs \in \binom{N}{2} \setminus E, \;\; n \geq 5. \tag{3.32}$$

Gleichheit gilt in (3.32) genau dann, wenn $rs = vz$ erfüllt wird.

Beweis:

Mit $j,k \in N\setminus\{i,v,z\}$, $j \neq k$ werden genau vier zueinander nicht isomorphe Möglichkeiten ik, jk, kv, vz erkannt, dem Baum T_1 eine Kante hinzuzufügen, vgl. Abbildung 3.20. Offenbar ist $T_1 + vz - iv \cong K_{1,n-1}$ und Satz 3.27 bestätigt $\lambda_2(T_1 + vz) = 1$. Nach Lemma 3.26 gilt nun $\lambda_2(T_1 + ik) < \lambda_2(T_1 + vz)$ und sukzessive Anwendung von Lemma 3.3 (i) liefert $\lambda_2(T_1 + kv) \leq \lambda_2(C_{5,4}) \approx 0{,}82991 < 1$. Laut Beobachtung 3.25 und Korollar 3.11 folgt $\lambda_2(T_1 + jk) = \lambda_2(T_1) < \lambda_2(K_{1,n-1}) = 1$. Damit wurde $\lambda_2(T_1 + vz) > \lambda_2(T_1 + rs)$ für $rs \in \{ik, jk, kv\}$ gezeigt und es gibt keine Kantenwahl $rs \in \binom{N}{2} \setminus E$, $rs \neq vz$, für welche $T_1 + rs \cong T_1 + vz$ ist. □

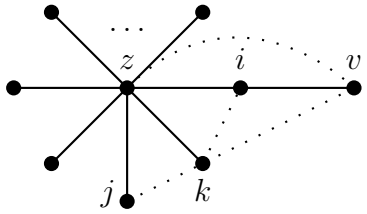


Abbildung 3.20: Vier nicht isomorphe Varianten beim Hinzufügen einer Kante zu T_1

Anschließend sollen für $n \geq 6$ die Auswirkungen des Hinzufügens einer Kante zum Baum $T_2 \coloneqq T_1 - jz + jv = (N, E)$ aus Abbildung 3.21 untersucht werden. Laut Korollar 3.11 ist $\lambda_2(T_2) = \lambda_2(G_{19})$ und $\lambda_2(T_2)$ bezeichnet die kleinste Nullstelle von $f_{19}(\lambda)$ via (3.21).

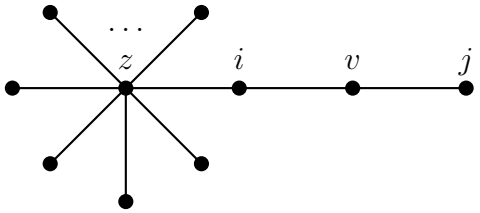


Abbildung 3.21: T_2

Satz 3.32

Es ist optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität, dem Baum $T_2 = (N, E)$ aus Abbildung 3.21 die Kante jz hinzuzufügen, das heißt

$$\lambda_2(T_2 + jz) \geq \lambda_2(T_2 + rs) \;\; \forall rs \in \binom{N}{2} \setminus E, \;\; n \geq 6. \tag{3.33}$$

Gleichheit gilt in (3.33) genau dann, wenn $rs = jz$ erfüllt wird.

Beweis:

Mit $k,l \in N \setminus \{i,j,v,z\}$, $k \neq l$ sind genau sieben zueinander nicht isomorphe Möglichkeiten $ij, ik, jk, jz, kl, kv, vz$ zu erkennen, dem Baum T_2 eine Kante hinzuzufügen, vgl. Abbildung 3.22. Tabelle 3.8 zeigt jz als optimale Kante für $n = 6, 7, 8, 9$. Falls $n \geq 10$ gilt, so liefert (3.23) über $T_2 + jz \cong G_2$, $T_2 + vz \cong G_4$, $T_2 + jk \cong G_8$, $T_2 + kv \cong G_{15}$, $T_2 + ij \cong G_{17}$, $T_2 + ik \cong G_{18}$ und $T_2 + kl \cong G_{19}$ die Behauptung, da es offenbar keine Kantenwahl $rs \in \binom{N}{2} \setminus E$, $rs \neq jz$ gibt, für welche $T_2 + rs \cong T_2 + jz$ ist. □

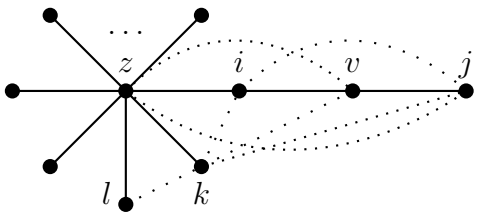


Abbildung 3.22: Sieben nicht isomorphe Varianten beim Hinzufügen einer Kante zu T_2

n	$\lambda_2(T_2+jz)$	$\lambda_2(T_2+vz)$	$\lambda_2(T_2+jk)$	$\lambda_2(T_2+kv)$	$\lambda_2(T_2+ij)$	$\lambda_2(T_2+ik)$	$\lambda_2(T_2+kl)$
6	0,76393	0,63135	0,69722	0,58579	0,43845	0,41309	0,32487
7	0,72693	0,59615	0,60862	0,51396	0,39832	0,36791	0,29553
8	0,70293	0,57377	0,56069	0,47457	0,37380	0,34167	0,27741
9	0,68602	0,55818	0,53001	0,44918	0,35716	0,32432	0,26503

Tabelle 3.8: Satz 3.32 für $n = 6, 7, 8, 9$ Knoten

Nun werde für $n \geq 6$ der Baum $T_3 \coloneqq T_2 - jv + ij = (N, E)$ aus Abbildung 3.23 hinsichtlich $\lambda_2(T_3 + rs)$ mit $rs \in \binom{N}{2} \setminus E$ betrachtet. Es gilt $\lambda_2(T_3) = \lambda_2(G_{16})$ gemäß Korollar 3.11 und damit lässt sich $\lambda_2(T_3)$ als kleinste Nullstelle von $f_{16}(\lambda)$ aus (3.21) berechnen.

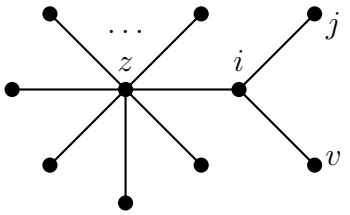


Abbildung 3.23: T_3

Satz 3.33

Es ist optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität, dem Baum $T_3 = (N, E)$ aus Abbildung 3.23 für $n = 6$ eine der Kanten jk, jl, lv, kv und für $n \geq 7$ eine der Kanten jz oder vz hinzuzufügen, das heißt

$$\lambda_2(T_3 + jz) = \lambda_2(T_3 + vz) \geq \lambda_2(T_3 + rs) \;\; \forall rs \in \tbinom{N}{2} \setminus E, \;\; n \geq 7. \tag{3.34}$$

Gleichheit gilt in (3.34) genau dann, wenn $rs \in \{jz, vz\}$ erfüllt wird.

Beweis:

Es seien $k, l \in N \setminus \{i, j, v, z\}$, $k \neq l$. Für $n = 6$ gilt $T_3 + jk \cong T_3 + jl \cong T_3 + lv \cong T_3 + kv$ und für $n \geq 6$ offenbar $T_3 + jz \cong T_3 + vz$. Ferner werden mit $n \geq 7$ genau fünf zueinander nicht isomorphe Möglichkeiten ik, jv, jz, kl, kv erkannt, dem Baum T_3 eine Kante hinzuzufügen, vgl. Abbildung 3.24. Tabelle 3.9 wirft ein Licht auf die optimalen Kanten kv für $n = 6$ und jz für $n = 7, 8, 9$. Falls $n \geq 10$ gilt, so liefert (3.23) über $T_3 + jz \cong G_4$, $T_3 + kv \cong G_9$, $T_3 + ik \cong G_{14}$, $T_3 + kl \cong G_{16}$ sowie $T_3 + jv \cong G_{17}$ die Behauptung, da es keine Kantenwahl $rs \in \binom{N}{2} \setminus E$, $rs \neq jz$, $rs \neq vz$ gibt, für welche $T_2 + rs \cong T_2 + jz$ ist. □

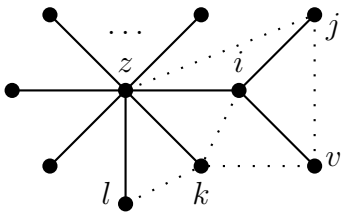


Abbildung 3.24: Fünf nicht isomorphe Varianten beim Hinzufügen einer Kante zu T_3

n	$\lambda_2(T_3 + jz)$	$\lambda_2(T_3 + kv)$	$\lambda_2(T_3 + ik)$	$\lambda_2(T_3 + kl)$	$\lambda_2(T_3 + jv)$
6	0,63135	0,65708	0,63135	0,43845	0,43845
7	0,59615	0,58579	0,55051	0,39832	0,39832
8	0,57377	0,54487	0,50694	0,37380	0,37380
9	0,55818	0,51796	0,47907	0,35716	0,35716

Tabelle 3.9: Satz 3.33 für $n = 6, 7, 8, 9$ Knoten

Nachfolgend sei $T_4 \coloneqq T_3 - iv + kv = (N, E)$ für $n \geq 7$ der Baum aus Abbildung 3.25. Gemäß Korollar 3.11, (3.23) und (3.11) gilt $\lambda_2(T_4) = \lambda_2(G_{13}) = \lambda_2(C_{10}) = 2 - 2\cos\frac{\pi}{5}$.

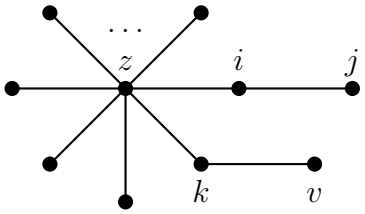


Abbildung 3.25: T_4

Satz 3.34

Es ist optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität, dem Baum $T_4 = (N, E)$ aus Abbildung 3.25 eine der Kanten ik oder jv hinzuzufügen, das heißt

$$\lambda_2(T_4 + ik) = \lambda_2(T_4 + jv) \geq \lambda_2(T_4 + rs) \;\; \forall rs \in \tbinom{N}{2} \setminus E, \;\; n \geq 7 \tag{3.35}$$

Gleichheit gilt in (3.35) genau dann, wenn $rs \in \{ik, jv\}$ erfüllt wird.

Beweis:

Mit $l, m \in N \setminus \{i, j, k, v, z\}$, $l \neq m$ sind genau sieben zueinander nicht isomorphe Möglichkeiten $ik, iv, jv, kl, lm, lv, vz$ zu erkennen, dem Baum T_4 eine Kante hinzuzufügen, vgl. Abbildung 3.26. Tabelle 3.10 zeigt ik und jv als optimale Kanten für $n = 7, 8, 9$. Falls $n \geq 10$ gilt, so liefert (3.23) über $T_4 + ik \cong G_7$, $T_4 + jv \cong G_8$, $T_4 + iv \cong G_9$, $T_4 + vz \cong G_{10}$, $T_4 + lv \cong G_{11}$, $T_4 + kl \cong G_{12}$, $T_4 + lm \cong G_{13}$ und $\lambda_2(G_7) = \lambda_2(G_8)$ die Behauptung, da es offenbar keine Kantenwahl $rs \in \binom{N}{2} \setminus E$, $rs \neq ik$, $rs \neq jv$ gibt, für welche $T_4 + rs \cong T_4 + ik$ oder $T_4 + rs \cong T_4 + jv$ ist. □

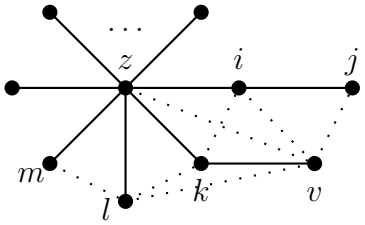


Abbildung 3.26: Sieben nicht isomorphe Varianten beim Hinzufügen einer Kante zu T_4

n	$\lambda_2(T_4+ik)$	$\lambda_2(T_4+jv)$	$\lambda_2(T_4+iv)$	$\lambda_2(T_4+vz)$	$\lambda_2(T_4+lv)$	$\lambda_2(T_4+kl)$	$\lambda_2(T_4+lm)$
7	0,60862	0,60862	0,58579	0,46593	0,43305	0,41164	0,38197
8	0,56069	0,56069	0,54487	0,45249	0,42843	0,41026	0,38197
9	0,53001	0,53001	0,51796	0,44280	0,42448	0,40896	0,38197

Tabelle 3.10: Satz 3.34 für $n = 7, 8, 9$ Knoten

Die Sätze 3.31, 3.32, 3.33, 3.34 bilden einen Anfang, Bäume bzgl. des Hinzufügens einer Kante zu untersuchen, deren Gestalt nur minimal von einem Stern abweicht und es ist allzu natürlich, diese Aussagen verallgemeinern zu wollen bzw. mit Bäumen fortzufahren, die sich Schritt für Schritt immer mehr vom Erscheinungsbild eines Sterns unterscheiden. Die Umsetzung dieses Willens in brauchbare Ergebnisse erweist sich als äußerst schwierig.

Offenbar lassen die Sätze 3.31, 3.32 vermuten, einem Baum, der entsteht, wenn das Zentrum z eines Sterns mit dem Anfangsknoten eines Pfades verbunden wird, in optimaler Weise eine Kante hinzuzufügen, indem diese gerade z und den Endknoten des Pfades verbindet. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, wie schon das folgende Beispiel zeigt: Bezeichnet T den Baum aus Abbildung 3.27 auf $n = 10$ Knoten mit a, b, c, d, z wie abgebildet, so gilt $\lambda_2(T + dz) \approx 0{,}36761 < 0{,}43665 \approx \lambda_2(T + cz)$ und cz ist die eindeutig optimale Kante zur Maximierung der algebraischen Konnektivität.

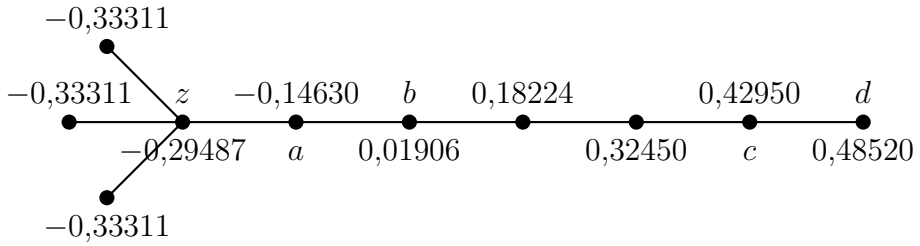


Abbildung 3.27: Beispiel einer Verallgemeinerung der Sätze 3.31, 3.32, zu jedem Knoten steht der dazugehörige Eintrag eines normierten Fiedler-Vektors.

Eine solche Veränderung der Position der optimalen Kante lässt sich wie folgt begründen: Die Bäume T_1 aus Abbildung 3.19, T_2 aus Abbildung 3.21 und T aus Abbildung 3.27 sind alle vom Typ II, wobei die charakteristische Kante bei T_1, T_2 als iz und bei T als ab auftritt. Wird Bäumen dieser „Stern-Pfad-Struktur“ eine feste Anzahl von Blättern vorgegeben und deren Knotenanzahl sukzessive durch Verlängerung des „Pfadanteils“ erhöht, so wandert die charakteristische Kante immer weiter weg vom Zentrum z des „Sternanteils“, vgl. z. B. den Beweis von [13, Lemma 3.5] für dortiges $l = 1$.

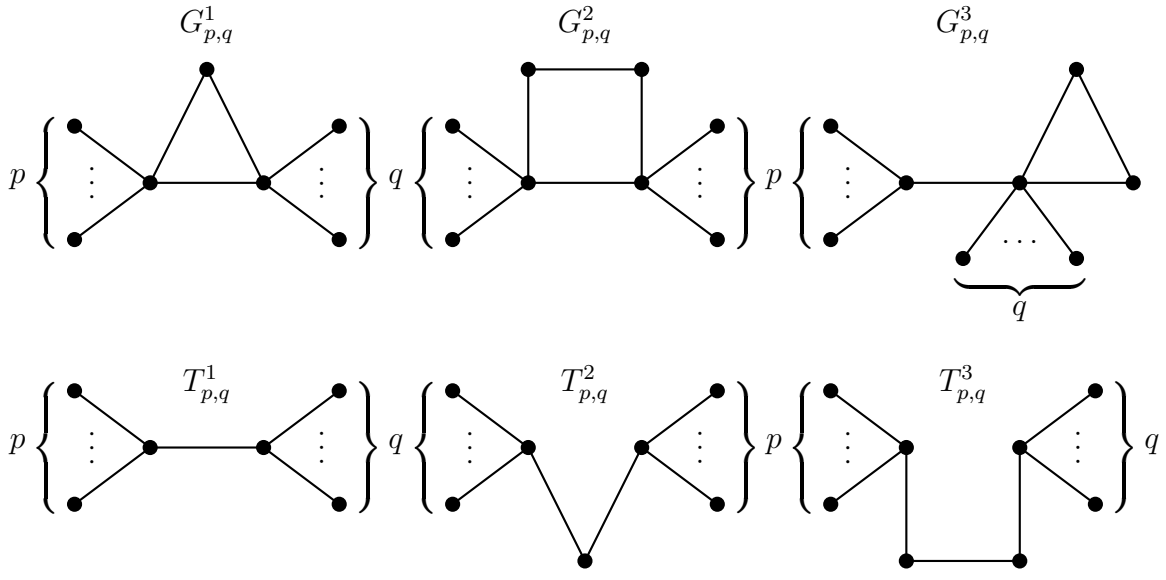


Abbildung 3.28: Die Graphen $G^1_{p,q}$, $G^2_{p,q}$, $G^3_{p,q}$ und Bäume $T^1_{p,q}$, $T^2_{p,q}$, $T^3_{p,q}$

Um im Folgenden Satz 3.33 zu verallgemeinern, werden die Graphen aus Abbildung 3.28 auf je n Knoten betrachtet, für welche gerade $G_4 \cong G^1_{n-4,1}$, $G_{14} \cong G^1_{n-5,2}$, $G_2 \cong G^2_{n-4,0}$, $G_9 \cong G^2_{n-5,1}$, $G_{17} \cong G^3_{n-4,0}$, $G_1 \cong G^3_{0,n-4}$, $G_{10} \cong G^3_{1,n-5}$ sowie $G_{16} \cong G^3_{2,n-6}$ zu erkennen ist. Nachstehende Beobachtung lässt sich unschwer berechnen:

Beobachtung 3.35 (vgl. z. B. [25, Proposition 1])

Die charakteristischen Polynome der Graphen aus Abbildung 3.28 lauten

$$\begin{aligned}
\chi_{G^1_{p,q}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{p+q-2} f^1_{p,q}(\lambda),\\
\chi_{G^2_{p,q}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{p+q-1} f^2_{p,q}(\lambda),\\
\chi_{G^3_{p,q}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{p+q-1}(\lambda-3) f^3_{p,q}(\lambda),\\
\chi_{T^1_{p,q}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{p+q-2} f^4_{p,q}(\lambda),\\
\chi_{T^2_{p,q}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{p+q-2} f^5_{p,q}(\lambda),\\
\chi_{T^3_{p,q}}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{p+q-1} f^6_{p,q}(\lambda)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

mit

$$\begin{aligned}
f^1_{p,q}(\lambda) &= \lambda^4 - (p+q+8)\lambda^3 + (5p+5q+pq+22)\lambda^2\\
&\quad - (7p+7q+2pq+24)\lambda + 3p+3q+9,\\
f^2_{p,q}(\lambda) &= \lambda^4 - (p+q+9)\lambda^3 + (6p+6q+pq+28)\lambda^2\\
&\quad - (10p+10q+3pq+36)\lambda + 4p+4q+16,\\
f^3_{p,q}(\lambda) &= \lambda^3 - (p+q+6)\lambda^2 + (4p+2q+pq+9)\lambda - p - q - 4,\\
f^4_{p,q}(\lambda) &= \lambda^3 - (p+q+4)\lambda^2 + (2p+2q+pq+5)\lambda - p - q - 2,\\
f^5_{p,q}(\lambda) &= \lambda^4 - (p+q+6)\lambda^3 + (4p+4q+pq+12)\lambda^2\\
&\quad - (4p+4q+2pq+10)\lambda + p + q + 3,\\
f^6_{p,q}(\lambda) &= \lambda^4 - (p+q+7)\lambda^3 + (5p+5q+pq+16)\lambda^2\\
&\quad - (6p+6q+3pq+14)\lambda + p + q + 4,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

wobei $p, q \geq 1$ für $G^1_{p,q}$, $T^1_{p,q}$, $T^2_{p,q}$ und $p, q \geq 0$, $p+q \geq 1$ für $G^2_{p,q}$, $G^3_{p,q}$, $T^3_{p,q}$ gelte.

Teilbeweis:

Es werden ausschließlich die charakteristischen Polynome der Bäume $T^1_{p,q}$, $T^2_{p,q}$, $T^3_{p,q}$ hergeleitet. Die Behauptungen für $G^1_{p,q}$, $G^2_{p,q}$, $G^3_{p,q}$ sind in analoger Vorgehensweise mit Hilfe von Beobachtung 3.29 und Lemma 3.18 etwas aufwendiger zu zeigen. Bezeichnen z_1 das Zentrum von $K_{1,p}$ und z_2 das Zentrum von $K_{1,q}$, so gilt offenbar $T^1_{p,q} \cong K_{1,p} \dot{+} K_{1,q} + z_1 z_2$. Über $G_1 := K_{1,p}$, $G_2 := K_{1,q}$, $u := z_1$, $v := z_2$ besagt Lemma 3.18 gerade

$$\chi_{T^1_{p,q}}(\lambda) = \chi_{K_{1,p}}(\lambda)\chi_{K_{1,q}}(\lambda) - \chi_{K_{1,p}}(\lambda)\chi_{L_{z_2}(K_{1,q})}(\lambda) - \chi_{K_{1,q}}(\lambda)\chi_{L_{z_1}(K_{1,p})}(\lambda).$$

Beobachtung 3.25 liefert $\chi_{K_{1,p}}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{p-1}(\lambda-p-1)$ und es ist

$$L(K_{1,p}) = \begin{pmatrix} p & -1 & -1 & \dots & -1\\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{p+1}\big(\{-1,0,1,p\}\big)$$

$$\Rightarrow L_{z_1}(K_{1,p}) = I \in M_p\big(\{0,1\}\big) \Rightarrow \chi_{L_{z_1}(K_{1,p})}(\lambda) = (\lambda-1)^p$$

bzw. $\chi_{L_{z_2}(K_{1,q})}(\lambda) = (\lambda-1)^q$ festzustellen,

das heißt

$$\begin{aligned}
\chi_{T^1_{p,q}}(\lambda) &= \chi_{K_{1,p}}(\lambda)\,\chi_{K_{1,q}}(\lambda) - \chi_{K_{1,p}}(\lambda)\,\chi_{L_{z_2}(K_{1,q})}(\lambda) - \chi_{K_{1,q}}(\lambda)\,\chi_{L_{z_1}(K_{1,p})}(\lambda)\\
&= \lambda(\lambda-1)^{p-1}(\lambda-p-1)\,\lambda(\lambda-1)^{q-1}(\lambda-q-1)\\
&\quad - \lambda(\lambda-1)^{p-1}(\lambda-p-1)(\lambda-1)^{q} - \lambda(\lambda-1)^{q-1}(\lambda-q-1)(\lambda-1)^{p}\\
&= \lambda^2(\lambda-1)^{p+q-2}(\lambda-p-1)(\lambda-q-1) - \lambda(\lambda-1)^{p+q-1}(\lambda-p-1)\\
&\quad - \lambda(\lambda-1)^{p+q-1}(\lambda-q-1)\\
&= \lambda(\lambda-1)^{p+q-2}\big[\lambda(\lambda-p-1)(\lambda-q-1) - (\lambda-1)(\lambda-p-1)\\
&\quad - (\lambda-1)(\lambda-q-1)\big]\\
&= \lambda(\lambda-1)^{p+q-2}\big[(\lambda-q-1)(\lambda^2-(p+2)\lambda+1) - \lambda^2 + (p+2)\lambda - p - 1\big]\\
&= \ldots = \lambda(\lambda-1)^{p+q-2} f^4_{p,q}(\lambda).
\end{aligned}$$

Beschreibt w ein beliebiges Blatt von $K_{1,p+1}$, so gilt $T^2_{p,q} \cong K_{1,p+1} \dot{+} K_{1,q} + wz_2$. Vermittels $G_1 := K_{1,p+1}$, $G_2 := K_{1,q}$, $u := w$, $v := z_2$ folgt aus Lemma 3.18 gerade

$$\chi_{T^2_{p,q}}(\lambda) = \chi_{K_{1,p+1}}(\lambda)\,\chi_{K_{1,q}}(\lambda) - \chi_{K_{1,p+1}}(\lambda)\,\chi_{L_{z_2}(K_{1,q})}(\lambda) - \chi_{K_{1,q}}(\lambda)\,\chi_{L_w(K_{1,p+1})}(\lambda).$$

Zur Berechnung von $\chi_{L_w(K_{1,p+1})}(\lambda)$ wird

$$L(K_{1,p+1}) = \begin{pmatrix} p+1 & -1 & -1 & \ldots & -1\\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ -1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{p+2}\big(\{-1,0,1,p+1\}\big),$$

$$L_w(K_{1,p+1}) = \begin{pmatrix} p+1 & -1 & -1 & \ldots & -1\\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ -1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{p+1}\big(\{-1,0,1,p+1\}\big),$$

$$\begin{aligned}
\chi_{K_{1,p+1}}(\lambda) &= \det\big(L(K_{1,p+1}) - \lambda I\big)\\
&\overset{(*)}{=} (-1)^{p+4} \overbrace{\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & \ldots & \ldots & -1\\ 1-\lambda & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ 0 & 1-\lambda & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & 0 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix}}^{\overset{(**)}{=} (-1)^{p+3}(1-\lambda)^p}\\
&\quad + (1-\lambda)\underbrace{\det\big(L_w(K_{1,p+1}) - \lambda I\big)}_{=\chi_{L_w(K_{1,p+1})}(\lambda)}
\end{aligned}$$

erkannt, wobei in $(*)$ nach der letzten Zeile und in $(**)$ nach der letzten Spalte zu entwickeln ist, vgl. z. B. [20, S. 203, Entwicklungssatz von Laplace].

Damit muss

$$\begin{aligned}
\chi_{L_w(K_{1,p+1})}(\lambda) &= (1-\lambda)^{-1}\left[\chi_{K_{1,p+1}}(\lambda) - (-1)^{p^2+7p+12}(1-\lambda)^p\right] \\
&= (\lambda-1)^{-1}\left[-\lambda(\lambda-1)^p(\lambda-p-2) + \underbrace{(-1)^{p^2+7p+12}(-1)^p}_{=1}(\lambda-1)^p\right] \\
&= -\lambda(\lambda-1)^{p-1}(\lambda-p-2) + (\lambda-1)^{p-1} \\
&= -(\lambda-1)^{p-1}(\lambda^2-(p+2)\lambda+1) \\
&= (\lambda-1)^{p-1}(\lambda^2-(p+2)\lambda+1) \quad \text{(wegen gleicher Spektren erlaubt)}
\end{aligned}$$

erfüllt sein, das heißt

$$\begin{aligned}
\chi_{T^2_{p,q}}(\lambda) =& \chi_{K_{1,p+1}}(\lambda)\chi_{K_{1,q}}(\lambda) - \chi_{K_{1,p+1}}(\lambda)\chi_{L_{z_2}(K_{1,q})}(\lambda) - \chi_{K_{1,q}}(\lambda)\chi_{L_w(K_{1,p+1})}(\lambda) \\
=& \lambda(\lambda-1)^p(\lambda-p-2)\lambda(\lambda-1)^{q-1}(\lambda-q-1) \\
&- \lambda(\lambda-1)^p(\lambda-p-2)(\lambda-1)^q \\
&- \lambda(\lambda-1)^{q-1}(\lambda-q-1)(\lambda-1)^{p-1}(\lambda^2-(p+2)\lambda+1) \\
=& \lambda^2(\lambda-1)^{p+q-1}(\lambda-p-2)(\lambda-q-1) - \lambda(\lambda-1)^{p+q}(\lambda-p-2) \\
&- \lambda(\lambda-1)^{p+q-2}(\lambda-q-1)(\lambda^2-(p+2)\lambda+1) \\
=& \lambda(\lambda-1)^{p+q-2}\left[\lambda(\lambda-1)(\lambda-p-2)(\lambda-q-1) - (\lambda-1)^2(\lambda-p-2)\right. \\
&\left.- (\lambda-q-1)(\lambda^2-(p+2)\lambda+1)\right] \\
=& \lambda(\lambda-1)^{p+q-2}\left[(\lambda-q-1)(\lambda^3-(p+4)\lambda^2+(2p+4)\lambda-1)\right. \\
&\left.- \lambda^3+(p+4)\lambda^2-(2p+5)\lambda+p+2\right] \\
=& \ldots = \lambda(\lambda-1)^{p+q-2} f^5_{p,q}(\lambda).
\end{aligned}$$

Für ein beliebiges Blatt s von $K_{1,q+1}$ ist $T^3_{p,q} \cong K_{1,p+1} \dot{+} K_{1,q+1} + ws$. Lemma 3.18 zeigt mit $G_1 := K_{1,p+1}$, $G_2 := K_{1,q+1}$, $u := w$, $v := s$ sicher

$$\begin{aligned}
\chi_{T^3_{p,q}}(\lambda) =& \chi_{K_{1,p+1}}(\lambda)\chi_{K_{1,q+1}}(\lambda) - \chi_{K_{1,p+1}}(\lambda)\chi_{L_s(K_{1,q+1})}(\lambda) \\
&- \chi_{K_{1,q+1}}(\lambda)\chi_{L_w(K_{1,p+1})}(\lambda) \\
=& \lambda(\lambda-1)^p(\lambda-p-2)\lambda(\lambda-1)^q(\lambda-q-2) \\
&- \lambda(\lambda-1)^p(\lambda-p-2)(\lambda-1)^{q-1}(\lambda^2-(q+2)\lambda+1) \\
&- \lambda(\lambda-1)^q(\lambda-q-2)(\lambda-1)^{p-1}(\lambda^2-(p+2)\lambda+1) \\
=& \lambda^2(\lambda-1)^{p+q}(\lambda-p-2)(\lambda-q-2) \\
&- \lambda(\lambda-1)^{p+q-1}(\lambda-p-2)(\lambda^2-(q+2)\lambda+1) \\
&- \lambda(\lambda-1)^{p+q-1}(\lambda-q-2)(\lambda^2-(p+2)\lambda+1) \\
=& \lambda(\lambda-1)^{p+q-1}\left[\lambda(\lambda-1)(\lambda-p-2)(\lambda-q-2)\right. \\
&\left.- (\lambda-p-2)(\lambda^2-(q+2)\lambda+1) - (\lambda-q-2)(\lambda^2-(p+2)\lambda+1)\right] \\
=& \lambda(\lambda-1)^{p+q-1}\left[(\lambda-p-2)(\lambda^3-(q+4)\lambda^2+(2q+4)\lambda-1)\right. \\
&\left.- \lambda^3+(p+q+4)\lambda^2-(2p+2q+pq+5)\lambda+q+2\right] \\
=& \ldots = \lambda(\lambda-1)^{p+q-2} f^6_{p,q}(\lambda)
\end{aligned}$$

und daher die Behauptung für $T^1_{p,q}$, $T^2_{p,q}$, $T^3_{p,q}$. □

Nun soll dem Baum $T^1_{p,q} := K_{1,p} \dot{+} K_{1,q} + z_1 z_2 = (N, E)$ aus Abbildung 3.28 für $n = p+q+2$, $p, q \geq 2$ eine Kante hinzugefügt werden. Dabei sind unter $z_1 \in N_1$, $z_2 \in N_2$ die Zentren

der Sterne $K_{1,p} = (N_1, E_1)$, $K_{1,q} = (N_2, E_2)$ mit $N_1 \cup N_2 = N$, $E_1 \cup E_2 = E$ zu verstehen und $i, j \in N_1 \setminus \{z_1\}$, $i \neq j$ bzw. $k, l \in N_2 \setminus \{z_2\}$, $k \neq l$ wie in Abbildung 3.29 zu wählen:

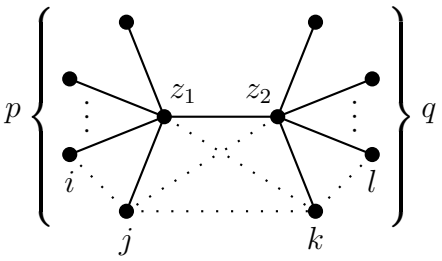


Abbildung 3.29: Nicht isomorphe Varianten beim Hinzufügen einer Kante zu $T^1_{p,q}$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p \geq q \geq 2$. Satz 3.33 liefert das gewünschte Resultat für $q = 2$. Im Fall $p = q = 3$ sind laut Abbildung 3.29 genau drei zueinander nicht isomorphe Möglichkeiten ij, jk, jz_2 zu erkennen, dem Baum $T^1_{3,3}$ eine Kante hinzuzufügen. Sämtliche Kanten jk mit $j \in N_1 \setminus \{z_1\}$ und $k \in N_2 \setminus \{z_2\}$ werden über

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_2\left(T^1_{3,3} + ij\right) & < & \lambda_2\left(T^1_{3,3} + jz_2\right) & < & \lambda_2\left(T^1_{3,3} + jk\right) \\ \wr\!\!\wr & & \wr\!\!\wr & & \wr\!\!\wr \\ 0{,}35425 & < & 0{,}50694 & < & 0{,}51071 \end{array}$$

als optimal bzgl. des Problems $\max\limits_{rs \in \binom{N}{2} \setminus E} \lambda_2\left(T^1_{3,3} + rs\right)$ errechnet.

Satz 3.36

Gegeben seien zwei disjunkte Sterne $K_{1,p} = (N_1, E_1)$ mit Zentrum z_1 bzw. $K_{1,q} = (N_2, E_2)$ mit Zentrum z_2, $N_1 \cup N_2 = N$, $E_1 \cup E_2 = E$, $n = p + q + 2$. Werden Knoten $j \in N_1 \setminus \{z_1\}$ und $k \in N_2 \setminus \{z_2\}$ gewählt, so ist es optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität, dem Baum $T^1_{p,q} := K_{1,p} \dot{+} K_{1,q} + z_1 z_2 = (N, E)$ aus Abbildung 3.29 für $p > q \geq 3$ eine der Kanten kz_1 sowie für $p = q \geq 4$ eine der Kanten jz_2, kz_1 hinzuzufügen, das heißt

$$\lambda_2\left(T^1_{p,q} + kz_1\right) \geq \lambda_2\left(T^1_{p,q} + rs\right) \ \forall rs \in \binom{N}{2} \setminus E, \ \ p > q \geq 3, \quad (3.38)$$

$$\lambda_2\left(T^1_{p,q} + jz_2\right) = \lambda_2\left(T^1_{p,q} + kz_1\right) \geq \lambda_2\left(T^1_{p,q} + rs\right) \ \forall rs \in \binom{N}{2} \setminus E, \ \ p = q \geq 4. \quad (3.39)$$

Gleichheit gilt in (3.38) bzw. (3.39) genau dann, wenn $rs = kz_1$ bzw. $rs \in \{jz_2, kz_1\}$ erfüllt wird.

Beweis:

Zu Beginn sei $p \geq q + 1 \geq 4$ vorausgesetzt. Es werden genau fünf zueinander nicht isomorphe Möglichkeiten ij, jk, jz_2, kl, kz_1 erkannt, dem Baum $T^1_{p,q}$ eine Kante hinzuzufügen, vgl. Abbildung 3.29. Wegen $T^1_{p,q} + kz_1 \cong G^1_{p,q-1}$, $T^1_{p,q} + jz_2 \cong G^1_{p-1,q}$, $T^1_{p,q} + jk \cong G^2_{p-1,q-1}$, $T^1_{p,q} + kl \cong G^3_{p,q-2}$, $T^1_{p,q} + ij \cong G^3_{q,p-2}$, vgl. Abbildung 3.28, bleibt

$$\begin{aligned} &\lambda_2\left(G^1_{p,q-1}\right) > \lambda_2\left(G^1_{p-1,q}\right) > \lambda_2\left(G^3_{p,q-2}\right) = \lambda_2\left(G^3_{q,p-2}\right) = \lambda_2\left(T^1_{p,q}\right), \\ &\lambda_2\left(G^1_{p,q-1}\right) > \lambda_2\left(G^2_{p-1,q-1}\right) > \lambda_2\left(G^3_{p,q-2}\right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

zu zeigen, um (3.38) zu schlussfolgern. Nach Lemma 3.26 und (3.36) bezeichnet $\lambda_2\left(G^m_{p,q}\right)$ für $m \in \{1, 2, 3\}$ die kleinste Nullstelle von $f^m_{p,q}(\lambda)$ und $\lambda_2\left(T^1_{p,q}\right)$ die kleinste Nullstelle von $f^4_{p,q}(\lambda)$, vgl. (3.37). Analog zum Beweis von Beobachtung 3.30 wird stets als bekannt

vorausgesetzt, dass ein Polynom mit höchster Potenz $k \geq 1$ und reellen Koeffizienten maximal k reelle Nullstellen besitzt. Die Möglichkeit, ein solches Polynom als stetige Funktion aufzufassen, erlaubt es, den Nullstellensatz von Bolzano heranzuziehen, um offene Intervalle zu bestimmen, in denen die Nullstellen des Polynoms liegen. Einen ersten Schritt in Richtung (3.40) liefert die Ungleichung $\lambda_2(G^1_{p,q-1}) > \lambda_2(G^1_{p-1,q})$, welche sich einerseits aus [56, Lemma 2.16] für dortiges $g = 3$, $n_1 = p$, $n_2 = q$ ergibt oder es ist andererseits $f^1_{p,q-1}(\lambda) - f^1_{p-1,q}(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)(p-q) > 0$ für $0 < \lambda < 2$ wegen $p - q > 0$ laut Voraussetzung zu überlegen, vgl. (46) aus Abschnitt A. Dies liefert $f^1_{p-1,q}(\lambda_2(G^1_{p,q-1})) < 0$, da offenbar $0 < \lambda_2(G^1_{p,q-1}) < 2$ gilt. Das Polynom $f^1_{p-1,q}(\lambda)$ besitzt aufgrund von

$$\begin{aligned} f^1_{p-1,q}(0) &= 3p + 3q + 6 && > 0, \\ f^1_{p-1,q}(1) &= -(p-1)q && < 0, \\ f^1_{p-1,q}(2) &= p + q && > 0, \\ f^1_{p-1,q}(p+2) &= -(p-1)q && < 0, \\ f^1_{p-1,q}(p+q+2) &= q(p-1)(p+q)(p+q+2) && > 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

genau vier verschiedene reelle Nullstellen, je eine davon in den offenen Intervallen $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,p+2)$, $(p+2,p+q+2)$, vgl. (47) aus Abschnitt A. Somit wird $f^1_{p-1,q}(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G^1_{p-1,q})$ und daher $\lambda_2(G^1_{p,q-1}) > \lambda_2(G^1_{p-1,q})$ gelten. Ferner ist über die Beziehung $f^3_{p,q-2}(\lambda) = f^3_{q,p-2}(\lambda) = f^4_{p,q}(\lambda)$ gerade $\lambda_2(G^3_{p,q-2}) = \lambda_2(G^3_{q,p-2}) = \lambda_2(T^1_{p,q})$ einzusehen, vgl. (48) aus Abschnitt A. Mittels $f^1_{p-1,q}(\lambda) - (\lambda-3) f^3_{p,q-2}(\lambda) = q\lambda(p+2-\lambda) > 0$ für $0 < \lambda < p+2$, vgl. (49) aus Abschnitt A, folgt $\left[\lambda_2(G^1_{p-1,q}) - 3\right] f^3_{p,q-2}(\lambda_2(G^1_{p-1,q})) < 0$ wegen $0 < \lambda_2(G^1_{p-1,q}) < p+2$. Das Polynom $f^3_{p,q-2}(\lambda)$ hat nach

$$\begin{aligned} f^3_{p,q-2}(0) &= -p - q - 2 && < 0, \\ f^3_{p,q-2}(1) &= pq && > 0, \\ f^3_{p,q-2}(p+2) &= -q && < 0, \\ f^3_{p,q-2}(p+q+2) &= pq(p+q+2) && > 0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

genau drei verschiedene reelle Nullstellen, je eine davon in den offenen Intervallen $(0,1)$, $(1,p+2)$ sowie $(p+2,p+q+2)$, vgl. (50) aus Abschnitt A. Hiermit gilt $f^3_{p,q-2}(\lambda) \leq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G^3_{p,q-2})$ bzw. $(\lambda-3) f^3_{p,q-2}(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G^3_{p,q-2})$ und daher wie gewünscht $\lambda_2(G^1_{p-1,q}) > \lambda_2(G^3_{p,q-2})$. Die Beziehung $f^2_{p-1,q-1}(\lambda) - (\lambda-3) f^3_{p,q-2}(\lambda) = p+q+2-2\lambda > 0$ für $\lambda < 1 + \frac{p+q}{2}$, vgl. (51) aus Abschnitt A, zeigt $\left[\lambda_2(G^2_{p-1,q-1}) - 3\right] f^3_{p,q-2}(\lambda_2(G^2_{p-1,q-1})) < 0$ wegen $\lambda_2(G^2_{p-1,q-1}) < 1 + \frac{p+q}{2}$. Aus (3.42) folgt $f^3_{p,q-2}(\lambda) \leq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G^3_{p,q-2})$ bzw. $(\lambda-3) f^3_{p,q-2}(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G^3_{p,q-2})$ und somit $\lambda_2(G^2_{p-1,q-1}) > \lambda_2(G^3_{p,q-2})$. Ferner gilt $f^1_{p,q-1}(\lambda) - f^2_{p-1,q-1}(\lambda) = -p\lambda^2 + (2p + pq + 2)\lambda - p - q - 2 =: h(\lambda) > 0$ für $\eta_1 < \lambda < \eta_2$, wobei $\eta_{1/2} := \frac{1}{2p}\left(pq + 2p + 2 \mp \sqrt{p^2q^2 + 4p^2q + 4}\right)$ die Nullstellen von $h(\lambda)$ bezeichnen, vgl. (52) aus Abschnitt A. Wegen

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{1}{2p}\left[pq + 2p + 2 - \sqrt{(pq + 2p + 2)^2}\right] \\ &< \tfrac{1}{2p}\left[pq + 2p + 2 - \sqrt{(pq + 2p + 2)^2 - 4p(p+q+2)}\right] \\ &= \tfrac{1}{2p}\left[pq + 2p + 2 - \sqrt{p^2q^2 + 4p^2q + 4}\right] = \eta_1 \\ &< \tfrac{1}{2p}\left[pq + 2p + 2 - \sqrt{p^2q^2 + 4pq + 4}\right] \\ &= \tfrac{1}{2p}\left[pq + 2p + 2 - \sqrt{(pq+2)^2}\right] = 1 \end{aligned} \tag{3.43}$$

gilt $0 < \eta_1 < 1 < \eta_2$ und p statt $p-1$ bzw. $q-1$ statt q in (3.41) liefert die Ungleichungen $0 < \lambda_2\left(G^1_{p,q-1}\right) < 1 < \eta_2$ mit $f^1_{p,q-1}(1) < 0$. Da $f^1_{p,q-1}(\eta_1) > 0$ für $p \geq q+1 \geq 4$ erfüllt ist, vgl. (53) aus Abschnitt A mit Abbildung 3.30, folgt $\eta_1 < \lambda_2\left(G^1_{p,q-1}\right) < 1 < \eta_2$ und schließlich muss $f^2_{p-1,q-1}\left(\lambda_2\left(G^1_{p,q-1}\right)\right) < 0$ gelten. Das Polynom $f^2_{p-1,q-1}(\lambda)$ besitzt aufgrund von

$$\begin{aligned} f^2_{p-1,q-1}(0) &= 4p + 4q + 8 && > 0, \\ f^2_{p-1,q-1}(2) &= -2(p-1)(q-1) && < 0, \\ f^2_{p-1,q-1}(3) &= p + q - 4 && > 0, \\ f^2_{p-1,q-1}(p+2) &= (2-p)q - 2 - p && < 0, \\ f^2_{p-1,q-1}(p+q+2) &= (p+q+2)(pq(p+q-1)-1) && > 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

genau vier verschiedene reelle Nullstellen, je eine davon in den offenen Intervallen $(0,2)$, $(2,3)$, $(3,p+2)$, $(p+2,p+q+2)$, vgl. (56) aus Abschnitt A. Somit ist $f^2_{p-1,q-1}(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2\left(G^2_{p-1,q-1}\right)$ zu erkennen, das heißt $\lambda_2\left(G^1_{p,q-1}\right) > \lambda_2\left(G^2_{p-1,q-1}\right)$. Damit wurde (3.40) gezeigt.

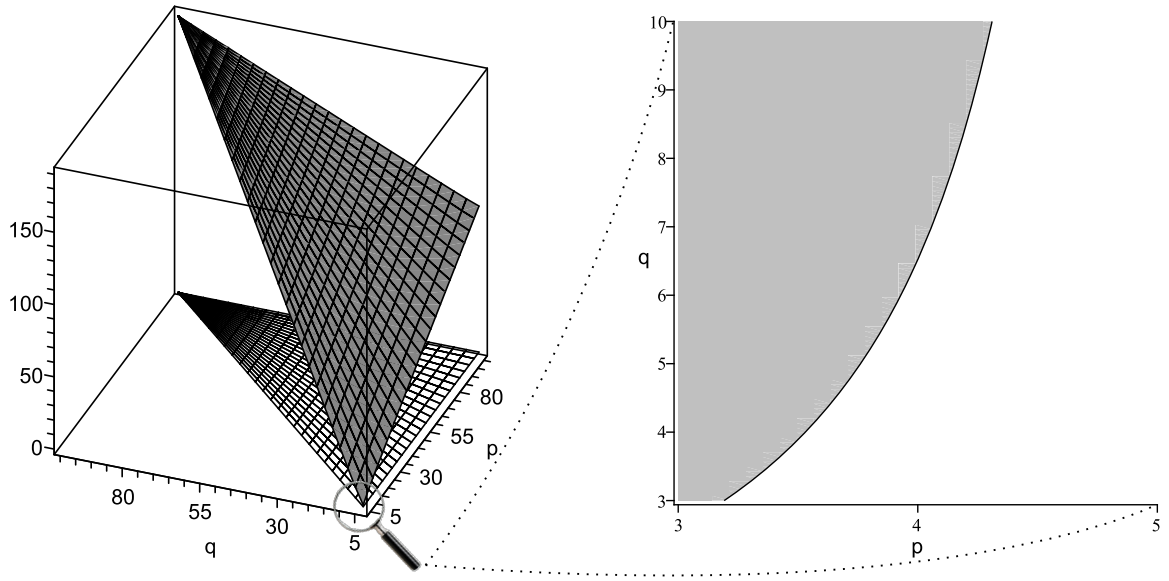


Abbildung 3.30: Links ist $f^1_{p,q-1}(\eta_1) > 0$ für $101 \geq p \geq q+1 \geq 4$ zu sehen und rechts wird $f^1_{p,q-1}(\eta_1) \leq 0$ grau dargestellt, vgl. (54), (55) aus Abschnitt A.

Nun sei $p = q \geq 4$. Es sind genau drei zueinander nicht isomorphe Möglichkeiten ij, jk, jz_2 festzustellen, dem Baum $T^1_{p,p}$ eine Kante hinzuzufügen, vgl. Abbildung 3.29. Aufgrund von $T^1_{p,p} + kz_1 \cong T^1_{p,p} + jz_2 \cong G^1_{p,p-1}$, $T^1_{p,p} + jk \cong G^2_{p-1,p-1}$, $T^1_{p,p} + ij \cong G^3_{p,p-2}$ bleibt

$$\lambda_2\left(G^1_{p,p-1}\right) > \lambda_2\left(G^2_{p-1,p-1}\right) > \lambda_2\left(G^3_{p,p-2}\right) \tag{3.45}$$

zu zeigen, um (3.39) zu schlussfolgern. Aus $f^2_{p-1,p-1}(\lambda) - (\lambda-3)\, f^3_{p,p-2}(\lambda) = 2(p+1-\lambda) > 0$ für $\lambda < p+1$ folgt $\left[\lambda_2\left(G^2_{p-1,p-1}\right)-3\right] f^3_{p,p-2}\left(\lambda_2\left(G^2_{p-1,p-1}\right)\right) < 0$ wegen $\lambda_2\left(G^2_{p-1,p-1}\right) < p+1$, vgl. (57) aus Abschnitt A. Jedoch besagt $p = q$ in (3.42) die Ungleichung $f^3_{p,p-2}(\lambda) \leq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2\left(G^3_{p,p-2}\right)$ bzw. gerade $(\lambda-3)\, f^3_{p,p-2}(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2\left(G^3_{p,p-2}\right)$, das heißt, es gilt $\lambda_2\left(G^2_{p-1,p-1}\right) > \lambda_2\left(G^3_{p,p-2}\right)$. Darüber hinaus wird mit (58) aus Abschnitt A die Beziehung $f^1_{p,p-1}(\lambda) - f^2_{p-1,p-1}(\lambda) = -p\,\lambda^2 + (2p + p^2 + 2)\,\lambda - 2p - 2 =: g(\lambda) > 0$ für $\xi_1 < \lambda < \xi_2$ erfüllt, wobei $\xi_{1/2} := \frac{1}{2p}\left(p^2+2p+2 \mp \sqrt{p^4 + 4p^3 + 4}\right)$ die Nullstellen von $g(\lambda)$ bezeichnen.

Mit p statt $p-1$ bzw. $p-1$ statt q in (3.41) ist $f^1_{p,p-1}(0) > 0$ bzw. $f^1_{p,p-1}(1) < 0$ und $0 < \lambda_2(G^1_{p,p-1}) < 1 < \xi_2$ zu erkennen. Ferner liefert $p = q$ in (3.43) gerade $0 < \xi_1 < 1$. Angenommen, es würde $f^1_{p,p-1}(\xi_1) > 0$ gelten, dann wäre $\xi_1 < \lambda_2(G^1_{p,p-1}) < 1 < \xi_2$ und $f^2_{p-1,p-1}(\lambda_2(G^1_{p,p-1})) < 0$. Via $p = q$ in (3.44) ist $f^2_{p-1,q-1}(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(G^2_{p-1,q-1})$ festzustellen und schließlich würde $\lambda_2(G^1_{p,p-1}) > \lambda_2(G^2_{p-1,p-1})$ erfüllt sein. Es bleibt daher $f^1_{p,p-1}(\xi_1) > 0$ für $p \geq 4$ zu zeigen. Wegen

$$f^1_{p,p-1}(\xi_1) = \tfrac{1}{2\,p^4}\,(p-1)\left[(p^3-4\,p+8)\,\sqrt{p^4+4\,p^3+4}-p^5+2\,p^4-10\,p^3+8\,p-16\right] \overset{!}{>} 0$$

laut (59) aus Abschnitt A gilt $f^1_{4,3}(\xi_1) \approx 0{,}79732$ bzw. $f^1_{5,4}(\xi_1) \approx 2{,}22678$ für $p = 4, 5$, vgl. (60) aus Abschnitt A. Weiterhin ist $f^1_{p,p-1}(\xi_1) > 0$ für $p \geq 6$ folgendermaßen einzusehen: Die Rechnung (61) aus Abschnitt A besagt $p^3 - 4\,p + 8 > 0$ und somit

$$\begin{aligned} & f^1_{p,p-1}(\xi_1) \overset{!}{>} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \underbrace{2\,p^4+8\,p+\overbrace{(p^3-4\,p+8)}^{>0}\,\overbrace{\sqrt{p^4+4\,p^3+4}}^{>\sqrt{p^4+4\,p^2+4}}}_{>\,2\,p^4+8\,p+(p^3-4\,p+8)\,\sqrt{(p^2+2)^2}} \overset{!}{>} p^5+10\,p^3+16. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung wird sicher für alle $p \geq 6$ mit

$$\begin{aligned} & 2\,p^4+8\,p+(p^3-4\,p+8)\,(p^2+2) \overset{!}{>} p^5+10\,p^3+16 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\,p^4+8\,p^2 \overset{!}{>} 12\,p^3 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\,p^2+8 \overset{!}{>} 12\,p \\ \Leftrightarrow \quad & p^2-6\,p+4 \overset{!}{>} 0 \end{aligned}$$

erfüllt, das heißt für $p \in \left(-\infty, 3-\sqrt{5}\right) \cup \left(3+\sqrt{5}, \infty\right)$, vgl. (62) aus Abschnitt A. Damit wurde $f^1_{p,p-1}(\xi_1) > 0$ für $p \geq 4$ gezeigt, woraus $\lambda_2(G^1_{p,p-1}) > \lambda_2(G^2_{p-1,p-1})$ gemäß obiger Überlegungen folgt, was letztendlich (3.45) liefert. □

Ist z. B. den Bäumen $T^1_{5,3}$, $T^1_{4,4}$, $T^1_{51,50}$, $T^1_{50,50}$, $T^1_{51,49}$, $T^1_{97,3}$ eine Kante hinzuzufügen, so zeigt Tabelle 3.11 die dabei auftretenden algebraischen Konnektivitäten aller nicht isomorphen Varianten:

rs	$\lambda_2(T^1_{5,3}+rs)$	$\lambda_2(T^1_{4,4}+rs)$	$\lambda_2(T^1_{51,50}+rs)$	$\lambda_2(T^1_{50,50}+rs)$	$\lambda_2(T^1_{51,49}+rs)$	$\lambda_2(T^1_{97,3}+rs)$
kz_1	0,45955	0,42759	0,05563	0,05614	0,05618	0,35275
jz_2	0,42759	0,42759	0,05561	0,05614	0,05614	0,28548
jk	0,43845	0,42198	0,05011	0,05058	0,05060	0,30021
kl	0,30873	0,29532	0,03741	0,03776	0,03778	0,21535
ij	0,30873	0,29532	0,03741	0,03776	0,03778	0,21535
$-$	0,30873	0,29532	0,03741	0,03776	0,03778	0,21535

Tabelle 3.11: Beispiele für Satz 3.36, vgl. Abbildung 3.29

Anschließend werden die mit Beobachtung 3.35 bekannten Spektren der Bäume $T^1_{p,q}$, $T^2_{p,q}$, $T^3_{p,q}$ aus Abbildung 3.28 genutzt, um zwei disjunkte Sterne optimal durch eine neue Kante zu verbinden:

Satz 3.37

Gegeben seien zwei disjunkte Sterne $K_{1,p} = (N_1, E_1)$ mit Zentrum z_1 bzw. $K_{1,q} = (N_2, E_2)$ mit Zentrum z_2 sowie $i \in N_1 \setminus \{z_1\}$, $j \in N_2 \setminus \{z_2\}$, vgl. Abbildung 3.31. Für $p, q \geq 2$, $n = p + q + 2$, $N_1 \cup N_2 = N$, $E_1 \cup E_2 = E$ ist es optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität, dem Wald $F_{p,q} \coloneqq K_{1,p} \dot{+} K_{1,q} = (N, E)$ die Kante $z_1 z_2$ hinzuzufügen, das heißt

$$\lambda_2 (F_{p,q} + z_1 z_2) \geq \lambda_2 (F_{p,q} + rs) \ \forall rs \in \binom{N}{2} \setminus E, \ \ n \geq 6. \tag{3.46}$$

Gleichheit gilt in (3.46) genau dann, wenn $rs = z_1 z_2$ erfüllt wird.

Beweis:

Es sei $p \geq q \geq 2$. Für $p > q$ sind genau vier zueinander nicht isomorphe Möglichkeiten $ij, iz_2, jz_1, z_1 z_2$ und für $p = q$ wegen $F_{p,p} + iz_2 \cong T_{p,p} + jz_1$ genau drei solche $ij, iz_2, z_1 z_2$ zu erkennen, dem Wald $F_{p,q}$ eine Kante hinzuzufügen, vgl. Abbildung 3.31. Aufgrund von $F_{p,q} + z_1 z_2 \cong T^1_{p,q}$, $F_{p,q} + jz_1 \cong T^2_{p,q-1}$, $F_{p,q} + iz_2 \cong T^2_{p-1,q}$, $F_{p,q} + ij \cong T^3_{p-1,q-1}$, vgl. Abbildung 3.28, bleibt für $p \geq q$ gerade

$$\lambda_2 (T^1_{p,q}) > \lambda_2 (T^2_{p,q-1}) \overset{(*)}{\geq} \lambda_2 (T^2_{p-1,q}) > \lambda_2 (T^3_{p-1,q-1}) \tag{3.47}$$

zu zeigen, um (3.46) zu schlussfolgern. Gleichheit soll in $(*)$ genau dann erfüllt werden, wenn $p = q$ ist. Nach Lemma 3.26 und (3.36) bezeichnet der zweitkleinste Eigenwert $\lambda_2 (T^m_{p,q})$ für $m \in \{1, 2, 3\}$ die kleinste Nullstelle des Polynoms $f^{m+3}_{p,q} (\lambda)$, vgl. (3.37). Es gilt $(\lambda - 1) f^4_{p,q} (\lambda) - f^5_{p,q-1} (\lambda) = \lambda (q - 1) (p + 1 - \lambda) > 0$ für $0 < \lambda < p + 1$, vgl. (62) aus Abschnitt A. Daraus folgt wegen $0 < \lambda_2 (T^1_{p,q}) < p + 1$ gerade $f^5_{p,q-1} (\lambda_2 (T^1_{p,q})) < 0$. Das Polynom $f^5_{p,q-1} (\lambda)$ besitzt mittels

$$\begin{aligned}
f^5_{p,q-1} (0) &= p + q + 2 && > 0, \\
f^5_{p,q-1} (1) &= -p (q - 1) && < 0, \\
f^5_{p,q-1} (2) &= p + q - 2 && > 0, \\
f^5_{p,q-1} (p + 2) &= q - p - 2 && < 0, \\
f^5_{p,q-1} (p + q + 2) &= (p + q + 2) (q (p + 1) (p + q) - 1) && > 0
\end{aligned} \tag{3.48}$$

genau vier verschiedene reelle Nullstellen und je eine davon in den offenen Intervallen $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, p+2)$, $(p+2, p+q+2)$, vgl. (64) aus Abschnitt A. Somit ist $f^5_{p,q-1} (\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2 (T^2_{p,q-1})$, was gerade $\lambda_2 (T^1_{p,q}) > \lambda_2 (T^2_{p,q-1})$ bedeutet. Weiterhin gilt nach (65) aus Abschnitt A die Beziehung $f^5_{p,q-1} (\lambda) - f^5_{p-1,q} (\lambda) = -\lambda (\lambda - 2) (p - q) =: g (\lambda)$. Falls $p = q$ ist, folgt $g (\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, das heißt $\lambda_2 (T^2_{p,q-1}) = \lambda_2 (T^2_{p-1,q})$. Wird hingegen $p > q$ vorausgesetzt, so ergibt sich $g (\lambda) > 0$ für $0 < \lambda < 2$. Dies liefert $f^5_{p-1,q} (\lambda_2 (T^2_{p,q-1})) < 0$, da $0 < \lambda_2 (T^2_{p,q-1}) < 2$ gilt. Jedoch besagt $p - 1$ statt p bzw. q statt $q - 1$ in (3.48) gerade $f^5_{p-1,q} (\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2 (T^2_{p-1,q})$ und daher $\lambda_2 (T^2_{p,q-1}) > \lambda_2 (T^2_{p-1,q})$. Über die Gleichung $f^5_{p-1,q} (\lambda) - f^6_{p-1,q-1} (\lambda) = \lambda (q - 1) (p + 1 - \lambda) > 0$ für $0 < \lambda < p + 1$, vgl. (66) aus Abschnitt A, ist $f^6_{p-1,q-1} (\lambda_2 (T^2_{p-1,q})) < 0$ wegen $0 < \lambda_2 (T^2_{p-1,q}) < p + 1$ zu erkennen. Das Polynom $f^6_{p-1,q-1} (\lambda)$ hat für $p > q \geq 2$ aufgrund von

$$\begin{aligned}
f^6_{p-1,q-1} (0) &= p + q + 2 && > 0, \\
f^6_{p-1,q-1} (1) &= p + q - 2\,p\,q && < 0, \\
f^6_{p-1,q-1} (q + 1) &= p - q && > 0, \\
f^6_{p-1,q-1} (p + 1) &= q - p && < 0, \\
f^6_{p-1,q-1} (p + q + 2) &= (p + q + 2) (p (q + 1) (p + q) + q^2 - 2) && > 0
\end{aligned} \tag{3.49}$$

genau vier verschiedene reelle Nullstellen, je eine davon in den offenen Intervallen $(0,1)$, $(1,q+1)$, $(q+1,p+1)$, $(p+1,p+q+2)$, vgl. (67) aus Abschnitt A. Für $p=q>2$ besitzt $f^6_{p-1,q-1}(\lambda)$ wegen

$$\begin{aligned} f^6_{p-1,q-1}(0) &= 2p+2 &&> 0,\\ f^6_{p-1,q-1}(1) &= 2p(1-p) &&< 0,\\ f^6_{p-1,q-1}(3) &= 2p-4 &&> 0,\\ f^6_{p-1,q-1}(p+1) &= p-p &&= 0 \end{aligned} \tag{3.50}$$

genau vier reelle Nullstellen $\xi_1 \in (0,1)$, $\xi_2 \in (1,3)$, $\xi_3 = p+1$, $\xi_4 > p$, vgl. (68) aus Abschnitt A. Dabei ist $\xi_4 > p$ wie folgt einzusehen: Nach (3.37) und [20, Kapitel 4.2, S. 229] gilt für den Koeffizienten $-(2(p-1)+7)$ vor der zweithöchsten Potenz von $f^6_{p-1,p-1}(\lambda)$ gerade $\sum_{i=1}^4 \xi_i = 2(p-1)+7$. Mit (3.50) wird $2(p-1)+7-\xi_4 = \sum_{i=1}^3 \xi_i < 1+3+p+1$ abgeschätzt, das heißt $\xi_4 > p$. Gemäß (69) aus Abschnitt A besitzt $f^6_{1,1}(\lambda)$ die vier reellen Nullstellen $\{\approx 0{,}26795;\ 2;\ 3;\ \approx 3{,}73205\}$, wobei $f^6_{1,1}(0) > 0$ ist. Diese Feststellung liefert im Zusammenspiel mit (3.49), (3.50) gerade $f^6_{p-1,q-1}(\lambda) \geq 0$ für $\lambda \leq \lambda_2(T^3_{p-1,q-1})$, das heißt $\lambda_2(T^2_{p-1,q}) > \lambda_2(T^3_{p-1,q-1})$ für $p \geq q \geq 2$ und (3.47) wurde gezeigt. □

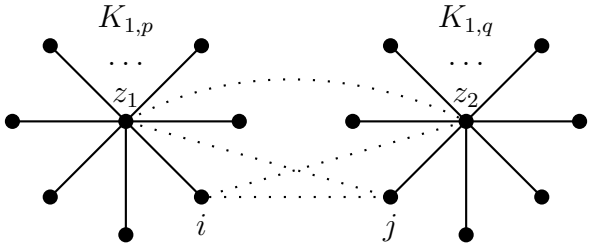


Abbildung 3.31: Nicht isomorphe Varianten beim Hinzufügen einer Kante zu $K_{1,p} \dot{+} K_{1,q}$

Für $p=q=5$, $p=7>3=q$ und $p=44>33=q$ lässt Tabelle 3.12 die beim Verbinden zweier disjunkter Sterne $K_{1,p}$, $K_{1,q}$ auftretenden algebraischen Konnektivitäten aller nicht isomorphen Möglichkeiten erkennen:

rs	$\lambda_2(K_{1,5} \dot{+} K_{1,5} + rs)$	$\lambda_2(K_{1,7} \dot{+} K_{1,3} + rs)$	$\lambda_2(K_{1,44} \dot{+} K_{1,33} + rs)$
z_1z_2	0,25834	0,28510	0,04916
jz_1	0,15878	0,19148	0,02560
iz_2	0,15878	0,16827	0,02542
ij	0,11798	0,13466	0,01732
–	0,00000	0,00000	0,00000

Tabelle 3.12: Beispiele für Satz 3.37, vgl. Abbildung 3.31

Der nächste Abschnitt 3.5 beschäftigt sich mit Graphen, die im Gegensatz zu allen bisher betrachteten Fällen mehr als einen Kreis enthalten dürfen. Zuvor sei noch vermerkt, dass Lemma 3.26 bereits ein Resultat für solche Graphen als Verallgemeinerung von Satz 3.31 liefert, vgl. dazu Abbildung 3.32:

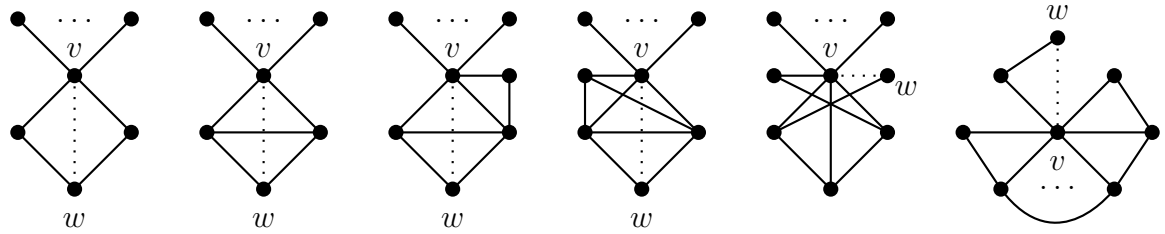


Abbildung 3.32: Beispiele optimaler Kanten für Satz 3.38

Satz 3.38

Existiert in einem zusammenhängenden Graphen $G = (N, E)$ für $n \geq 5$ ein Knoten v mit $\lambda_2(G - v) = 0$ und $d_G(v) = n - 2$, so ist es optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität, den Knoten v mit dem einzig verbliebenen zu v nicht adjazenten Knoten $w \in N \setminus \{v\}$ zu verbinden, das heißt

$$1 = \lambda_2(G + vw) \geq \lambda_2(G + ij) \;\; \forall ij \in \binom{N}{2} \setminus E, \;\; n \geq 5. \tag{3.51}$$

Gleichheit gilt in (3.51) genau dann, wenn $ij = vw$ erfüllt wird.

3.5 Vollständig multipartite Graphen und ganzzahlige Spektren

Einige Graphen haben die besondere Eigenschaft, ausschließlich ganzzahlige Eigenwerte über ihre Laplace-Matrix zu erzeugen. Nun ist es für die Maximierung des $\lambda_2(G+ij)$ von Interesse, wann mit $G = (N, E)$ und $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ auch $G + ij$ ein ganzzahliges Spektrum besitzt. Die Untersuchungen aus Abschnitt 3.1 besagen $\sum_{k=1}^{n} \left[\lambda_k(G + ij) - \lambda_k(G)\right] = 2$ sowie $\lambda_k(G + ij) \geq \lambda_k(G)$ und daher können nur zwei Situationen auftreten, welche die Ganzzahligkeit von $\operatorname{sp}(G + ij)$ garantieren:

(a) Die Spektren von G bzw. $G + ij$ stimmen in $n - 1$ Eigenwerten überein. Bezeichnet $\lambda_k(G)$ den einzigen Eigenwert von G, der kein Eigenwert von $G + ij$ ist, so stellt $\lambda_k(G) + 2$ einen Eigenwert von $G + ij$ dar.

(b) Es gilt $\left|\operatorname{sp}(G) \cap \operatorname{sp}(G + ij)\right| = n - 2$. Sind $\lambda_k(G)$ bzw. $\lambda_l(G)$ für $k \neq l$ die beiden Eigenwerte von G, die nicht zu $\operatorname{sp}(G + ij)$ gehören, so beschreiben $\lambda_k(G) + 1$ und $\lambda_l(G) + 1$ zwei Eigenwerte von $G + ij$.

Fan deckt in [15, Lemma 9, Theorem 5, S. 141] Bedingungen auf, die Fall (b) erzielen. In diesem Abschnitt soll dagegen der vollständig multipartite Graph $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} = (N, E)$ als ein Beispiel für Situation (a) erkannt werden. Dazu seien $r \geq 2$ disjunkte Knotenmengen $N_1, N_2, \ldots, N_r \subseteq N$ mit $\bigcup_{i=1}^{r} N_i = N$ und $|N_i| = n_i$ gegeben, welche ohne Beschränkung der Allgemeinheit vermittels $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_r$ sortiert werden. Abbildung 3.33 zeigt drei Beispiele vollständig multipartiter Graphen auf je acht Knoten:

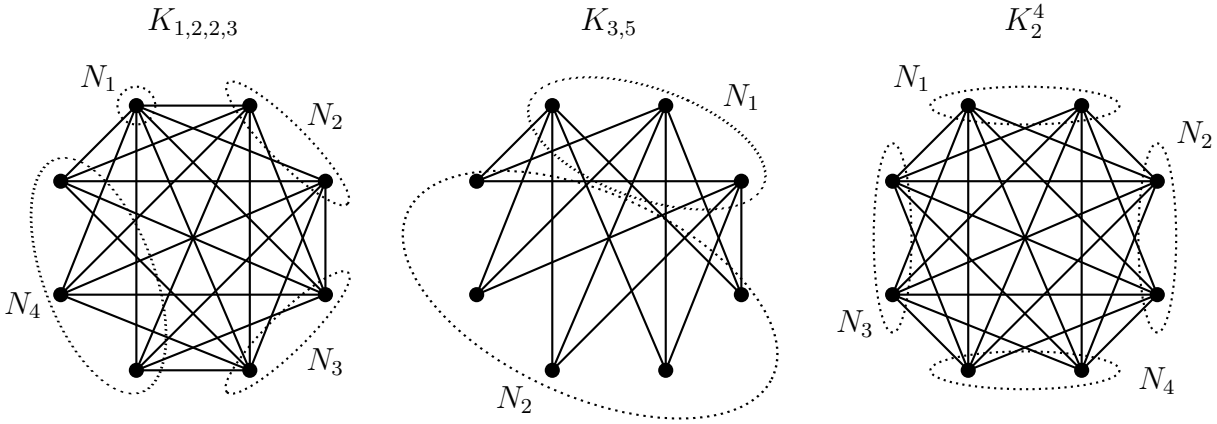


Abbildung 3.33: Vollständig multipartite Graphen

Zur Identifikation aller Eigenwerte von $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ ist es hilfreich zu wissen, wie das Spektrum eines Graphen mit den Eigenwerten seines Komplements zusammenhängt:

Lemma 3.39 (vgl. z. B. [51, Theorem 3.6] und [23, Lemma 13.1.3])

Das Spektrum des Komplements $\overline{G}$ eines Graphen $G = (N, E)$ auf $n \geq 2$ Knoten erfüllt $\lambda_1(\overline{G}) = 0$ und $\lambda_{k+1}(\overline{G}) = n - \lambda_{n-k+1}(G)$ für $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Beweis:

Die Definitionen 2.4, 2.21, 2.22 liefern zunächst

$$L(G) = (l_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad \text{mit} \quad l_{ij} = \begin{cases} d_G(i) & \text{wenn } i = j, \\ -1 & \text{wenn } i \neq j,\ ij \in E, \\ 0 & \text{wenn } i \neq j,\ ij \notin E, \end{cases}$$

$$L(\overline{G}) = (\bar{l}_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad \text{mit} \quad \bar{l}_{ij} = \begin{cases} d_{\overline{G}}(i) & \text{wenn } i = j, \\ -1 & \text{wenn } i \neq j,\ ij \in E(\overline{G}), \\ 0 & \text{wenn } i \neq j,\ ij \notin E(\overline{G}), \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n - 1 - d_G(i) = n - 1 - l_{ij} & \text{wenn } i = j, \\ -1 & \text{wenn } i \neq j,\ ij \in \binom{N}{2} \setminus E \Leftrightarrow ij \notin E, \\ 0 & \text{wenn } i \neq j,\ ij \notin \binom{N}{2} \setminus E \Leftrightarrow ij \in E, \end{cases}$$

das heißt

$$L(G) + L(\overline{G}) = n\,I - \mathbf{1}\,\mathbf{1}^{\top} = L(K_n). \tag{3.52}$$

Aus Abschnitt 2.3 ist bekannt, dass jede Laplace-Matrix die Null als Eigenwert mit Eigenvektor $\mathbf{1}$ besitzt. Folglich gilt $\lambda_1(G) = \lambda_1(\overline{G}) = 0$. Wegen $\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \ldots \leq \lambda_n(G)$ bleibt zu zeigen, dass $n - \lambda$ genau dann einen Eigenwert von $\overline{G}$ bezeichnet, wenn $\lambda \neq 0$ einen Eigenwert von G darstellt. Da jede Laplace-Matrix positiv semidefinit ist, sind die Eigenvektoren von G orthogonal nach Satz 2.17. Es sei somit $y \neq \mathbf{1}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \neq 0$ von G, der $\langle y, \mathbf{1} \rangle = 0$ bzw. $\mathbf{1}\,\mathbf{1}^{\top} y = 0$ erfüllt. Die Gleichung (3.52) besagt in der Tat $L(\overline{G})\,y = \left[n\,I - \mathbf{1}\,\mathbf{1}^{\top} - L(G)\right] y = n\,y - 0 - \lambda\,y = (n - \lambda)\,y$. □

Korollar 3.40 (vgl. z. B. [23, S. 281])

Für den vollständigen Graphen auf $n \geq 2$ Knoten gilt $\mathrm{sp}(K_n) = \{0, n, \ldots, n\}$ mit algebraischer Vielfachheit $\alpha(n) = n - 1$.

Beweis:

Da $L(\overline{K}_n) = 0$ die Nullmatrix ist bzw. $\mathrm{sp}(\overline{K}_n) = \{0, \ldots, 0\}$ mit $\alpha(0) = n$ gilt, liefert Lemma 3.39 gerade $\mathrm{sp}(K_n) = \{0, n - 0, \ldots, n - 0\} = \{0, n, \ldots, n\}$ mit $\alpha(n) = n - 1$. □

Korollar 3.41

Gegeben sei ein vollständig multipartiter Graph $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} = (N, E)$ mit $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$, $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_r$ und $r \geq 2$, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}(K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}) = \{&0, n - n_r, \ldots, n - n_r, \\ &\vdots \\ &n - n_2, \ldots, n - n_2, \\ &n - n_1, \ldots, n - n_1, \\ &n, \ldots, n\}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha(n) = r - 1$ und $\alpha(n - n_i) = n_i - 1$ für $i = 1, 2, \ldots, r$ ist.

Beweis:

Eine Anwendung von Beobachtung 2.23 und Korollar 3.40 erzeugt

$$\chi_{K_{n_1}\dot{+}K_{n_2}\dot{+}\ldots\dot{+}K_{n_r}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} \chi_{K_{n_i}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} \lambda\,(\lambda - n_i)^{n_i-1} = \lambda^r \prod_{i=1}^{r} (\lambda - n_i)^{n_i-1}$$

bzw. $\operatorname{sp}(K_{n_1} \dot{+} K_{n_2} \dot{+} \ldots \dot{+} K_{n_r}) = \{0, \ldots, 0, n_1, \ldots, n_1, n_2, \ldots, n_2, \ldots, n_r, \ldots, n_r\}$ mit $\alpha(0) = r$ und $\alpha(n_i) = n_i - 1$ für $i = 1, 2, \ldots, r$. Via $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} \cong \overline{K_{n_1} \dot{+} K_{n_2} \dot{+} \ldots \dot{+} K_{n_r}}$ liefert Lemma 3.39 die gewünschte Aussage. □

Anschließend werden noch die Spezialfälle der Eigenwerte eines vollständig bipartiten Graphen $K_{p,q}$ für $1 \leq p \leq q$ und eines vollständig multipartiten Graphen K_s^r mit $r \geq 2$ disjunkten Knotenmengen gleicher Kardinalität $s \geq 1$ notiert:

Korollar 3.42 (vgl. z. B. [23, S. 281])

Für $1 \leq p \leq q$, $r \geq 2$ und $s \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{sp}(K_{p,q}) &= \{0, p, \ldots, p, q, \ldots, q, p+q\}, \\ \operatorname{sp}(K_s^r) &= \big\{0, (r-1)\,s, \ldots, (r-1)\,s, r\,s, \ldots, r\,s\big\} \end{aligned}$$

mit $\alpha(p) = q - 1$, $\alpha(q) = p - 1$, $\alpha((r-1)\,s) = r\,(s-1)$, $\alpha(r\,s) = r - 1$.

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort aus Korollar 3.41 über $n = p + q$ bzw. $n = r\,s$. □

Als Beispiele obiger Erkenntnisse dienen die Spektren der Graphen aus Abbildung 3.33:

$$\begin{aligned} \operatorname{sp}(K_{1,2,2,3}) &= \{0, 5, 5, 6, 6, 8, 8, 8\}, \\ \operatorname{sp}(K_{3,5}) &= \{0, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 8\}, \\ \operatorname{sp}(K_2^4) &= \{0, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8\}. \end{aligned}$$

Bisher wurde eingesehen, dass ein vollständig multipartiter Graph $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} = (N, E)$ ein ganzzahliges Spektrum vorweist. Was geschieht beim Hinzufügen einer Kante $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$? Wasin So beweist ein Kriterium, welches äquivalent dazu ist, dass sich die Spektren $\operatorname{sp}(G)$ und $\operatorname{sp}(G + ij)$ für einen beliebigen Graphen G auf n Knoten in genau einem Eigenwert unterscheiden und in $n - 1$ Eigenwerten überschneiden:

Lemma 3.43 (vgl. z. B. [57, Theorem 2.2])

Gegeben seien ein Graph $G = (N, E)$ und zwei nicht adjazente Knoten $i \neq j$ aus N. Die Menge aller zu i adjazenten Knoten aus N entspricht genau dann der Menge aller zu j adjazenten Knoten aus N, wenn $\operatorname{sp}(G)$ und $\operatorname{sp}(G + ij)$ in exakt $n - 1$ Eigenwerten übereinstimmen.

Werden zwei nicht adjazente Knoten $i \neq j$ von $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} = (N, E)$ gewählt, so liegen diese offenbar in der gleichen Knotenmenge N_s für ein $s \in \{1, 2, \ldots, r\}$ und haben die gleiche Menge adjazenter Knoten $N \setminus N_s$. Daher besagt Lemma 3.43, dass das Hinzufügen einer Kante zu $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ zur obigen Situation (a) gehört: Die Spektren von $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ und $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} + ij$ stimmen in $n-1$ Eigenwerten überein. Bezeichnet $\lambda_k(K_{n_1,n_2,\ldots,n_r})$ den einzigen Eigenwert, der kein Eigenwert von $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} + ij$ ist, so stellt $\lambda_k(K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}) + 2$ einen Eigenwert von $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} + ij$ dar.

Nun ist bekannt, dass beim Hinzufügen einer Kante $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ zu einem vollständig multipartiten Graphen $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} = (N, E)$ genau ein Eigenwert um 2 erhöht wird und alle anderen unverändert bleiben. Darüber hinaus hat auch $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} + ij$ ein ganzzahliges Spektrum. Für die Maximierung der algebraischen Konnektivität stellt sich die Frage, wann diese Erhöhung um 2 gerade den zweitkleinsten Eigenwert $\lambda_2\left(K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}\right)$ trifft.

Hierzu liefern Barik und Pati ein hilfreiches Resultat:

Lemma 3.44 (vgl. z. B. [1, Theorem 12])

Es seien $G = (N, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $\alpha\left(\lambda_2(G)\right) = 1$ und $i \neq j$ zwei nicht adjazente Knoten aus N, dann gilt

$$\operatorname{sp}(G + ij) = \left[\operatorname{sp}(G) \setminus \{\lambda_2(G)\}\right] \cup \{\lambda_2(G) + 2\} \Leftrightarrow G \cong K_n - ij.$$

Aus Korollar 3.41 folgt einerseits $\lambda_2\left(K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}\right) = n - n_r$ mit $\alpha\left(\lambda_2\left(K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}\right)\right) = n_r - 1$. Andererseits ist laut Korollar 3.2 bekannt, dass

$$\begin{aligned} n_r \geq 3 \Leftrightarrow n_r - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha\left(\lambda_2\left(K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}\right)\right) > 1 \\ \Rightarrow \lambda_2\left(K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}\right) = \lambda_2\left(K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} + ij\right) \ \forall ij \in \tbinom{N}{2} \setminus E \end{aligned}$$

erfüllt wird und somit das Hinzufügen einer beliebigen Kante zum vollständig multipartiten Graphen $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ für $n_r \geq 3$ dessen algebraische Konnektivität unberührt lässt. Es verbleiben die Fälle $n_r = 1$ und $n_r = 2$. Für $n_r = 1$ muss $n_{r-1} = \ldots = n_1 = 1$ gelten und dies führt zum vollständig r-partiten Graphen $K_{1,\ldots,1} \cong K_1^r \cong \overline{K_1 \dot{+} \ldots \dot{+} K_1} \cong K_r$. Das Hinzufügen einer Kante zu diesem vollständigen Graphen verändert offenbar weder den Graphen selbst noch sein Spektrum. Interessant ist einzig der Fall $n_r = 2$: Korollar 3.41 liefert $\alpha\left(\lambda_2\left(K_{n_1,\ldots,n_{r-1},2}\right)\right) = 2 - 1 = 1$. Sollte es mindestens ein $1 \leq i < r$ mit $n_i = n_r = 2$ geben, so existieren mindestens zwei Eigenwerte $\lambda_2\left(K_{n_1,\ldots,n_{r-1},2}\right) = n - n_r = n - 2$ und $\lambda_k\left(K_{n_1,\ldots,n_{r-1},2}\right) = n - n_i = n - 2$ nach Korollar 3.41, das heißt $\alpha\left(\lambda_2\left(K_{n_1,\ldots,n_{r-1},2}\right)\right) \geq 2$ und Korollar 3.2 verifiziert $\lambda_2\left(K_{n_1,\ldots,n_{r-1},2}\right) = \lambda_2\left(K_{n_1,\ldots,n_{r-1},2} + ij\right)$. Übrig bleibt ausschließlich der vollständig r-partite Graph $K_{1,\ldots,1,2}$ auf $n = r + 1$ Knoten. Dessen Spektrum wird via $\operatorname{sp}\left(K_{1,\ldots,1,2}\right) = \{0, r-1, r+1, \ldots, r+1\}$ mit $\alpha(r+1) = r - 1$ erkannt, vgl. abermals Korollar 3.41. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $N_r = \{i, j\}$ für $K_{1,\ldots,1,2}$, dann folgt $K_{1,\ldots,1,2} \cong \overline{K_1 \dot{+} \ldots \dot{+} K_1 \dot{+} K_2} \cong K_{r+1} - ij$, vgl. beispielsweise $r = 3$ in Abbildung 3.34. Letztlich ist $\operatorname{sp}\left(K_{1,\ldots,1,2} + ij\right) = \operatorname{sp}\left(K_{r+1}\right) = \{0, r+1, \ldots, r+1\}$ mit $\alpha(r+1) = r$ bzw. $\lambda_2\left(K_{1,\ldots,1,2} + ij\right) = \lambda_2\left(K_{1,\ldots,1,2}\right) + 2$ gemäß Lemma 3.44 und Korollar 3.40 festzustellen.

Es wurde folgender Satz bewiesen:

Satz 3.45

Gegeben seien $r \geq 2$ disjunkte Knotenmengen $N_1, N_2, \ldots, N_r \subseteq N$ mit $\bigcup_{i=1}^{r} N_i = N$ und $|N_i| = n_i \geq 1$. Das Hinzufügen einer beliebigen Kante zum vollständig multipartiten Graphen $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} = (N, E)$ mit $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} \ncong K_n - kl$ für eine Kante $kl \in E\left(K_n\right)$ lässt dessen algebraische Konnektivität unberührt, das heißt, eine beliebige Kante $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ ist optimal im Sinne der Maximierung von $\lambda_2\left(K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} + ij\right) = n - n_r$. Sollte hingegen $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} \cong K_n - kl$ erfüllt werden, so ist dies äquivalent zu $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r} \cong K_{1,\ldots,1,2}$ und es gilt $\lambda_2\left(K_{1,\ldots,1,2} + kl\right) = \lambda_2\left(K_{1,\ldots,1,2}\right) + 2 = r - 1 + 2 = r + 1 = n$.

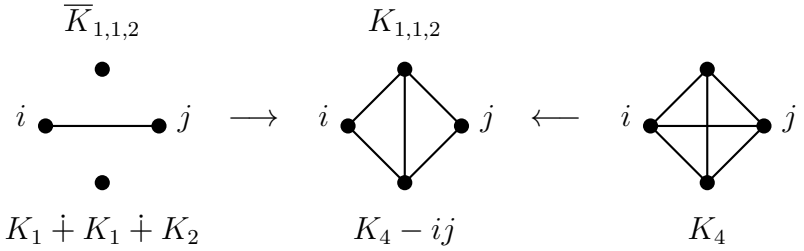


Abbildung 3.34: Es ist $K_{1,1,2} \cong \overline{K_1 \dot{+} K_1 \dot{+} K_2} \cong K_4 - ij$ mit $\mathrm{sp}\,(K_{1,1,2}) = \{0, 2, 4, 4\}$ und $\mathrm{sp}\,(K_4) = \{0, 4, 4, 4\}$.

Ein vollständig bipartiter Graph $K_{p,q} = (N, E)$ mit $1 \leq p \leq q$ bezeichnet einen Spezialfall von Satz 3.45. Für $r = 2$, $p = 1$, $q = n - 1$ führt diese Situation auf einen Stern $K_{1,n-1}$ und $\lambda_2\,(K_{1,n-1} + ij)$ wird von Satz 3.27 behandelt. Vermittels $r = 2$ bzw. $2 \leq p \leq q$ ergibt sich aus Satz 3.45 die nachstehende Aussage:

Korollar 3.46

Das Hinzufügen einer beliebigen Kante zum vollständig bipartiten Graphen $K_{p,q} = (N, E)$ mit $2 \leq p \leq q$ lässt dessen algebraische Konnektivität unberührt, das heißt, jede Kante $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$ ist optimal im Sinne der Maximierung von $\lambda_2\,(K_{p,q} + ij) = p$.

Beweis:

Für $p = q = 2$ ist $K_{2,2} \cong C_4$ und Satz 3.20 liefert die Behauptung. Alle anderen Fälle erzeugen $\alpha\,(\lambda_2\,(K_{p,q})) = q - 1 > 1$ laut Korollar 3.42 und aus Korollar 3.2 folgt das gewünschte Resultat. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes sei vermerkt, dass die Bäume $K_{1,n-1}, T_1, T_2, T_3, T_4$ aus den Abbildungen 3.15, 3.19, 3.21, 3.23, 3.25 und die Graphen $G_1, G_{10}, G_{13}, G_{16}, G_{17}, G_{19}$ aus den Abbildungen 3.16, 3.17 des Abschnittes 3.4 Beispiele auf $n \geq 8$ Knoten für Lemma 3.43 bereitstellen, in denen die Erhöhung eines einzigen Eigenwertes um 2 beim Hinzufügen einer Kante keinesfalls die algebraische Konnektivität betrifft. Dazu werden die charakteristischen Polynome der Bäume $K_{1,n-1}, T_1, T_2, T_3, T_4$ angegeben, wobei $\chi_{K_{1,n-1}}\,(\lambda)$ aus Beobachtung 3.25 und $\chi_{T_4}\,(\lambda)$ aus Lemma 3.18 resultieren, indem $G_1 := T_1$, $G_2 := (\{v\}, \emptyset)$ in Lemma 3.18 gesetzt werden und dortiges u eines der zum Zentrum von T_1 adjazenten Blätter beschreibt. Eine solche Berechnung von $\chi_{T_4}\,(\lambda)$ ist elementar, aber länglich und wird deshalb an dieser Stelle nicht vollzogen:

$$\begin{aligned}
\chi_{K_{1,n-1}}\,(\lambda) &= \lambda\,(\lambda-1)^{n-2}\,(\lambda-n)\\
\chi_{T_1}\,(\lambda) \overset{(3.36)}{=\!=} \chi_{T^1_{n-3,1}}\,(\lambda) &= \lambda\,(\lambda-1)^{n-4}\,f^4_{n-3,1}\,(\lambda) \overset{(3.22)}{=\!=} \lambda\,(\lambda-1)^{n-4}\,f_{10}\,(\lambda)\\
\chi_{T_2}\,(\lambda) \overset{(3.36)}{=\!=} \chi_{T^2_{n-4,1}}\,(\lambda) &= \lambda\,(\lambda-1)^{n-5}\,f^5_{n-4,1}\,(\lambda) \overset{(3.22)}{=\!=} \lambda\,(\lambda-1)^{n-5}\,f_{19}\,(\lambda)\\
\chi_{T_3}\,(\lambda) \overset{(3.36)}{=\!=} \chi_{T^1_{n-4,2}}\,(\lambda) &= \lambda\,(\lambda-1)^{n-4}\,f^4_{n-4,2}\,(\lambda) \overset{(3.22)}{=\!=} \lambda\,(\lambda-1)^{n-4}\,f_{16}\,(\lambda)\\
\chi_{T_4}\,(\lambda) &= \lambda\,(\lambda-1)^{n-6}\,(\lambda^2 - 3\,\lambda + 1)\,f_7\,(\lambda).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Ein Vergleich der charakteristischen Polynome aus (3.53) und (3.21) zeigt in der Tat sechs Beispiele für Lemma 3.43 via Abbildung 3.35:

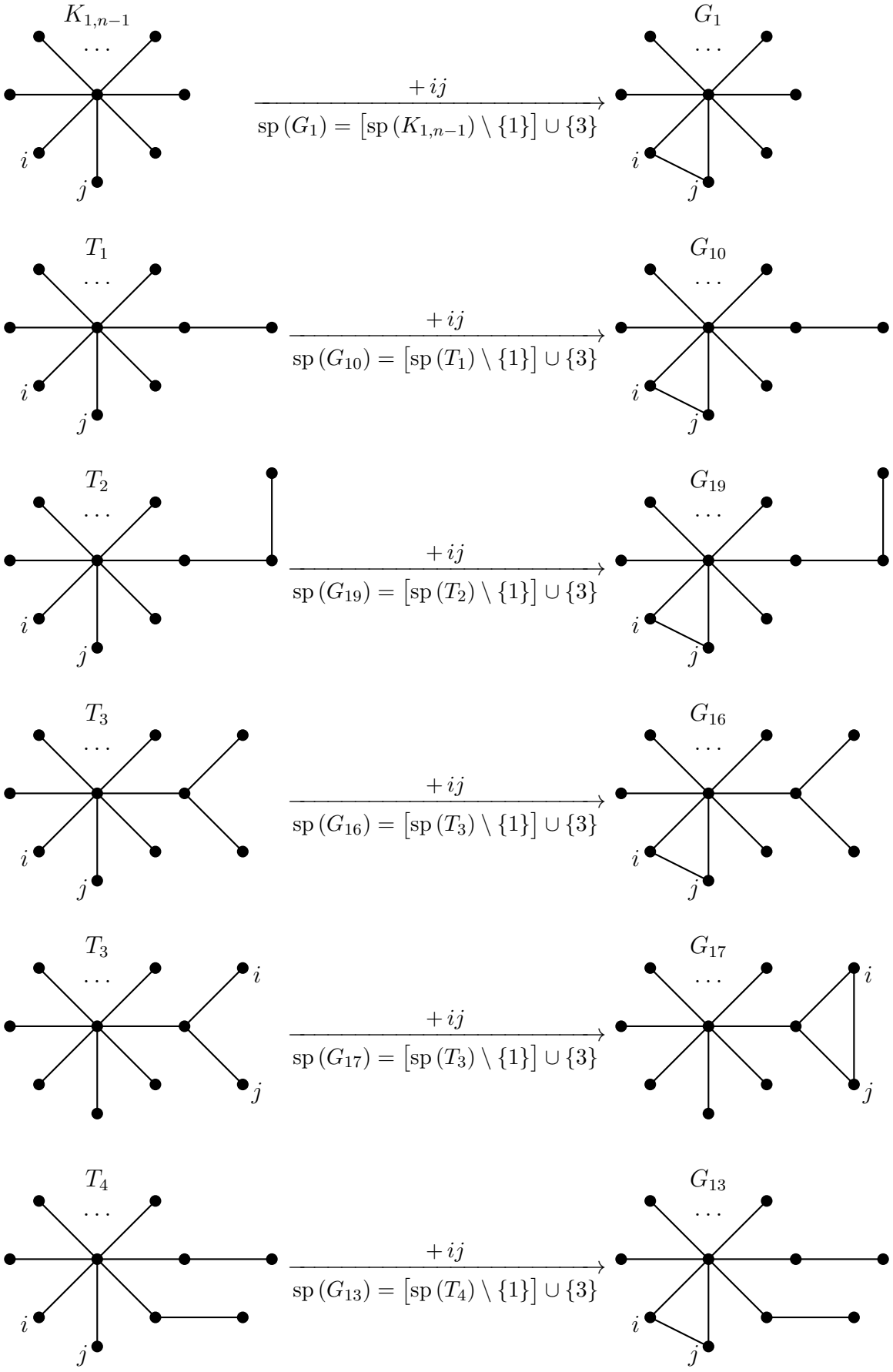


Abbildung 3.35: Beispiele für Lemma 3.43 auf $n \geq 8$ Knoten

4 Maximierung des zweitkleinsten Eigenwertes durch Hinzufügen mehrerer Kanten

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (N, E)$. Es ist allzu natürlich, die Frage aus Abschnitt 3 nach der optimalen Kante $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$, welche $\lambda_2(G + ij)$ maximiert, auf mehrere Kanten auszuweiten. Was passiert mit der algebraischen Konnektivität, wenn dem Graphen G eine Menge von Kanten $\widetilde{E} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E$ hinzugefügt wird? Wie zeichnet sich eine $\lambda_2(G + \widetilde{E})$ maximierende Wahl von $\widetilde{E}$ unter zu formulierenden Restriktionen ab? Die nachfolgenden Ausführungen setzen sich zum Ziel, einen kurzen Einstieg in diese Problemstellungen zu vollziehen, um erste Mechanismen zu erkennen und ein Gefühl für die Schwierigkeiten beim Auffinden von Lösungen zu erhalten. So werden zwei ausgewählte Optimierungsprobleme in Abschnitt 4.1 mathematisch erfasst und Abschnitt 4.2 zeigt, dass diese Probleme schon für die einfache Graphenklasse der Sterne nicht mit Angabe einer analytischen Formel lösbar sind.

4.1 Formulierungen des Optimierungsproblems

Aus Abschnitt 2.3 ist $L(G + ij) = L(G) + E_{ij}$ mit $E_{ij} = L(G - E + ij)$ bekannt, das heißt $L(G + \widetilde{E}) = L(G) + \sum_{ij \in \widetilde{E}} E_{ij}$ und über (2.9) ergibt sich die Optimierungsaufgabe

$$
\begin{aligned}
\max_{\widetilde{E}} \lambda_2(G + \widetilde{E}) &= \max_{\widetilde{E}} \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ \langle x, \mathbf{1} \rangle = 0}} \langle L(G + \widetilde{E})\, x, x \rangle \\
&= \max_{\widetilde{E}} \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ \langle x, \mathbf{1} \rangle = 0}} \left[\langle L(G)\, x, x \rangle + \left\langle \sum_{ij \in \widetilde{E}} E_{ij}\, x, x \right\rangle \right] \\
&= \max_{\widetilde{E}} \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ \langle x, \mathbf{1} \rangle = 0}} \left[\langle L(G)\, x, x \rangle + \sum_{ij \in \widetilde{E}} \langle E_{ij}\, x, x \rangle \right] \qquad (4.1) \\
&= \max_{\widetilde{E}} \min_{\substack{\|x\|_2 = 1 \\ \langle x, \mathbf{1} \rangle = 0}} \left[\langle L(G)\, x, x \rangle + \sum_{ij \in \widetilde{E}} (x_i - x_j)^2 \right] \\
\text{s. t.} \quad & \quad \text{Restriktionen an } \widetilde{E} \subseteq \tbinom{N}{2} \setminus E \text{ bzw. } \lambda_2(G + \widetilde{E})
\end{aligned}
$$

als NP-schwere Verallgemeinerung des Problems (3.1) [53]. Für $\lambda_2(G + \widetilde{E})$ sind im Gegensatz zu Satz 3.1 und $\lambda_2(G + ij)$ keine guten Schranken in Abhängigkeit der Eigenwerte von G zu erwarten, denn gilt $\operatorname{rg}\left(\sum_{ij \in \widetilde{E}} E_{ij}\right) = r$, so liefert Korollar 2.20 die Ungleichungen $\lambda_k(G) \leq \lambda_{k+r}(G + \widetilde{E}) \leq \lambda_{k+2r}(G)$ für $k = 1, 2, \ldots, n - 2r$. Wegen $k + r = 2 \Leftrightarrow k = r = 1$ ergibt dies keine Aussage zu $\lambda_2(G + \widetilde{E})$ im Fall $r > 1 \Leftrightarrow |\widetilde{E}| > 1$. Weiterhin zeigt Korollar 2.20 genau dann keine Ungleichungen für einen beliebigen Eigenwert von $G + \widetilde{E}$, wenn $n - 2r < 1 \Leftrightarrow r > \frac{n+1}{2}$ ist, was im Allgemeinen vermittels $1 \leq r \leq n - 1$ auftreten wird. Via Korollar 2.19 und Korollar 3.40 ist lediglich

$$\lambda_k(G) \leq \lambda_k(G + \widetilde{E}) \leq n, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

festzustellen. Nun sind unterschiedliche, das Problem (4.1) präzisierende Formulierungen denkbar. Hierbei soll der Fokus auf zwei Fragestellungen (a) aus [53] und (b) aus [22] gelegt werden:

(a) Wie lautet die minimale Kardinalität $m = |\widetilde{E}|$ einer Kantenmenge $\widetilde{E} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E$, so dass $\lambda_2(G + \widetilde{E}) > a$ für den Graphen $G = (N, E)$ und ein reelles $a \geq \lambda_2(G)$ gilt?

(b) Es sei $\widetilde{E} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E$ eine Menge von Kantenkandidaten mit $|\widetilde{E}| = m > 1$. An welchen Stellen sollen dem Graphen $G = (N, E)$ genau $1 \leq b \leq m$ verschiedene Kanten aus $\widetilde{E}$ hinzugefügt werden, um die algebraische Konnektivität zu maximieren?

Die Frage (b) bezeichnet für $\widetilde{E} = \binom{N}{2} \setminus E$ und $b = 1$ das bisher in dieser Arbeit behandelte Problem aus Abschnitt 3. Ihre weniger interessanten Grenzfälle führen über $\widetilde{E} = \binom{N}{2} \setminus E$ und $b = m$ auf $G + \widetilde{E} \cong K_n$ und via $b = m - 1$ zu $G + \widetilde{E} \cong K_n - ij$ mit einer beliebigen Kante $ij \in \binom{N}{2}$. Korollar 3.40 besagt $\lambda_2(K_n) = n$ und über $K_n - ij \cong K_{1,\ldots,1,2}$ liefert Korollar 3.41 gerade $\lambda_2(K_n - ij) = n - 2 \ \forall ij \in \binom{N}{2}$. Somit ist eine spezifische Kantenwahl für $b = m$ bzw. $b = m - 1$ ohne Belang.

Analog zu den Untersuchungen von Ghosh und Boyd in [22, Gleichung (3)] lässt sich (b) mit einer Teilmenge $\overline{E} \subseteq \widetilde{E}$ von b gewählten Kantenkandidaten aus einer fest vorgegebenen Menge $\widetilde{E} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E$ und einem charakteristischen Vektor $z = (z_{ij})_{ij \in \widetilde{E}} \in M_{1,m}\big(\{0,1\}\big)$,

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } ij \in \overline{E}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

als ein binäres kombinatorisches Optimierungsproblem darstellen:

$$\begin{aligned} &\max_{\overline{E}} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\langle L(G)\, x, x \rangle + \sum_{ij \in \overline{E}} (x_i - x_j)^2 \right] \ \Leftrightarrow \ \max \ \lambda_2 \Big(L(G) + \sum_{ij \in \widetilde{E}} z_{ij}\, E_{ij} \Big) \\ &\text{s.t.} \quad \|x\|_2 = 1, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}^\top z = b, \\ &\qquad\ \ \mathbf{1}^\top x = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ z \in \{0,1\}^m. \\ &\qquad\ \ |\overline{E}| = b, \\ &\qquad\ \ \overline{E} \subseteq \widetilde{E} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Eine näherungsweise Lösung von (4.2) erfordert im schlechtesten Fall hohen Rechenaufwand. Zur Erleichterung wird die teure Restriktion $z \in \{0,1\}^m$ zu $z \in [0,1]^n$ aufgelockert und die zulässige Menge vergrößert. Das Ergebnis ist eine konvexe Relaxierung des Problems (4.2), welche äquivalent in ein semidefinites Programm umformuliert werden kann:

Beobachtung 4.1 (vgl. z. B. [22, Gleichungen (5) und (6)])

Für $G = (N, E)$ mit $\widetilde{E} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E$, $z \in [0,1]^n$, $L(z) \coloneqq L(G) + \sum_{ij \in \widetilde{E}} z_{ij}\, E_{ij}$ gilt

$$\begin{aligned} &\max \ \lambda_2(L(z)) \quad \Leftrightarrow \quad \max \ s \\ &\text{s.t.} \ \ \mathbf{1}^\top z = b, \qquad\quad \text{s.t.} \ \ L(z) - s\,(I - \tfrac{1}{n}\,\mathbf{1}\,\mathbf{1}^\top) \in S_n^+, \\ &\qquad z \in [0,1]^n \qquad\qquad\ \ \mathbf{1}^\top z = b, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ z \in [0,1]^n \end{aligned} \tag{4.3}$$

und (4.3) zeigt sowohl eine konvexe als auch eine semidefinite Relaxierung von (4.2).

Beweis:

Die Zielfunktion des Problems auf der linken Seite von (4.3) ist konkav, denn (2.9) besagt

$$\lambda_2(L(z)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto \min_{x \in \mathbb{R}^n} \big\{ \langle L(z)\, x, x \rangle : \|x\|_2 = 1, \langle x, \mathbf{1} \rangle = 0 \big\}$$

und damit tritt $\lambda_2(L(z))$ als punktweises Minimum einer Familie affiner Funktionen auf. Das linke Problem (4.3) besitzt ausschließlich lineare Nebenbedingungen und offenbar ist ein für (4.2) zulässiger Punkt ebenso zulässig für die linke Aufgabe (4.3), womit diese eine konvexe Relaxierung von (4.2) beschreibt. Zur Einsicht der Äquivalenz in (4.3) verbleibt

$$\max \lambda_2(L(z)) \;\Leftrightarrow\; \max\left\{s : L(z) - s\,(I - \tfrac{1}{n}\,\mathbf{1}\,\mathbf{1}^\top) \in S_n^+\right\}$$

zu verifizieren. Da $\mathbf{1}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_1(L(z)) = 0$ bzw. $L(z)\,\mathbf{1} = 0$ ist, gilt

$$(L(z) - s\,I + \tfrac{s}{n}\,\mathbf{1}\,\mathbf{1}^\top)\,\mathbf{1} = 0 - s\,I\,\mathbf{1} + \tfrac{s}{n}\,\mathbf{1}\,\mathbf{1}^\top\mathbf{1} = -s\,\mathbf{1} + s\,\mathbf{1} = 0.$$

Es sei $y \neq 1$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \neq 0$ von $L(z)$ mit $\langle y, \mathbf{1}\rangle = 0$, dann folgt

$$\begin{aligned} L(z) - s\,I + \tfrac{s}{n}\,\mathbf{1}\,\mathbf{1}^\top \in S_n^+ \;&\Leftrightarrow\; 0 \leq y^\top (L(z) - s\,I + \tfrac{s}{n}\,\mathbf{1}\,\mathbf{1}^\top)\,y \\ &\qquad = y^\top L(z)\,y - s\,y^\top I\,y + 0 = y^\top(\lambda - s)y \\ &\Leftrightarrow\; \lambda \geq s \\ &\Leftrightarrow\; 0 = \lambda_1(L(z)),\;\; s \leq \lambda_k(L(z)) \;\; \forall\, k \in N \setminus \{1\}, \end{aligned}$$

das heißt, der Optimalwert des Problems $\max\left\{s : L(z) - s\,(I - \frac{1}{n}\,\mathbf{1}\,\mathbf{1}^\top) \in S_n^+\right\}$ ist gerade $s^* = \lambda_2(L(z))$. □

Die Relaxierungen (4.3) liefern obere Schranken für den Optimalwert von (4.2). Diese Schranken lassen sich im Vergleich zu einer direkten Lösung des Problems (4.2) mit bedeutend weniger Rechenaufwand erhalten. Konvexe Relaxierungen können beispielsweise mit bekannten Subgradienten-Verfahren bearbeitet werden [22, IV. Examples]. Für semidefinite Relaxierungen sind Innere-Punkte-Verfahren oder alternative Lösungsalgorithmen sinnvoll, vgl. z. B. [34].

Falls $\alpha(\lambda_2(G)) = p > 1$ gilt, so bewirkt das Hinzufügen einer einzigen Kante zu G nach Korollar 3.2 keine Vergrößerung der algebraische Konnektivität. Was passiert in dieser Situation, wenn mehr als eine Kante zu G hinzugefügt wird? Eine Verallgemeinerung von Korollar 3.2 ist von großem Interesse, denn damit könnte das Problem (a) für $a = \lambda_2(G)$ und $\alpha(\lambda_2(G)) = p > 1$ gelöst werden. Zu diesem Zweck ist eine Hilfsaussage notwendig:

Lemma 4.2 (Householder-Transformation, vgl. z. B. [48, Theorem 11.23])

Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_2 = \|y\|_2 \neq 0$ und $u := \frac{x-y}{\|x-y\|_2}$ existiert eine orthogonale Matrix $H := I - 2\,u\,u^\top \in S_n$, die $Hx = y$ erfüllt und Householder-Matrix genannt wird.

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} H^\top &= (I - 2\,u\,u^\top)^\top = I - 2\,(u\,u^\top)^\top = I - 2\,u\,u^\top = H, \\ H^\top H &= H\,H = H\,H^\top = (I - 2\,u\,u^\top)\,(I - 2\,u\,u^\top) \quad = I - 4\,u\,u^\top + 4\,u\,u^\top u\,u^\top \\ &\qquad = I - 4\,u\,u^\top + 4\,u\,u^\top = I \end{aligned}$$

und damit $H^2 = I$ bzw. $H^{-1} = H$ für jede Householder-Matrix. Nun kann Korollar 3.2 auf das Hinzufügen von mehr als einer Kante erweitert werden:

Korollar 4.3 (vgl. z. B. [7, 2. Deflation])

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (N, E)$ mit $n \geq 4$, $\alpha(\lambda_2(G)) = p > 1$ und $\left|\binom{N}{2} \setminus E\right| \geq p$. Es existiert eine Menge $\widetilde{E} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E$, $|\widetilde{E}| = p$ von genau p verschiedenen Kanten, so dass $\lambda_2(G + \widetilde{E}) > \lambda_2(G)$ gilt. Darüber hinaus lässt das Hinzufügen von beliebigen $p-1$ oder weniger Kanten aus $\binom{N}{2} \setminus E$ zu G die algebraische Konnektivität unberührt.

Beweis:

Sind $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ die Eigenwerte von G mit $\alpha(\lambda_2) = p > 1$ und $\widetilde{\lambda}_1 \leq \widetilde{\lambda}_2 \leq \ldots \leq \widetilde{\lambda}_n$ die Eigenwerte von $G + ij$ für eine Kante $ij \in \binom{N}{2} \setminus E$, so ist $\alpha(\lambda_1) = \alpha(0) = 1$ und aus Satz 3.1 folgt

$$\begin{aligned} &\lambda_2 = \widetilde{\lambda}_2 = \lambda_3 = \widetilde{\lambda}_3 = \ldots = \widetilde{\lambda}_p = \underbrace{\lambda_{p+1}}_{\leq \widetilde{\lambda}_{p+1}} < \underbrace{\lambda_{p+2}}_{\geq \widetilde{\lambda}_{p+1}} \leq \widetilde{\lambda}_{p+2} \\ \Rightarrow \quad &\widetilde{\lambda}_2 = \lambda_2, \quad \alpha(\widetilde{\lambda}_2) = \begin{cases} p & \text{wenn } \lambda_{p+1} = \widetilde{\lambda}_{p+1}, \\ p-1 & \text{wenn } \lambda_{p+1} < \widetilde{\lambda}_{p+1}, \end{cases} \end{aligned}$$

das heißt, das $(p-1)$-malige Hinzufügen einer stets anderen Kante aus $\binom{N}{2} \setminus E$ resultiert in einem Graphen, dessen algebraische Konnektivität genau λ_2 mit $\alpha(\lambda_2) \geq 1$ beträgt. Offenbar ist dies auch für das Hinzufügen von weniger als $p-1$ Kanten der Fall. Daher bleibt zu zeigen, dass es eine Kantenmenge $\widetilde{E} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E$, $|\widetilde{E}| = p$ mit $\lambda_2(G + \widetilde{E}) > \lambda_2(G)$ gibt. Die nachfolgenden Ausführungen wurden aus [7, 2. Deflation] entlehnt:

Für $E_{ij} = L(G - E + ij)$ wie in Abschnitt 2.3 ist $E_{ij} = e_{ij}\, e_{ij}^\top$, wobei $e_{ij} \in M_{n,1}\big(\{-1, 0, 1\}\big)$ den Vektor beschreibt, dessen i-ter Eintrag gleich Eins, j-ter Eintrag gleich minus Eins und alle restlichen Einträge gleich Null sind. Satz 2.15 liefert eine orthogonale Matrix $V \in M_n(\mathbb{R})$ mit $L(G) = V\,\Lambda\,V^\top$, $\Lambda = (\lambda_i\,\delta_{ij})_{i,j=1}^n$, deren Spalten gerade die Eigenvektoren $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ von G bezeichnen, das heißt

$$\begin{aligned} L(G + ij) &= L(G) + E_{ij} = L(G) + e_{ij}\, e_{ij}^\top = V\,\Lambda\,V^\top + e_{ij}\, e_{ij}^\top \\ &= V\,\Lambda\,V^\top + V \underbrace{V^\top e_{ij}}\, (V\,V^\top e_{ij})^\top \\ &\qquad\qquad = (y_1^i - y_1^j, y_2^i - y_2^j, \ldots, y_n^i - y_n^j)^\top =: b_{ij} = (b_{ij}^1, b_{ij}^2, \ldots, b_{ij}^n)^\top \\ &= V\,(\Lambda + b_{ij}\, b_{ij}^\top)\, V^\top. \end{aligned}$$

Wegen $\Lambda + b_{ij}\, b_{ij}^\top \in S_n$ existiert erneut nach Satz 2.15 eine orthogonale Matrix $\widetilde{V} \in M_n(\mathbb{R})$ mit $\Lambda + b_{ij}\, b_{ij}^\top = \widetilde{V}\,\widetilde{\Lambda}\,\widetilde{V}^\top$, $\widetilde{\Lambda} = (\widetilde{\lambda}_i\,\delta_{ij})_{i,j=1}^n$ und $L(G + ij) = V\,\widetilde{V}\,\widetilde{\Lambda}\,(V\,\widetilde{V})^\top$. Da die Matrix $V\,\widetilde{V}$ via $(V\,\widetilde{V})\,(V\,\widetilde{V})^\top = V\,\widetilde{V}\,\widetilde{V}^\top V^\top = I = \widetilde{V}^\top V^\top V\,\widetilde{V} = (V\,\widetilde{V})^\top (V\,\widetilde{V})$ orthogonal ist, stellen die Eigenwerte $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_n$ von $\Lambda + b_{ij}\, b_{ij}^\top$ gleichfalls die Eigenwerte von $L(G + ij)$ dar. Falls nun $b_{ij}^2 = y_2^i - y_2^j = 0$ gilt, so besagt Lemma 3.10 (i), dass die algebraischen Konnektivitäten $\lambda_2 = \widetilde{\lambda}_2$ von G und $G + ij$ übereinstimmen. Alternativ ist dies mittels $e_2 \coloneqq (0, 1, 0, \ldots, 0)^\top \in M_{n,1}\big(\{0, 1\}\big)$ sowie

$$b_{ij}^2 = 0 \;\Rightarrow\; (\Lambda + b_{ij}\, b_{ij}^\top)\, e_2 = \Lambda\, e_2 + b_{ij}\, b_{ij}^\top\, e_2 = \lambda_2\, e_2 + b_{ij}\, b_{ij}^2 = \lambda_2\, e_2 \tag{4.4}$$

einzusehen. Es seien $\alpha(\lambda_2) = p > 1$, $V_1 \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ die Matrix, deren Spalten $y_2, y_3, \ldots, y_{p+1}$ den Eigenunterraum U_{λ_2} aufspannen und $V_2 \in M_{n,n-p}(\mathbb{R})$ die Matrix mit den übrigen Spalten $y_1, y_{p+2}, \ldots, y_n$. Nach Permutation der Spalten von V zu $y_2, y_3, \ldots, y_{p+1}, y_1, y_{p+2}, \ldots, y_n$ darf $V = (V_1, V_2)$ geschrieben werden und eine geeignete Umsortierung der Eigenwerte λ_k auf der Hauptdiagonalen von Λ führt zu $L(G) = V\,\Lambda\,V^\top = (V_1, V_2)\,\Lambda\,(V_1, V_2)^\top$ bzw.

$$b_{ij} = V^\top e_{ij} = (V_1, V_2)^\top e_{ij} = \begin{pmatrix} V_1^\top e_{ij} \\ V_2^\top e_{ij} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Anschließend soll V_1 durch eine Matrix $\overline{V}_1 \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ ersetzt werden. Die einzigen Forderungen an V_1 sind $V_1^\top V_1 = I$, $V_1^\top V_2 = 0$ und ebendiese muss $\overline{V}_1$ erfüllen. Laut Lemma 4.2 existiert eine orthogonale Householder-Matrix $H \in S_p$ mit $H\,(V_1^\top e_{ij}) = -\|V_1^\top e_{ij}\|_2\, e_1$ und $e_1 \coloneqq (1, 0, \ldots, 0)^\top \in M_{p,1}\big(\{0,1\}\big)$. Für $\overline{V}_1 \coloneqq V_1\, H^\top$ gilt tatsächlich

$$\begin{aligned}
\overline{V}_1^\top \overline{V}_1 &= (V_1\, H^\top)^\top V_1\, H^\top = H\, V_1^\top V_1\, H^\top = H\, H^\top = I,\\
\overline{V}_1^\top V_2 &= (V_1\, H^\top)^\top V_2 = H\, V_1^\top V_2 = 0,
\end{aligned}$$

so dass V_1 durch $\overline{V}_1$ ersetzt werden kann. Dies resultiert aufgrund von

$$\overline{V}_1^\top e_{ij} = (V_1\, H^\top)^\top e_{ij} = H\, V_1^\top e_{ij} = -\|V_1^\top e_{ij}\|_2\, e_1$$

und (4.5) in

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{V}_1^\top e_{ij} \\ V_2^\top e_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\|V_1^\top e_{ij}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V_2^\top e_{ij} \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \\ \} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \text{ Eintrag} \\ p-1 \text{ Einträge}\,. \\ n-p \text{ Einträge} \end{matrix}$$

Es darf nun $-\|V_1^\top e_{ij}\|_2 < 0$ bzw. $V_1^\top e_{ij} = \big(y_2^i - y_2^j, y_3^i - y_3^j, \ldots, y_{p+1}^i - y_{p+1}^j\big)^\top$ ungleich zum Nullvektor angenommen werden, denn z. B. $y_2^i - y_2^j = 0\ \forall\, i, j \in N$ wäre äquivalent zu $y_2 = c\,\mathbf{1}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bzw. $\langle y_2, y_1\rangle = c\,\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = c\,n \neq 0$. $\lightning$

Somit wurden $p-1$ Nullen in b_{ij} erzeugt und (4.4) lässt λ_2 als den zweitkleinsten Eigenwert von $G+ij$ mit $\alpha\,(\lambda_2) = p-1$ erkennen. Es existiert daher eine dem Graphen G hinzuzufügende Kante ij, welche die algebraische Vielfachheit $p > 1$ von $\lambda_2\,(G)$ um Eins verringert und $\lambda_2\,(G+ij) = \lambda_2\,(G)$ mit $\alpha\,(\lambda_2\,(G+ij)) = p-1$ bewirkt. Eine p-malige Wiederholung dieser Householder-Prozedur liefert eine Menge $\widetilde{E}$ von p verschiedenen Kanten, die nach dem Hinzufügen zu G einen Graphen $G + \widetilde{E}$ mit $\lambda_2\,(G + \widetilde{E}) > \lambda_2\,(G)$ konstruieren. □

4.2 Sterne

Im vorangegangenen Abschnitt 4.1 wurden die Fragestellungen (a) und (b) betrachtet und Optimierungsprobleme formuliert. Nachfolgend sollen diese Probleme für einen Stern $K_{1,n-1} = (N, E)$ auf n Knoten mit Zentrum z untersucht werden, vgl. Abbildung 3.15. Zur Bestimmung von $\lambda_2\,(K_{1,n-1}+\widetilde{E})$ für spezielle Kantenmengen $\widetilde{E} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E$ ist folgende Aussage hilfreich:

Lemma 4.4 (vgl. z. B. [50, Theorem 2.1])

Für zwei Graphen $G_1 = (N_1, E_1)$, $G_2 = (N_2, E_2)$ mit $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, $|N_1| = r$, $|N_2| = s$, $r \geq 1$, $s \geq 1$ seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_r$ die Eigenwerte von G_1 und $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_s$ die Eigenwerte von G_2. Bezeichnet $G \coloneqq \overline{\overline{G}_1 \dot{+} \overline{G}_2}$ jenen Graphen, der auf den $r+s$ Knoten aus $N_1 \cup N_2$ entsteht, wenn dem Graphen $G_1 \dot{+} G_2$ derart neue Kanten hinzugefügt werden, dass jeder Knoten von G_1 adjazent zu jedem Knoten von G_2 ist, so gilt

$$\operatorname{sp}(G) = \{0, \lambda_2 + s, \lambda_3 + s, \ldots, \lambda_r + s, \mu_2 + r, \mu_3 + r, \ldots, \mu_s + r, r + s\}.$$

Beweis:

Lemma 3.39 besagt

$$\operatorname{sp}(\overline{G}_1) = \{0, r-\lambda_2, r-\lambda_3, \ldots, r-\lambda_r\}, \quad \operatorname{sp}(\overline{G}_2) = \{0, s-\mu_2, s-\mu_3, \ldots, s-\mu_s\}$$

und Beobachtung 2.23 liefert

$$\begin{aligned}\operatorname{sp}(\overline{G}_1 \dot{+} \overline{G}_2) &= \operatorname{sp}(\overline{G}_1) \cup \operatorname{sp}(\overline{G}_2) \\ &= \{0, 0, r-\lambda_2, r-\lambda_3, \ldots, r-\lambda_r, s-\mu_2, s-\mu_3, \ldots, s-\mu_s\},\end{aligned}$$

das heißt

$$\begin{aligned}\operatorname{sp}\left(\overline{\overline{G}_1 \dot{+} \overline{G}_2}\right) = \{&0, r+s-0, \\ &r+s-(r-\lambda_2), r+s-(r-\lambda_3), \ldots, r+s-(r-\lambda_r), \\ &r+s-(s-\mu_2), r+s-(s-\mu_3), \ldots, r+s-(s-\mu_s)\} \\ = \{&0, \lambda_2+s, \lambda_3+s, \ldots, \lambda_r+s, \mu_2+r, \mu_3+r, \ldots, \mu_s+r, r+s\}\end{aligned}$$

erneut nach Lemma 3.39. □

Jeder Stern lässt sich durch die Operation aus Lemma 4.4 konstruieren: Zur Vereinfachung der Notation sei $O_{n-1} \coloneqq (N \setminus \{z\}, \emptyset)$ die disjunkte Vereinigung von genau $n-1$ isolierten Knoten. Wird nun $G_1 \coloneqq O_{n-1}$ bzw. $G_2 \coloneqq (\{z\}, \emptyset)$ für das Zentrum z des Sterns gesetzt, so ist $\overline{\overline{O}_{n-1} \dot{+} z} \cong \overline{\overline{O}_{n-1} \dot{+} \overline{K}_1} \cong \overline{K_{n-1} \dot{+} K_1} \cong K_{1,n-1}$. Einem Stern können höchstens $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ verschiedene Kanten aus $\binom{N}{2} \setminus E$ hinzugefügt werden, denn

$$\begin{aligned}\left|\binom{N}{2} \setminus E\right| &= |E(K_n)| - |E(K_{1,n-1})| = \tfrac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) \\ &= |E(K_{n-1})| = |E(\overline{O}_{n-1})|\end{aligned}$$

und jede dieser Kanten wird zwei Knoten von O_{n-1} verbinden, vgl. Abbildung 4.1:

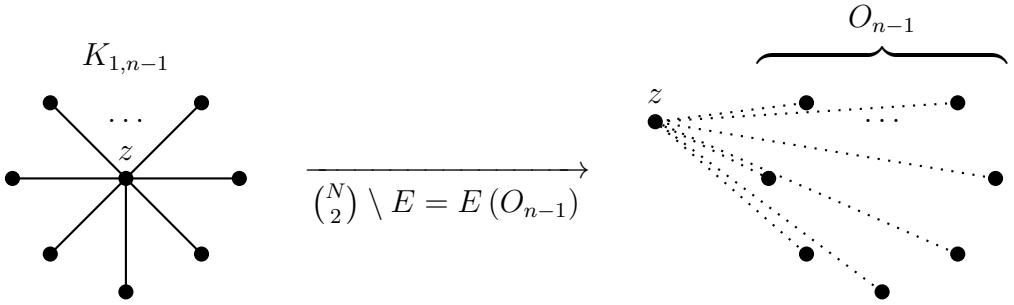


Abbildung 4.1: Das Hinzufügen einer Kante aus $\binom{N}{2} \setminus E$ zu $K_{1,n-1} = (N, E)$ verbindet zwei Knoten von O_{n-1}.

Daraus folgt $K_{1,n-1} + \widetilde{E} \cong \overline{K_{n-1} \dot{+} K_1} + \widetilde{E} \cong \overline{K_{n-1} - \widetilde{E} \dot{+} K_1} \cong \overline{\overline{O_{n-1} + \widetilde{E}} \dot{+} z}$ und Lemma 4.4 verifiziert via $G_1 \coloneqq O_{n-1} + \widetilde{E}$ bzw. $G_2 \coloneqq (\{z\}, \emptyset)$ gerade

$$\begin{aligned}&\operatorname{sp}(K_{1,n-1} + \widetilde{E}) = \left\{0, \lambda_2(O_{n-1} + \widetilde{E}) + 1, \ldots, \lambda_{n-1}(O_{n-1} + \widetilde{E}) + 1, n\right\} \\ \Rightarrow\ &\lambda_2(K_{1,n-1} + \widetilde{E}) = \lambda_2(O_{n-1} + \widetilde{E}) + 1, \ \ \widetilde{E} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E. \qquad (4.6)\end{aligned}$$

Die Beziehung (4.6) zieht nun einige Feststellungen über das Hinzufügen mehrerer Kanten

zu einem Stern nach sich. Eine denkbar schlechteste Methode lautet:

Beobachtung 4.5

Es existieren maximal $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ verschiedene Kanten aus $\binom{N}{2} \setminus E$, die einem Stern $K_{1,n-1} = (N, E)$ auf $n \geq 4$ Knoten hinzugefügt werden können, ohne dessen algebraische Konnektivität zu erhöhen.

Beweis:

Vermittels Beobachtung 3.25 gilt $\lambda_2(K_{1,n-1}) = 1$ und (4.6) sowie die Ausführungen aus Abschnitt 2.4 zeigen

$$\begin{aligned} \lambda_2(K_{1,n-1} + \widetilde{E}) = \lambda_2(K_{1,n-1}) &\Leftrightarrow \lambda_2(O_{n-1} + \widetilde{E}) = 0 \\ &\Leftrightarrow O_{n-1} + \widetilde{E} \text{ ist unzusammenhängend.} \end{aligned}$$

Ein unzusammenhängender Graph maximaler Kantenanzahl auf $n-1$ Knoten muss isomorph zu $K_{n-2} \dot{+} v$ mit einem isolierten Knoten v sein, das heißt, diejenige Kantenmenge $\widetilde{E}_{\max}$ maximaler Kardinalität, welche $O_{n-1} + \widetilde{E}_{\max}$ unzusammenhängend lässt, bewirkt $O_{n-1} + \widetilde{E}_{\max} \cong K_{n-2} \dot{+} v$ und somit über

$$|\widetilde{E}_{\max}| = |E(O_{n-1} + \widetilde{E}_{\max})| = |E(K_{n-2} \dot{+} v)| = |E(K_{n-2})| = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

die Behauptung. □

Abbildung 4.2 präsentiert eine maximale Wahl von zehn Kanten, die dem $K_{1,6}$ hinzugefügt werden können und dessen algebraische Konnektivität unberührt lassen:

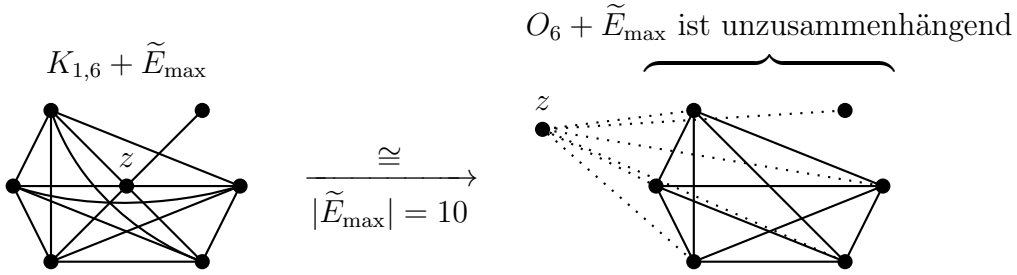


Abbildung 4.2: $\lambda_2(K_{1,6} + \widetilde{E}_{\max}) = \lambda_2(K_{1,6}) = 1$ mit $|\widetilde{E}_{\max}| = 10$

Von größerem Interesse sind jedoch Kantenmengen $\widetilde{E}$, die in $\lambda_2(K_{1,n-1}+\widetilde{E}) > \lambda_2(K_{1,n-1})$ resultieren. Nach Beobachtung 3.25 gilt $\alpha(\lambda_2(K_{1,n-1})) = n-2$ und die nachstehende Aussage ist eine direkte Konsequenz von Korollar 4.3:

Beobachtung 4.6

Gegeben sei ein Stern $K_{1,n-1} = (N, E)$ auf $n \geq 4$ Knoten, dann führt eine beliebige Wahl von $n-3$ oder weniger Kanten $\widetilde{E} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E$ zu $\lambda_2(K_{1,n-1} + \widetilde{E}) = \lambda_2(K_{1,n-1}) = 1$.

Alternativ folgt Beobachtung 4.6 aus der Tatsache, dass ein Graph O_{n-1} niemals zusammenhängend sein kann, wenn ihm $n-3$ beliebige Kanten hinzugefügt werden, vgl. Beobachtung 2.12 (iii) ⇔ (v). Laut Korollar 4.3 und $\alpha(\lambda_2(K_{1,n-1})) = n-2$ muss es mindestens $n-2$ verschiedene Kanten $\widetilde{E}$ aus $\binom{N}{2} \setminus E$ geben, die $\lambda_2(K_{1,n-1}+\widetilde{E}) > \lambda_2(K_{1,n-1})$ verursachen. Der nächste Satz löst die Optimierungsprobleme (4.4) für dortiges $G = K_{1,n-1}$, $a = \lambda_2(K_{1,n-1}) = 1$ und (4.2) für dortiges $G = K_{1,n-1}$, $\widetilde{E} = \binom{N}{2} \setminus E$, $b = n-2$:

Satz 4.7

Es bezeichne $K_{1,n-1} = (N, E)$ einen Stern auf $n \geq 3$ Knoten, dann existiert eine Menge $\widetilde{E}_{\min} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E$ von $n-2$ Kanten, die gerade $\lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}_{\min}\right) > \lambda_2\left(K_{1,n-1}\right)$ bewirkt und $\lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}_{\min}\right) > \lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}\right)$ für alle $\widetilde{E} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E$ mit $|\widetilde{E}| < |\widetilde{E}_{\min}|$ erfüllt. Jede Kantenwahl $\widetilde{E}^*_{\min} \subseteq \binom{N}{2} \setminus E$, $|\widetilde{E}^*_{\min}| = n-2$, die in $K_{1,n-1} + \widetilde{E}^*_{\min} \cong K_{1,1,n-2}$ resultiert, ist optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität, das heißt

$$
\begin{aligned}
2 = \lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}^*_{\min}\right) > \lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}_{\min}\right) \geq 1 \quad \forall\, \widetilde{E}^*_{\min}, \widetilde{E}_{\min} \subseteq \tbinom{N}{2} \setminus E,\\
|\widetilde{E}^*_{\min}| = |\widetilde{E}_{\min}| = n-2,\\
K_{1,n-1} + \widetilde{E}^*_{\min} \cong K_{1,1,n-2},\\
K_{1,n-1} + \widetilde{E}_{\min} \ncong K_{1,1,n-2}.
\end{aligned}
$$

Beweis:

Der erste Teil der Aussage folgt direkt aus Beobachtung 4.6 und (4.6), indem O_{n-1} genau $n-2$ Kanten $\widetilde{E}_{\min}$ derart hinzugefügt werden, dass $O_{n-1} + \widetilde{E}_{\min}$ einen Baum darstellt, vgl. Beobachtung 2.12 (i) $\Leftrightarrow$ (iii), denn in diesem Fall ist

$$
\lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}_{\min}\right) = \underbrace{\lambda_2\left(O_{n-1} + \widetilde{E}_{\min}\right)}_{>0} + 1 > 1 = \lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}\right) \quad \forall\, \widetilde{E} : |\widetilde{E}| < n-2.
$$

Beim Hinzufügen einer Menge $\widetilde{E}_{\min}$ von $n-2$ Kanten zu $K_{1,n-1}$ kann $O_{n-1} + \widetilde{E}_{\min}$ zusammenhängend sein oder nicht. Ist $O_{n-1} + \widetilde{E}_{\min}$ unzusammenhängend, so führt dies zu keiner Veränderung der algebraischen Konnektivität und solche Kantenwahlen fallen auf der Suche nach $\widetilde{E}^*_{\min}$ heraus. Optimal unter allen Kantenmengen der Kardinalität $n-2$ ist somit eine Kantenmenge, die $\lambda_2\left(O_{n-1} + \widetilde{E}_{\min}\right)$ für alle Bäume $O_{n-1} + \widetilde{E}_{\min}$ maximiert. Laut Beobachtung 3.25 erfüllt jeder Baum $O_{n-1} + \widetilde{E}_{\min} \ncong K_{1,n-2}$ die Ungleichung $\lambda_2\left(O_{n-1} + \widetilde{E}_{\min}\right) < \lambda_2\left(K_{1,n-2}\right) = 1$, das heißt, es muss $O_{n-1} + \widetilde{E}^*_{\min} \cong K_{1,n-2}$ geschlussfolgert werden. Damit gilt

$$
K_{1,n-1} + \widetilde{E}^*_{\min} \cong \overline{\overline{O_{n-1} + \widetilde{E}^*_{\min}} \dot{+} \overline{K}_1} \cong \overline{\overline{K}_{1,n-2} \dot{+} K_1} \cong \overline{K_{n-2} \dot{+} K_1 \dot{+} K_1} \cong K_{1,1,n-2}
$$

und $\lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}^*_{\min}\right) = \lambda_2\left(O_{n-1} + \widetilde{E}^*_{\min}\right) + 1 = \lambda_2\left(K_{1,n-2}\right) + 1 = 2$ gemäß (4.6). □

Satz 4.7 besagt, dass die einzig optimale Strategie, einem Stern auf $n \geq 3$ Knoten genau $n-2$ Kanten hinzuzufügen und die algebraische Konnektivität zu maximieren, darin besteht, ein beliebiges Blatt des Sterns auszuwählen und dieses mit den $n-2$ übrigen Blättern durch Kanten zu verbinden. Der so entstandene Graph $K_{1,n-1} + \widetilde{E}^*_{\min}$ ist isomorph zum vollständig 3-partiten Graphen $K_{1,1,n-2}$ mit $\lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}^*_{\min}\right) = \lambda_2\left(K_{1,1,n-2}\right) = 2$ und $\alpha\left(\lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}^*_{\min}\right)\right) = \alpha\left(\lambda_2\left(K_{1,1,n-2}\right)\right) = n-3$ via Korollar 3.41, vgl. Abbildung 4.3 für beispielsweise $n = 9$:

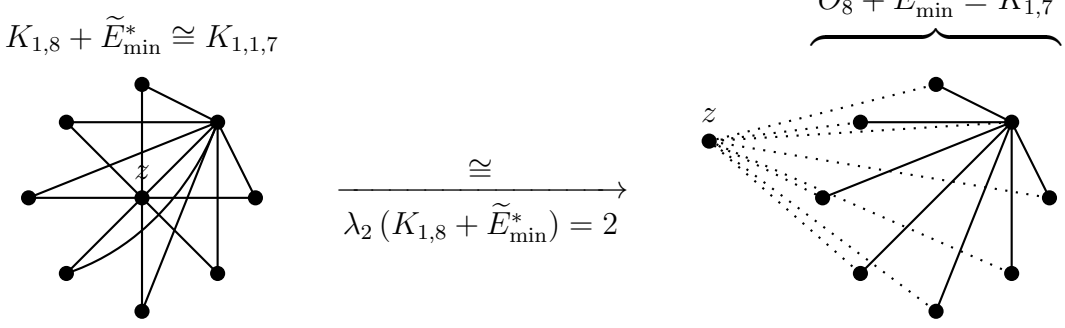


Abbildung 4.3: Optimale Wahl von sieben Kanten beim Hinzufügen zum $K_{1,8}$

Wurden nun $n-2$ Kanten einem Stern $K_{1,n-1}$ in optimaler Weise mit Hilfe von Satz 4.7 hinzugefügt und damit ein zum $K_{1,1,n-2}$ isomorpher Graph konstruiert, so sind vermittels Korollar 4.3 mindestens $n-3$ weitere Kanten notwendig, um die algebraische Konnektivität ein zweites Mal zu erhöhen. Analog zur Beweismethode von Satz 4.7 ist es optimal, diese zusätzlichen $n-3$ Kanten derart hinzuzufügen, dass ein zum $K_{1,1,1,n-3}$ isomorpher Graph mit $\lambda_2 = 3$ nach Korollar 3.41 entsteht. Diesem Graphen müssen wiederum mindestens $n-4$ Kanten zur Erhöhung des zweitkleinsten Eigenwertes hinzugefügt werden – im Idealfall auf $\lambda_2 = 4$ usw. Eine solche Fortführung der Strategie aus Satz 4.7 kann intuitiv nicht optimal für das Hinzufügen von mehr als $n-2$ Kanten zum $K_{1,n-1}$ sein, da in jedem Schritt sehr viele Kanten benötigt werden, um die algebraische Konnektivität weiter zu erhöhen. Welche Methode schlägt diese Strategie, wenn einem Stern auf n Knoten eine fest vorgegebene Anzahl von mehr als $n-2$ Kanten hinzuzufügen ist? Zur Erleichterung der nachfolgenden Ausführungen erhält die eben beschriebene Vorgehensweise eine explizite Definition:

Definition 4.8 (Sternstrategie)

Gegeben seien ein Stern $K_{1,n-1} = (N, E)$ auf $n \geq 3$ Knoten und eine natürliche Zahl $1 \leq b \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = \left|\binom{N}{2} \setminus E\right|$. Das nachstehende Verfahren heißt Sternstrategie und die damit gewählte Menge von genau b Kanten, welche einem Stern hinzugefügt werden soll, ist mit $\widetilde{E}_b^*$ zu bezeichnen:

$d := 1;$
`WHILE` $b > 0$ `DO`
  Wähle $i \in N$ mit $d_{K_{1,n-1}}(i) = d$;
  $k :=$ Anzahl nicht adjazenter Knoten von i aus N;
  `IF` $k \leq b$ `THEN`
    Verbinde i mit allen nicht adjazenten Knoten aus N;
    $b := b - l$;
    $d := d + 1$;
  `ELSE`
    Verbinde i mit b nicht adjazenten Knoten aus N;
    $b := 0$;
  `END IF`
`END DO`

Die Sternstrategie bewirkt nach Korollar 3.41 in Verbindung mit Korollar 4.3 gerade

$$
\begin{aligned}
&b \in [1, n-3] && \Rightarrow\ \lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}_b^*\right) = 1,\\
&b \in [n-2, 2n-6] && \Rightarrow\ \lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}_b^*\right) = 2,\\
&b \in [2n-5, 3n-10] && \Rightarrow\ \lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}_b^*\right) = 3,\\
&b \in [3n-9, 4n-15] && \Rightarrow\ \lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}_b^*\right) = 4,\\
&\vdots && \qquad (4.7)\\
&b \in \left[\tfrac{1}{2}(n+1)(n-4), \tfrac{1}{2}(n+1)(n-4)+1\right] && \Rightarrow\ \lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}_b^*\right) = n-3,\\
&b = \tfrac{1}{2}n(n-3) && \Rightarrow\ \lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}_b^*\right) = n-2,\\
&b = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) && \Rightarrow\ \lambda_2\left(K_{1,n-1} + \widetilde{E}_b^*\right) = n
\end{aligned}
$$

und soll nun für das Hinzufügen von mehr als $n-2$ Kanten verbessert werden, da diese Strategie laut Satz 4.7 für $n-1$ und weniger Kanten die algebraische Konnektivität eines Sterns maximiert. Zunächst sei $|\widetilde{E}| = n-1$ bzw. $b = n-1$ in (4.2) vorgegeben. Wie sind einem Stern auf n Knoten in optimaler Weise genau $n-1$ Kanten hinzuzufügen?

Definition 4.9 (Rad)

Für $n \geq 4$ bezeichnet $W_n := \overline{K_1 \dot{+} \overline{C}_{n-1}}$ ein Rad, vgl. dazu Abbildung 4.4.

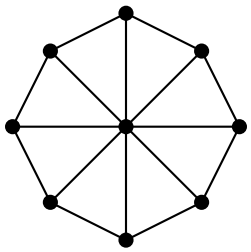


Abbildung 4.4: Das Rad W_9

Das Spektrum eines Rades ergibt sich über Lemma 4.4 aus $G_1 := K_1$ und $G_2 := C_{n-1}$:

$$\begin{aligned} & \operatorname{sp}(W_n) = \{0, \lambda_2(C_{n-1})+1, \lambda_3(C_{n-1})+1, \ldots, \lambda_{n-1}(C_{n-1})+1, n\} \\ \Rightarrow \quad & \lambda_2(W_n) = \lambda_2(C_{n-1}) + 1 \overset{(3.11)}{=\!=} 3 - 2\cos\frac{2\pi}{n-1}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Satz 4.10

Die Sternstrategie aus Definition 4.8 ist bis auf Isomorphie optimal für $b = n-1$ und einen Stern $K_{1,n-1} = (N, E)$ auf $n \geq 8$ Knoten, das heißt, mit $\widetilde{E}^*_{n-1}$ aus Definition 4.8 ist

$$\begin{aligned} 2 = \lambda_2(K_{1,n-1} + \widetilde{E}^*_{n-1}) > \lambda_2(K_{1,n-1} + \widetilde{E}) \geq 1 \quad & \forall\ \widetilde{E} \subseteq \tbinom{N}{2} \setminus E, \\ & |\widetilde{E}| = n-1, \\ & K_{1,n-1} + \widetilde{E} \ncong K_{1,n-1} + \widetilde{E}^*_{n-1}. \end{aligned}$$

Falls $4 \leq n = b+1 \leq 7$ gilt, so gibt es eine optimale Kantenwahl $\widetilde{E} \in \binom{N}{2} \setminus E$, $|\widetilde{E}| = n-1$ mit $K_{1,n-1} + \widetilde{E} \cong W_n$ und $\lambda_2(K_{1,n-1} + \widetilde{E}) \geq \lambda_2(K_{1,n-1} + \widetilde{E}^*_{n-1})$. Letztere Ungleichung wird ausschließlich für $n = 4$ oder $n = 7$ mit Gleichheit erfüllt.

Beweis:

Es sei $|\widetilde{E}| = n-1$ und wegen (4.6) muss der Graph $O_{n-1} + \widetilde{E}$ betrachtet werden: Damit $O_{n-1} + \widetilde{E}$ überhaupt zusammenhängend ist, verlangt Beobachtung 2.12 (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (v), den Graphen O_{n-1} mit $n-2$ Kanten zu einem Baum zu formen. Demzufolge liefert (4.6) genau dann $\lambda_2(K_{1,n-1} + \widetilde{E}) > 1$, wenn $O_{n-1} + \widetilde{E}$ exakt einen Kreis enthält. Nur zwei Fälle können auftreten, die den Zusammenhang von $O_{n-1} + \widetilde{E}$ garantieren:

(1) Es gilt $O_{n-1} + \widetilde{E} \cong C_{n-1}$;

(2) Der Graph $O_{n-1} + \widetilde{E}$ besitzt mindestens einen Knoten v mit $\lambda_2(O_{n-1} + \widetilde{E} - v) = 0$.

Im Fall (2) besagt Lemma 3.26, dass $\lambda_2(K_{1,n-1} + \widetilde{E}) \leq 1$ gilt. Gleichheit tritt in dieser Ungleichung genau dann auf, wenn v adjazent zu jedem anderen Knoten von $O_{n-1} + \widetilde{E}$ ist,

was wiederum eine Äquivalenz zu $O_{n-1} + \widetilde{E} \cong K_{1,n-2} + ij \cong O_{n-1} + \widetilde{E}^*_{n-1}$ nach sich zieht. Hierbei bezeichnet ij diejenige Kante aus $\widetilde{E}$, die übrig bleibt, wenn alle anderen $n-2$ Kanten nach dem Hinzufügen zu O_{n-1} einen $K_{1,n-2}$ bilden. Folglich ist die Sternstrategie optimal für Fall (2) und eine bessere Vorgehensweise muss Fall (1) bedeuten. Aufgrund von $O_{n-1} + \widetilde{E} \cong C_{n-1} \Leftrightarrow K_{1,n-1} + \widetilde{E} \cong W_n$ kann nur noch das erzeugen eines Rades eine größere algebraische Konnektivität als die Sternstrategie bewirken. Mittels (4.7) und (4.8) ist

$$\begin{aligned}
n = 4: &\quad \lambda_2(W_4) = 3 - 2\cos\tfrac{2\pi}{3} = 4 &&= \lambda_2(K_{1,3} + \widetilde{E}^*_3),\\
n = 5: &\quad \lambda_2(W_5) = 3 - 2\cos\tfrac{2\pi}{4} = 3 &&> 2 = \lambda_2(K_{1,4} + \widetilde{E}^*_4),\\
n = 6: &\quad \lambda_2(W_6) = 3 - 2\cos\tfrac{2\pi}{5} \approx 2{,}38197 &&> 2 = \lambda_2(K_{1,5} + \widetilde{E}^*_5),\\
n = 7: &\quad \lambda_2(W_7) = 3 - 2\cos\tfrac{2\pi}{6} = 2 &&= \lambda_2(K_{1,6} + \widetilde{E}^*_6),\\
n \geq 8: &\quad \lambda_2(W_n) \leq 3 - 2\cos\tfrac{2\pi}{7} \approx 1{,}75302 &&< 2 = \lambda_2(K_{1,n-1} + \widetilde{E}^*_{n-1}),
\end{aligned} \tag{4.9}$$

und damit die Behauptung bewiesen. □

Die offenkundig nicht für beliebige b optimale Sternstrategie kann laut Satz 4.10 zumindest für $b = n-1$ und $n \geq 8$ nicht verbessert werden. Fraglich ist, wie einem Stern auf n Knoten in optimaler Weise genau n Kanten hinzuzufügen sind. Eine Antwort auf dieses Problem könnte in einer Strategie münden, die beim Hinzufügen von Kanten zur Sternstrategie nicht isomorphe Graphen erzeugt und in größeren algebraischen Konnektivitäten für $b = n$ bzw. $n \leq b \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ sowie für eine genügend große Knotenanzahl n resultiert.

5 Fazit und Ausblick

Die nachfolgenden Ausführungen erfassen alle zentralen Resultate dieser Arbeit, ziehen daraus Schlussfolgerungen und benennen noch offene Probleme:

Aus den Angaben der Abschnitte 3.1 und 3.2 folgt, dass die Zuordnung der Einträge eines Fiedler-Vektors zu jedem Knoten eine Charakterisierung der Position des jeweiligen Knotens im Graphen liefert. Werden zwei verschiedene Knoten ausgewählt, so richtet sich der Betrag der Differenz der beiden dazugehörigen Einträge eines Fiedler-Vektors tendenziell nach der Länge eines kürzesten Pfades, welcher beide Knoten verbindet. Die Schranken (3.4), (3.5), (3.6) aus Abschnitt 3.1 suggerieren, dass es für die Maximierung der algebraischen Konnektivität von Vorteil ist, zwei Knoten zu verbinden, die einen großen Abstand im Graphen aufweisen. Weiterhin ist es möglich, via Lemma 3.10 oder (4.6) spezielle Stellen in einem Graphen für ein sinnvolles Hinzufügen neuer Kanten auszuschließen. Die Rede ist hierbei von Knoten, deren Einträge eines Fiedler-Vektors gleiche Werte aufweisen. Für die in Abschnitt 1 erwähnten abstrahierten Netzwerke bedeutet dies, ein Netzwerk mit dem Ziel optimaler Kommunikation, Zeit-, Kosten-, Energieeffizienz etc. derart auszubauen, dass bei einer neuen Verbindung zwei sehr schlecht miteinander verbundene bzw. kommunizierende Staaten, Städte, Einheiten, Knotenpunkte etc. zu bevorzugen sind – ein plausibles Ergebnis.

Zur Auflistung der wichtigsten Erkenntnisse aus Abschnitt 3:

- Die Sätze 3.14, 3.22 und die Vermutung 3.17 für Pfade;
- Die Sätze 3.20, 3.24 für Kreise;
- Die Sätze 3.27, 3.31 bis 3.34, 3.36 bis 3.38 für Sterne und sternähnliche Bäume;
- Der Satz 3.45 für vollständig multipartite Graphen.

Diese Liste wird nachstehend kurz ausformuliert und zusammengefasst:

Es ist (nicht eindeutig) optimal für die Maximierung von $\lambda_2(P_{n-1} + ij)$, wenn i und j die Blätter des Pfades P_{n-1} bezeichnen und eine Antwort auf die Frage nach der exakten Anzahl optimaler Kanten, die einem Pfad hinzuzufügen sind, bleibt offen. Eine Verifizierung oder Falsifizierung von Vermutung 3.17 über genau $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ optimale Lösungen ist wünschenswert. Für zwei disjunkte Pfade maximiert eine die mittig platzierten Knoten beider Pfade verbindende Kante die algebraische Konnektivität und einem Kreis kann eine beliebige Kante hinzugefügt werden, ohne den zweitkleinsten Eigenwert zu verändern. Ein Pfad und ein Kreis sind idealerweise durch eine Kante zu verbinden, die sich einem beliebigen Knoten des Kreises und einem mittig platzierten Knoten des Pfades bedient.

Für eine Maximierung des zweitkleinsten Eigenwertes zweier disjunkter Sterne ist eine Kante hinzuzufügen, welche beide Zentren der Sterne verbindet. Die algebraische Konnektivität von Sternen und allgemeiner von vollständig multipartiten Graphen, die nicht zum $K_n - ij$ für eine beliebige Kante $ij \in E(K_n)$ isomorph sind, wird sich beim Hinzufügen einer beliebigen Kante nicht erhöhen. Prinzipiell gilt die Beziehung $\lambda_2(G) = \lambda_2(G + ij)$ aufgrund von Korollar 3.2 für einen beliebigen Graphen G mit algebraischer Vielfachheit $\alpha(\lambda_2(G)) > 1$. Einzig der Fall $G \cong K_n - ij$ für $ij \in E(K_n)$ erzeugt nach Lemma 3.44 den maximal möglichen Zuwachs $\lambda_2(G + ij) = \lambda_2(G) + 2$.

Die Sätze 3.31, 3.32 für die Bäume T_1, T_2 aus den Abbildungen 3.19, 3.21 erwecken den Eindruck, dass es optimal im Sinne der Maximierung der algebraischen Konnektivität ist, einem Baum, der entsteht, wenn das Zentrum z eines Sterns mit dem Anfangsknoten

eines Pfades verbunden wird, eine Kante hinzuzufügen, die z und den Endknoten des Pfades verbindet. Jedoch wird dieser Anschein von den anschließenden Untersuchungen in Abschnitt 3.4 widerlegt. Wie verhält es sich mit einer optimalen Kante für solche Bäume? Darüber hinaus sind Aussagen zur Maximierung des zweitkleinsten Eigenwertes für Graphen von Interesse, welche die Bäume $T_1, T_2, T_3, T_4, T^1_{p,q}, T^2_{p,q}, T^3_{p,q}$ der Abbildungen 3.19, 3.21, 3.23, 3.25, 3.28 als induzierte Untergraphen enthalten.

All diese Resultate über das Hinzufügen von genau einer Kante zu einem Graphen werfen folgende Problematik auf: Nicht immer ist diejenige Kante für eine Maximierung der algebraischen Konnektivität optimal, welche die zwei zuvor „am schlechtesten verbundenen Knoten“ im Sinne ihres Abstandes verbindet. Sie stellt lediglich nicht die ungünstigste Wahl unter allen Kantenkandidaten dar. Immerhin wird ein beliebiger Graph $G = (N, E)$ nach Abschnitt 3.1 tendenziell $\lambda_2(G + ij) > \lambda_2(G + kl)$ für eine genügend große Ungleichung $\alpha^2_{ij} \gg \alpha^2_{kl}$ zweier verschiedener Kanten $ij, kl \in \binom{N}{2} \setminus E$ erfüllen. Es verbleibt zu klären, wie die Formulierungen „tendenziell“ und „genügend groß“ zu präzisieren sind, um ein schärferes Verständnis für das Verhalten der algebraischen Konnektivität entwickeln zu können. Gesucht werden nach wie vor konkrete Mechanismen, die optimale Kantenpositionen für einen beliebigen Graphen erkennen lassen.

Die Relaxierungen (4.3) des kombinatorischen Optimierungsproblems (4.2) zur Fragestellung (b) aus Abschnitt 4.1 bzgl. des Hinzufügens mehrerer Kanten verlangen effiziente Lösungsalgorithmen. Weiterhin ist die Qualität der so erlangten oberen Schranken zu analysieren.

Das Hinzufügen mehrerer Kanten zu einem Stern wurde in Abschnitt 4.2 studiert. Besitzt der Stern genau n Knoten, so besagt Beobachtung 4.6, dass das Hinzufügen von beliebigen $n - 3$ oder weniger Kanten keine Erhöhung der algebraischen Konnektivität bewirkt. Ein Abbruch der Sternstrategie aus Definition 4.8 nach dem Hinzufügen von $n - 2$ oder $n - 1$ Kanten zu einem Stern auf $n \geq 8$ Knoten ist optimal für die Maximierung des zweitkleinsten Eigenwertes. Beim Hinzufügen von genau $n - 1$ Kanten zu einem Stern auf $n = 5$ oder $n = 6$ Knoten schlägt einzig das Erzeugen eines Rades die Sternstrategie und es existiert keine bessere Variante. Gilt hierbei $n = 4$ oder $n = 7$, so liefern Rad und Sternstrategie gleiche algebraische Konnektivitäten.

Wie ist die Situation für mehr als $n - 1$ Kanten? Welche Strategie überragt in diesem Fall alle übrigen Verfahrensweisen? Ferner ist eine Ausweitung obiger Aussagen auf (vollständig) bipartite Graphen bzw. (vollständig) multipartite Graphen von Interesse. Was passiert bei der Betrachtung alternativer Graphenklassen?

Die Untersuchungen der Abschnitte 4.1, 4.2 lassen Kantenmengen $\widetilde{E} = \binom{N}{2} \setminus E$ für einen Graphen $G = (N, E)$ zu. Wie lauten optimal hinzuzufügende Kantenmengen $\widetilde{E}$ als echte Teilmengen von vorgegebenen Kandidaten aus $\binom{N}{2} \setminus E$?

Abschließend muss festgestellt werden, dass die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit erste Schritte auf einem noch langen Weg der Erkenntnis bedeuten, Mechanismen zu begreifen, die eine Reaktion des zweitkleinsten Eigenwertes eines Graphen auf das Hinzufügen von Kanten besser abschätzen können.

A Numerische und algebraische Berechnungen

Sämtliche Angaben in dieser Arbeit zu Eigenwerten und Eigenvektoren ohne expliziten Verweis auf eine Rechnung wurden mit Hilfe des Online-Eigenwertrechners von Brünner [6] ermittelt und erforderlichenfalls auf fünf Nachkommastellen gerundet. Die nachstehenden Untersuchungen zu charakteristischen Polynomen erfolgten über das CAS Maple 12:

```
> f2 := λ→λ^3 − (n + 3)λ^2 + (4n − 2)λ − 2n; f3 := λ→λ^3 − (n + 2)λ^2 + (4n−6) λ−2n; f4 := λ→λ^4 − (n + 5)λ^3 + (6n + 3)λ^2
  − (9n − 5)λ + 3n; f5 := λ→λ^6 − (n + 8)λ^5 + (10n + 15)λ^4 − (35n − 16)λ^3 + (51n − 53)λ^2 − (30n − 22)λ + 6n; f6
  := λ→λ^4 − (n + 4)λ^3 + (6n − 3)λ^2 − (9n − 13)λ + 3n; f7 := λ→λ^3 − (n + 1)λ^2 + (3n − 5)λ − n; f9 := λ→λ^4 − (n
  + 5)λ^3 + (7n − 1)λ^2 − (13n − 19)λ + 4n; f10 := λ→λ^3 − (n + 2)λ^2 + (3n − 2)λ − n; f11 := λ→λ^5 − (n + 5)λ^4 + (7n
  + 1)λ^3 − (15n − 17)λ^2 + (10n − 8)λ − 2n; f12 := λ→λ^6 − (n + 7)λ^5 + (9n + 10)λ^4 − (28n − 18)λ^3 + (36n − 42)λ^2
  − (18n − 14)λ + 3n; f14 := λ→λ^4 − (n + 5)λ^3 + (7n − 3)λ^2 − (11n − 17)λ + 3n; f15 := λ→λ^4 − (n + 4)λ^3 + (6n
  − 4)λ^2 − (8n − 12)λ + 2n; f16 := λ→λ^3 − (n + 2)λ^2 + (4n − 7)λ − n; f18 := λ→λ^5 − (n + 6)λ^4 + (8n + 4)λ^3 − (20n
  − 22)λ^2 + (17n − 26)λ − 3n; f19 := λ→λ^4 − (n + 3)λ^3 + (5n − 4)λ^2 − (6n − 10)λ + n;
```

$$f_2 := \lambda \to \lambda^3 - (n+3)\,\lambda^2 + (4n-2)\,\lambda - 2n$$
$$f_3 := \lambda \to \lambda^3 - (n+2)\,\lambda^2 + (4n-6)\,\lambda - 2n$$
$$f_4 := \lambda \to \lambda^4 - (n+5)\,\lambda^3 + (6n+3)\,\lambda^2 - (9n-5)\,\lambda + 3n$$
$$f_5 := \lambda \to \lambda^6 - (n+8)\,\lambda^5 + (10n+15)\,\lambda^4 - (35n-16)\,\lambda^3 + (51n-53)\,\lambda^2 - (30n-22)\,\lambda + 6n$$
$$f_6 := \lambda \to \lambda^4 - (n+4)\,\lambda^3 + (6n-3)\,\lambda^2 - (9n-13)\,\lambda + 3n$$
$$f_7 := \lambda \to \lambda^3 - (n+1)\,\lambda^2 + (3n-5)\,\lambda - n$$
$$f_9 := \lambda \to \lambda^4 - (n+5)\,\lambda^3 + (7n-1)\,\lambda^2 - (13n-19)\,\lambda + 4n$$
$$f_{10} := \lambda \to \lambda^3 - (n+2)\,\lambda^2 + (3n-2)\,\lambda - n$$
$$f_{11} := \lambda \to \lambda^5 - (n+5)\,\lambda^4 + (7n+1)\,\lambda^3 - (15n-17)\,\lambda^2 + (10n-8)\,\lambda - 2n$$
$$f_{12} := \lambda \to \lambda^6 - (n+7)\,\lambda^5 + (9n+10)\,\lambda^4 - (28n-18)\,\lambda^3 + (36n-42)\,\lambda^2 - (18n-14)\,\lambda + 3n$$
$$f_{14} := \lambda \to \lambda^4 - (n+5)\,\lambda^3 + (7n-3)\,\lambda^2 - (11n-17)\,\lambda + 3n$$
$$f_{15} := \lambda \to \lambda^4 - (n+4)\,\lambda^3 + (6n-4)\,\lambda^2 - (8n-12)\,\lambda + 2n$$
$$f_{16} := \lambda \to \lambda^3 - (n+2)\,\lambda^2 + (4n-7)\,\lambda - n$$
$$f_{18} := \lambda \to \lambda^5 - (n+6)\,\lambda^4 + (8n+4)\,\lambda^3 - (20n-22)\,\lambda^2 + (17n-26)\,\lambda - 3n$$
$$f_{19} := \lambda \to \lambda^4 - (n+3)\,\lambda^3 + (5n-4)\,\lambda^2 - (6n-10)\,\lambda + n \qquad \textbf{(1)}$$

```
> λ2(C5) := 2 − 2 cos(2π/5); λ2(C8) := 2 − 2 cos(2π/8); λ2(C9) := 2 − 2 cos(2π/9); λ2(C10) := 2 − 2 cos(2π/10);
```

$$\lambda_2(C_5) := 2 - 2\cos\left(\frac{2}{5}\,\pi\right)$$
$$\lambda_2(C_8) := 2 - \sqrt{2}$$
$$\lambda_2(C_9) := 2 - 2\cos\left(\frac{2}{9}\,\pi\right)$$
$$\lambda_2(C_{10}) := 2 - 2\cos\left(\frac{1}{5}\,\pi\right) \qquad \textbf{(2)}$$

```
> simplify(λ2(C8)); solve(λ^2 − 4λ + 2 = 0, λ);
```

$$2 - \sqrt{2}$$
$$2 + \sqrt{2},\ 2 - \sqrt{2} \qquad \textbf{(3)}$$

```
> simplify(f3(λ2(C8))); simplify(f3(1)); simplify(f3(4)); simplify(f3(n));
```

$$-4$$
$$-7 + n$$
$$8 - 2n$$
$$2n^2 - 8n \qquad \textbf{(4)}$$

```
> f61 := λ→λ^3 − 6λ^2 + 9λ − 3; simplify(f61(λ2(C9))); simplify(f61(2 − 2 cos(4π/9))); simplify(f61(2 − 2 cos(8π/9)));
```

$$f_{61} := \lambda \to \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 3$$
$$0$$
$$0 \qquad \textbf{(5)}$$

$$0 \tag{5}$$

```
> simplify(f6(λ2(C9))); simplify(f6(1)); simplify(f6(2)); simplify(f6(4)); simplify(f6(n));
```

$$6\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right)+2+2\cos\left(\frac{4}{9}\pi\right)-2\cos\left(\frac{1}{9}\pi\right)$$

$$7-n$$

$$-2+n$$

$$4-n$$

$$2n^3-12n^2+16n \tag{6}$$

```
> convert(λ2(C10), radical); solve(λ^2 − 3λ + 1 = 0, λ);
```

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} \tag{7}$$

```
> simplify(f7(λ2(C10))); convert(%, radical); simplify(%); simplify(f7(1)); simplify(f7(3)); simplify(f7(n));
```

$$4-12\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)+12\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)-n+2n\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)-2n\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$$

$$-2-n+2n\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)-2n\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)$$

$$-2$$

$$-5+n$$

$$3-n$$

$$2n^2-6n \tag{8}$$

```
> convert(λ2(C5), radical); solve(λ^2 − 5λ + 5 = 0, λ); solve(λ^2 − 5λ + 3 = 0, λ);
```

$$\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5},\ \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13},\ \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13} \tag{9}$$

```
> simplify(f7(λ2(C5))); convert(%, radical); simplify(%); simplify(f7(5/2 − 1/2 sqrt(13)));
```

$$4-12\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)-8\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)-n+2n\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)+2n\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$$

$$5-5\sqrt{5}-n+2n\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)+2n\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)$$

$$5-5\sqrt{5}-n+n\sqrt{5}$$

$$18-6\sqrt{13}-3n+n\sqrt{13} \tag{10}$$

```
> simplify(f2(λ2(C8))); simplify(f2(1)); simplify(f7(4)); simplify(f2(n));
```

$$-2$$

$$-4+n$$

$$28-5n$$

$$n^2-4n \tag{11}$$

```
> simplify(f4(0)); simplify(f4(λ2(C8))); simplify(f4(2)); simplify(f4(4)); simplify(f4(n));
```

$$3n$$

$$-4+5\sqrt{2}+n-n\sqrt{2}$$

$$-2+n$$

$$4-n$$

$$n^3-6n^2+8n \tag{12}$$

```
> simplify(f5(λ2(C9))); simplify( − 2n cos(1/9 π) + 2n cos(2/9 π) + 2n cos(4/9 π)); evalf(−1 − 4 cos(4/9 π) + 6 cos(1/9 π))
```

$$-4\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right)\Big);\ simplify(f_5(0.53));\ simplify(f_5(1));\ simplify(f_5(2));\ simplify(f_5(3.7));\ simplify(f_5(4));\ simplify(f_5(n));$$

$$-1+6\cos\left(\frac{1}{9}\pi\right)-2n\cos\left(\frac{1}{9}\pi\right)+2n\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right)+2n\cos\left(\frac{4}{9}\pi\right)-4\cos\left(\frac{4}{9}\pi\right)-4\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right)$$

$$0$$

$$0.879385244$$

$$0.02551212000-0.03756644900\,n$$

$$-7+n$$

$$8-2n$$

$$-4.270651000+1.056430000\,n$$

$$8-2n$$

$$2n^5-20n^4+67n^3-83n^2+28n \tag{13}$$

> $factor(\%);\ fsolve(\%=0,\ n);$

$$n(n-4)(2n^3-12n^2+19n-7)$$

$$0.,\ 0.5303825659,\ 1.796635786,\ 3.672981648,\ 4. \tag{14}$$

> $simplify(f_9(0));\ evalf(f_9(\lambda_2(C_9)));\ simplify(f_9(1));\ simplify(f_9(3));\ simplify(f_9(5));\ simplify(f_9(n));$

$$4n$$

$$8.207081241-0.652703647\,n$$

$$14-3n$$

$$-6+n$$

$$70-11n$$

$$2n^3-14n^2+23n \tag{15}$$

> $factor(\%);\ fsolve(\%=0,\ n);$

$$n(2n^2-14n+23)$$

$$0.,\ 2.633974596,\ 4.366025404 \tag{16}$$

> $a:=\{seq(f_5(x),\ n=10..12)\}:\ b:=\{seq(f_9(x),\ n=10..12)\}:$ **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 3 **do** $fsolve(a[4-i]=0,\ x):\ \lambda_2(G_5)_{n=9+i}:=\%[1];\ fsolve(b[4-i]=0,\ x):\ \lambda_2(G_9)_{n=9+i}:=\%[1];$ **end do**;

$$0.5075446645,\ 0.7546000389,\ 1.544235333,\ 3.253179206,\ 3.858576855,\ 8.081863902$$

$$\lambda_2(G_5)_{n=10}:=0.5075446645$$

$$0.4988164410,\ 2.607394176,\ 3.799621440,\ 8.094167942$$

$$\lambda_2(G_9)_{n=10}:=0.4988164410$$

$$0.5056580495,\ 0.7270892683,\ 1.563255363,\ 3.282109191,\ 3.861708922,\ 9.060179207$$

$$\lambda_2(G_5)_{n=11}:=0.5056580495$$

$$0.4844616739,\ 2.609347067,\ 3.838548024,\ 9.067643235$$

$$\lambda_2(G_9)_{n=11}:=0.4844616739$$

$$0.5038958901,\ 0.7069733258,\ 1.576589622,\ 3.302421528,\ 3.864029184,\ 10.04609045$$

$$\lambda_2(G_5)_{n=12}:=0.5038958901$$

$$0.4732815872,\ 2.610695100,\ 3.865082364,\ 10.05094095$$

$$\lambda_2(G_9)_{n=12}:=0.4732815872 \tag{17}$$

> $simplify(f_{10}(0));\ evalf(f_{10}(\lambda_2(C_9)));\ simplify(f_{10}(3));\ simplify(f_{10}(n));$

$$-n$$

$$-1.271259011+0.184792531\,n$$

$$3-n$$

$$n^2-3n \tag{18}$$

> $simplify(f_9(\lambda)-(\lambda-3)\cdot f_{10}(\lambda));\ \xi:=solve(\%=0,\ \lambda);$

$$\lambda^2 n-5\lambda^2-3\lambda n+13\lambda+n$$

$$\xi:=\frac{1}{2}\,\frac{3n-13+\sqrt{5n^2-58n+169}}{n-5},\ -\frac{1}{2}\,\frac{-3n+13+\sqrt{5n^2-58n+169}}{n-5} \tag{19}$$

```
> ξ := ξ[2]; h1 := 2 n^3 − 23 n^2 + 64 n + 13; h2 := 5 n^2 − 58 n + 169; fsolve(h1 = 0, n);
```

$$\xi := -\frac{1}{2}\,\frac{-3n+13+\sqrt{5n^2-58n+169}}{n-5}$$

$$h_1 := 2n^3-23n^2+64n+13$$

$$h_2 := 5n^2-58n+169$$

$$-0.1899449252 \qquad (20)$$

```
> simplify(f9(ξ)); simplify(-((2n−11)h1 + (h1 + 4n − 24)√h2)/(n−5)^4); simplify(-((2n−11)h1 + (h1 + 4n − 24)√h2)/(n−5)^4 − f9(ξ));
```

$$-\frac{1}{(n-5)^4}\left(-143-678n+2n^3\sqrt{5n^2-58n+169}-23n^2\sqrt{5n^2-58n+169}-11\sqrt{5n^2-58n+169}+4n^4\right.$$
$$\left.+68n\sqrt{5n^2-58n+169}+381n^2-68n^3\right)$$

$$-\frac{1}{(n-5)^4}\left(-143-678n+2n^3\sqrt{5n^2-58n+169}-23n^2\sqrt{5n^2-58n+169}-11\sqrt{5n^2-58n+169}+4n^4\right.$$
$$\left.+68n\sqrt{5n^2-58n+169}+381n^2-68n^3\right)$$

$$0 \qquad (21)$$

```
> simplify(f12(λ2(C10))); convert(%, radical); simplify(%); convert(λ2(C10), radical); simplify(f12(0.42)); simplify(f12(1));
    simplify(f12(2)); simplify(f12(3)); simplify(f12(4)); simplify(f12(n));
```

$$6-n+8\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)-10\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)-2n\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)+2n\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$$

$$\frac{3}{2}-n-\frac{1}{2}\sqrt{5}-2n\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)+2n\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$0.02995876900-0.01708048300\,n$$

$$-6+n$$

$$4-n$$

$$-12+3n$$

$$24-5n$$

$$2n^5-18n^4+54n^3-60n^2+17n \qquad (22)$$

```
> factor(%); fsolve(% = 0, n);
```

$$n\,(2n^4-18n^3+54n^2-60n+17)$$

$$0.,\ 0.4223089227,\ 1.803420388,\ 2.828584366,\ 3.945686323 \qquad (23)$$

```
> simplify(f16(0)); simplify(f16(λ2(C10))); convert(%, radical); simplify(%); simplify(f16(4)); simplify(f16(n));
```

$$-n$$

$$-6+10\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)+n-2n\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)$$

$$-\frac{17}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{5}+n-2n\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)$$

$$-\frac{17}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}n\sqrt{5}$$

$$-n+4$$

$$2n^2-8n \qquad (24)$$

```
> simplify(f19(0)); simplify(f19(1)); simplify(f19(2)); simplify(f19(4)); simplify(f19(n));
```

$$n$$

$$-n+4$$

$$-4+n$$

$$40-7n$$

$$2n^3-10n^2+11n \qquad (25)$$

```
> factor(%); fsolve(% = 0, n);
```

$$n\,(2\,n^2 - 10\,n + 11)$$

$$0.,\ 1.633974596,\ 3.366025404 \qquad \textbf{(26)}$$

```
> simplify(f18(λ) − (λ − 3)·f19(λ)); factor(%);
```

$$-\lambda^3 + \lambda^2 n - 2\,\lambda n + 4\,\lambda$$

$$\lambda\,(\lambda - 2)\,(-\lambda + n - 2) \qquad \textbf{(27)}$$

```
> evalf(f7(λ2(C9)));
```

$$-2.456051542 + 0.184792531\,n \qquad \textbf{(28)}$$

```
> simplify(f4(λ2(C9))); evalf(%);
```

$$1 + 4\cos\left(\frac{2}{9}\,\pi\right) + 2\cos\left(\frac{4}{9}\,\pi\right) - 2\cos\left(\frac{1}{9}\,\pi\right)$$

$$2.532088885 \qquad \textbf{(29)}$$

```
> a := {seq(f4(x), n = 8..13)} : b := {seq(f7(x), n = 8..13)} : for i from 1 by 1 to 6 do fsolve(a[7 − i] = 0, x) : λ2(G4)n=7+i := %[1];
      fsolve(b[7 − i] = 0, x) : λ2(G7)n=7+i := %[1]; end do;
```

$$0.5737703653,\ 1.546813964,\ 3.843256855,\ 7.036158815$$

$$\lambda_2(G_4)_{n=8} := 0.5737703653$$

$$0.5606883283,\ 2.338879686,\ 6.100431986$$

$$\lambda_2(G_7)_{n=8} := 0.5606883283$$

$$0.5581744447,\ 1.564864975,\ 3.851791216,\ 8.025169364$$

$$\lambda_2(G_4)_{n=9} := 0.5581744447$$

$$0.5300100469,\ 2.402749868,\ 7.067240085$$

$$\lambda_2(G_7)_{n=9} := 0.5300100469$$

$$0.5466430423,\ 1.577684264,\ 3.857078697,\ 9.018593996$$

$$\lambda_2(G_4)_{n=10} := 0.5466430423$$

$$0.5085213017,\ 2.443432848,\ 8.048045850$$

$$\lambda_2(G_7)_{n=10} := 0.5085213017$$

$$0.5377542147,\ 1.587251348,\ 3.860671074,\ 10.01432336$$

$$\lambda_2(G_4)_{n=11} := 0.5377542147$$

$$0.4925719260,\ 2.471418921,\ 9.036009153$$

$$\lambda_2(G_7)_{n=11} := 0.4925719260$$

$$0.5306854382,\ 1.594661265,\ 3.863269216,\ 11.01138408$$

$$\lambda_2(G_4)_{n=12} := 0.5306854382$$

$$0.4802398947,\ 2.491778867,\ 10.02798124$$

$$\lambda_2(G_7)_{n=12} := 0.4802398947$$

$$0.5249257832,\ 1.600568055,\ 3.865235038,\ 12.00927112$$

$$\lambda_2(G_4)_{n=13} := 0.5249257832$$

$$0.4704082789,\ 2.507226720,\ 11.02236500$$

$$\lambda_2(G_7)_{n=13} := 0.4704082789 \qquad \textbf{(30)}$$

```
> with(LinearAlgebra) : S := Matrix([[1, −(n + 5), 6n + 3, −(9n − 5), 3n, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, −(n + 5), 6n + 3, −(9n − 5), 3n,
      0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, −(n + 5), 6n + 3, −(9n − 5), 3n, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, −(n + 5), 6n + 3, −(9n − 5), 3n, 0, 0], [0, 0, 0,
      0, 1, −(n + 5), 6n + 3, −(9n − 5), 3n, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1, −(n + 5), 6n + 3, −(9n − 5), 3n], [1, −(n + 8), 10n + 15,
      −(35n − 16), (51n − 53), −(30n − 22), 6n, 0, 0, 0], [0, 1, −(n + 8), 10n + 15, −(35n − 16), (51n − 53), −(30n
       − 22), 6n, 0, 0], [0, 0, 1, −(n + 8), 10n + 15, −(35n − 16), (51n − 53), −(30n − 22), 6n, 0], [0, 0, 0, 1, −(n + 8), 10n
       + 15, −(35n − 16), (51n − 53), −(30n − 22), 6n]]); detS := Determinant(S);
```

$$S := \begin{bmatrix} 1 & -n-5 & 6n+3 & -9n+5 & 3n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n-5 & 6n+3 & -9n+5 & 3n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -n-5 & 6n+3 & -9n+5 & 3n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -n-5 & 6n+3 & -9n+5 & 3n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -n-5 & 6n+3 & -9n+5 & 3n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -n-5 & 6n+3 & -9n+5 & 3n \\ 1 & -n-8 & 10n+15 & -35n+16 & 51n-53 & -30n+22 & 6n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n-8 & 10n+15 & -35n+16 & 51n-53 & -30n+22 & 6n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -n-8 & 10n+15 & -35n+16 & 51n-53 & -30n+22 & 6n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -n-8 & 10n+15 & -35n+16 & 51n-53 & -30n+22 & 6n \end{bmatrix}$$

$detS := -36n + 9n^2$ **(31)**

```
> simplify((λ − 4)·f7(λ) − f9(λ));
```

λ **(32)**

```
> with(LinearAlgebra) : S := Matrix([[1,−(n + 2), 3n − 2,−n, 0, 0, 0], [0, 1,−(n + 2), 3n − 2,−n, 0, 0], [0, 0, 1,−(n + 2),
    3n − 2,−n, 0, 0], [0, 0, 0, 1,−(n + 2), 3n − 2,−n, 0], [0, 0, 0, 0, 1,−(n + 2), 3n − 2,−n], [1,−(n + 5), 7n + 1,−(15n
    − 17), 10n − 8,−2n, 0, 0], [0, 1,−(n + 5), 7n + 1,−(15n − 17), 10n − 8,−2n, 0], [0, 0, 1,−(n + 5), 7n + 1,−(15n
    − 17), 10n − 8,−2n]]); detS := Determinant(S);
```

$$S := \begin{bmatrix} 1 & -n-2 & 3n-2 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n-2 & 3n-2 & -n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -n-2 & 3n-2 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -n-2 & 3n-2 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -n-2 & 3n-2 & -n \\ 1 & -n-5 & 7n+1 & -15n+17 & 10n-8 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n-5 & 7n+1 & -15n+17 & 10n-8 & -2n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -n-5 & 7n+1 & -15n+17 & 10n-8 & -2n \end{bmatrix}$$

$detS := -24n + 5n^2$ **(33)**

```
> simplify((λ − 2)·f11(λ) − f12(λ) − (λ − 1)·f10(λ));
```

0 **(34)**

```
> simplify(f14(0)); simplify(f14(λ2(C10))); convert(%, radical); simplify(%); simplify(f14(2)); simplify(f14(5)); simplify(f14(n));
```

$3n$

$-14 - 4\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) - 4n\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) + 3n + 26\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$

$-\frac{13}{2} + \frac{11}{2}\sqrt{5} - 4n\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right) + 3n$

$-\frac{13}{2} + \frac{11}{2}\sqrt{5} + 2n - n\sqrt{5}$

$-2 + n$

$10 - 2n$

$2n^3 - 14n^2 + 20n$ **(35)**

```
> simplify(f9(λ2(C10))); convert(%, radical);
```

$2 + 6\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)$

$\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}$ **(36)**

```
> a := {seq(f9(x), n = 8..24)} : b := {seq(f14(x), n = 8..24)} : for i from 1 by 1 to 17 do fsolve(a[18 − i] = 0, x) : λ2(G9)n=7+i
    := %[1]; fsolve(b[18 − i] = 0, x) : λ2(G14)n=7+i := %[1]; end do;
```

$0.5448659875, 2.598748583, 3.629066087, 6.227319343$

$\lambda_2(G_9)_{n=8} := 0.5448659875$

0.5069425051, 1.639969456, 4.665377320, 6.187710719

$\lambda_2(G_{14})_{n=8} := 0.5069425051$

0.5179595381, 2.604314157, 3.737863313, 7.139862992

$\lambda_2(G_9)_{n=9} := 0.5179595381$

0.4790733178, 1.671633552, 4.747094830, 7.102198300

$\lambda_2(G_{14})_{n=9} := 0.4790733178$

0.4988164410, 2.607394176, 3.799621440, 8.094167942

$\lambda_2(G_9)_{n=10} := 0.4988164410$

0.4595540925, 1.692313460, 4.782781437, 8.065351010

$\lambda_2(G_{14})_{n=10} := 0.4595540925$

0.4844616739, 2.609347067, 3.838548024, 9.067643235

$\lambda_2(G_9)_{n=11} := 0.4844616739$

0.4450661018, 1.706850060, 4.802266006, 9.045817832

$\lambda_2(G_{14})_{n=11} := 0.4450661018$

0.4732815872, 2.610695100, 3.865082364, 10.05094095

$\lambda_2(G_9)_{n=12} := 0.4732815872$

0.4338633444, 1.717615084, 4.814446177, 10.03407540

$\lambda_2(G_{14})_{n=12} := 0.4338633444$

0.4643197542, 2.611681345, 3.884244839, 11.03975406

$\lambda_2(G_9)_{n=13} := 0.4643197542$

0.4249314794, 1.725902631, 4.822755770, 11.02641012

$\lambda_2(G_{14})_{n=13} := 0.4249314794$

0.4569712931, 2.612434109, 3.898699019, 12.03189558

$\lambda_2(G_9)_{n=14} := 0.4569712931$

0.4176380504, 1.732477181, 4.828778253, 12.02110652

$\lambda_2(G_{14})_{n=14} := 0.4176380504$

0.4508341056, 2.613027479, 3.909975100, 13.02616332

$\lambda_2(G_9)_{n=15} := 0.4508341056$

0.4115670701, 1.737818771, 4.833340222, 13.01727394

$\lambda_2(G_{14})_{n=15} := 0.4115670701$

0.4456300863, 2.613507210, 3.919009938, 14.02185277

$\lambda_2(G_9)_{n=16} := 0.4456300863$

0.4064331901, 1.742243764, 4.836913957, 14.01440909

$\lambda_2(G_{14})_{n=16} := 0.4064331901$

0.4411605602, 2.613903081, 3.926407361, 15.01852900

$\lambda_2(G_9)_{n=17} := 0.4411605602$

0.4020339008, 1.745969014, 4.839788421, 15.01220866

$\lambda_2(G_{14})_{n=17} := 0.4020339008$

0.4372797150, 2.614235305, 3.932573278, 16.01591170

$\lambda_2(G_9)_{n=18} := 0.4372797150$

0.3982213758, 1.749148072, 4.842150152, 16.01048040

$\lambda_2(G_{14})_{n=18} := 0.3982213758$

0.4338780612, 2.614518086, 3.937790264, 17.01381359

$\lambda_2(G_9)_{n=19} := 0.4338780612$

0.3948851116, 1.751892688, 4.844124870, 17.00909733

$\lambda_2(G_{14})_{n=19} := 0.3948851116$

0.4308717534, 2.614761693, 3.942260909, 18.01210564

$\lambda_2(G_9)_{n=20} := 0.4308717534$

0.3919408080, 1.754286109, 4.845800362, 18.00797272

$\lambda_2(G_{14})_{n=20} := 0.3919408080$

0.4281954784, 2.614973738, 3.946134158, 19.01069663

$\lambda_2(G_9)_{n=21} := 0.4281954784$

0.3893230124, 1.756391616, 4.847239763, 19.00704561

$\lambda_2(G_{14})_{n=21} := 0.3893230124$

0.4257975923, 2.615159980, 3.949521910, 20.00952052

$\lambda_2(G_9)_{n=22} := 0.4257975923$

0.3869801169, 1.758258160, 4.848489634, 20.00627209

$\lambda_2(G_{14})_{n=22} := 0.3869801169$

0.4236367141, 2.615324857, 3.952509830, 21.00852860

$\lambda_2(G_9)_{n=23} := 0.4236367141$

0.3848708723, 1.759924202, 4.849585060, 21.00561987

$\lambda_2(G_{14})_{n=23} := 0.3848708723$

0.4216792929, 2.615471847, 3.955164598, 22.00768426

$\lambda_2(G_9)_{n=24} := 0.4216792929$

0.3829619078, 1.761420375, 4.850552976, 22.00506474

$\lambda_2(G_{14})_{n=24} := 0.3829619078$ **(37)**

> $simplify(f_{14}(\lambda) - f_{15}(\lambda) + f_7(\lambda))$;

0 **(38)**

> $simplify(f_{15}(0))$; $simplify(f_{15}(1))$; $simplify(f_{15}(2))$; $simplify(f_{15}(5))$; $simplify(f_{15}(n))$;

$2n$

$5 - n$

$-8 + 2n$

$85 - 13n$

$2n^3 - 12n^2 + 14n$ **(39)**

> $factor(\%)$; $fsolve(\% = 0, n)$;

$2n(n^2 - 6n + 7)$

0., 1.585786438, 4.414213562 **(40)**

> $simplify(f_{15}(\lambda) - (\lambda - 1)\cdot f_{16}(\lambda) + f_7(\lambda))$;

0 **(41)**

> $simplify(f_{18}(0))$; $simplify(f_{18}(1))$; $simplify(f_{18}(2))$; $simplify(f_{18}(3))$; $simplify(f_{18}(5))$; $simplify(f_{15}(n))$;

$-3n$

$n - 5$

$4 - n$

$-15 + 3n$

$295 - 43n$

$2n^3 - 12n^2 + 14n$ **(42)**

> $factor(\%)$; $fsolve(\% = 0, n)$;

$2n(n^2 - 6n + 7)$

0., 1.585786438, 4.414213562 **(43)**

> $simplify((\lambda - 1)\cdot(\lambda - 3)\cdot f_{16}(\lambda) - f_{18}(\lambda))$;

$-\lambda n + 5\lambda$ **(44)**

```
> f[1,p,q] := (λ, p, q)→λ^4 − (p + q + 8)·λ^3 + (5·p + 5·q + p·q + 22)·λ^2 − (7·p + 7·q + 2·p·q + 24)·λ + 3·p + 3·q + 9; f[2,p,q]
    := (λ, p, q)→λ^4 − (p + q + 9)·λ^3 + (6·p + 6·q + p·q + 28)·λ^2 − (10·p + 10·q + 3·p·q + 36)·λ + 4·p + 4·q + 16;
  f[3,p,q] := (λ, p, q)→λ^3 − (p + q + 6)·λ^2 + (4·p + 2·q + p·q + 9)·λ − p − q − 4; f[4,p,q] := (λ, p, q)→λ^3 − (p + q + 4)·λ^2
  + (2·p + 2·q + p·q + 5)·λ − p − q − 2; f[5,p,q] := (λ, p, q)→λ^4 − (p + q + 6)·λ^3 + (4·p + 4·q + p·q + 12)·λ^2 − (4·p
  + 4·q + 2·p·q + 10)·λ + p + q + 3; f[6,p,q] := (λ, p, q)→λ^4 − (p + q + 7)·λ^3 + (5·p + 5·q + p·q + 16)·λ^2 − (6·p + 6·q
  + 3·p·q + 14)·λ + p + q + 4;
```

$$f_{1,p,q} := (\lambda, p, q) \to \lambda^4 - (p+q+8)\,\lambda^3 + (5p+5q+pq+22)\,\lambda^2 - (7p+7q+2pq+24)\,\lambda + 3p + 3q + 9$$

$$f_{2,p,q} := (\lambda, p, q) \to \lambda^4 - (p+q+9)\,\lambda^3 + (6p+6q+pq+28)\,\lambda^2 - (10p+10q+3pq+36)\,\lambda + 4p + 4q + 16$$

$$f_{3,p,q} := (\lambda, p, q) \to \lambda^3 - (p+q+6)\,\lambda^2 + (4p+2q+pq+9)\,\lambda - p - q - 4$$

$$f_{4,p,q} := (\lambda, p, q) \to \lambda^3 - (p+q+4)\,\lambda^2 + (2p+2q+pq+5)\,\lambda - p - q - 2$$

$$f_{5,p,q} := (\lambda, p, q) \to \lambda^4 - (p+q+6)\,\lambda^3 + (4p+4q+pq+12)\,\lambda^2 - (4p+4q+2pq+10)\,\lambda + p + q + 3$$

$$f_{6,p,q} := (\lambda, p, q) \to \lambda^4 - (p+q+7)\,\lambda^3 + (5p+5q+pq+16)\,\lambda^2 - (6p+6q+3pq+14)\,\lambda + p + q + 4 \quad \textbf{(45)}$$

```
> simplify(f[1,p,q](λ, p, q − 1) − f[1,p,q](λ, p − 1, q)); factor(%)
```

$$-\lambda^2 p + \lambda^2 q + 2\lambda p - 2\lambda q$$

$$-\lambda\,(\lambda - 2)\,(p - q) \quad \textbf{(46)}$$

```
> simplify(f[1,p,q](0, p − 1, q)); simplify(f[1,p,q](1, p − 1, q)); simplify(f[1,p,q](2, p − 1, q)); simplify(f[1,p,q](p + 2, p − 1, q));
    simplify(f[1,p,q](p + q + 2, p − 1, q)); factor(%)
```

$$6 + 3p + 3q$$

$$-(p-1)\,q$$

$$p + q$$

$$q - qp$$

$$qp^3 + qp^2 - 2qp - q^3 - 2q^2 + 2p^2q^2 + pq^3$$

$$(p-1)\,q\,(p+q+2)\,(p+q) \quad \textbf{(47)}$$

```
> simplify(f[3,p,q](λ, p, q − 2)); simplify(f[3,p,q](λ, q, p − 2)); simplify(f[4,p,q](λ, p, q));
```

$$\lambda^3 - \lambda^2 p - \lambda^2 q - 4\lambda^2 + 2\lambda p + 2\lambda q + 5\lambda + \lambda qp - p - q - 2$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 p - \lambda^2 q - 4\lambda^2 + 2\lambda p + 2\lambda q + 5\lambda + \lambda qp - p - q - 2$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 p - \lambda^2 q - 4\lambda^2 + 2\lambda p + 2\lambda q + 5\lambda + \lambda qp - p - q - 2 \quad \textbf{(48)}$$

```
> simplify(f[1,p,q](λ, p − 1, q) − (λ − 3)·f[3,p,q](λ, p, q − 2)); factor(%)
```

$$\lambda qp - \lambda^2 q + 2\lambda q$$

$$\lambda q\,(-\lambda + p + 2) \quad \textbf{(49)}$$

```
> simplify(f[3,p,q](0, p, q − 2)); simplify(f[3,p,q](1, p, q − 2)); simplify(f[3,p,q](p + 2, p, q − 2)); simplify(f[3,p,q](p + q + 2, p, q − 2));
    factor(%)
```

$$-2 - p - q$$

$$qp$$

$$-q$$

$$pq^2 + qp^2 + 2qp$$

$$pq\,(p+q+2) \quad \textbf{(50)}$$

```
> simplify(f[2,p,q](λ, p − 1, q − 1) − (λ − 3)·f[3,p,q](λ, p, q − 2));
```

$$2 + p + q - 2\lambda \quad \textbf{(51)}$$

```
> h := simplify(f[1,p,q](λ, p, q − 1) − f[2,p,q](λ, p − 1, q − 1)); η := solve(h = 0, λ);
```

$$h := -\lambda^2 p + 2\lambda p + 2\lambda + \lambda qp - p - q - 2$$

$$\eta := \frac{1}{2}\,\frac{qp + 2p + 2 + \sqrt{q^2p^2 + 4qp^2 + 4}}{p},\ -\frac{1}{2}\,\frac{-qp - 2p - 2 + \sqrt{q^2p^2 + 4qp^2 + 4}}{p} \quad \textbf{(52)}$$

```
> simplify(f[1,p,q](η[2], p, q − 1)); z := (p, q) → 1/2 · 1/p^4 · (16 + 2·p^5 + p^3·q^3 + p^3·q^2 − 16·p^3·q − 2·p^4·q^2 + 12·p·√(p^2·q^2 + 4·p^2·q + 4)
    − 2·p^3·√(p^2·q^2 + 4·p^2·q + 4) − 8·√(p^2·q^2 + 4·p^2·q + 4) + 2·p^3·q·√(p^2·q^2 + 4·p^2·q + 4) − 24·p + 6·p^2·q + 4·p^2·q^2 + 4·p^3
    + p^2·q·√(p^2·q^2 + 4·p^2·q + 4) − 4·p·q·√(p^2·q^2 + 4·p^2·q + 4) − p^2·q^2·√(p^2·q^2 + 4·p^2·q + 4) + 8·p·q);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{p^4}\left(16+2p^5+4p^3-q^2p^2\sqrt{q^2p^2+4qp^2+4}+qp^2\sqrt{q^2p^2+4qp^2+4}+12p\sqrt{q^2p^2+4qp^2+4}\right.$$
$$-4qp\sqrt{q^2p^2+4qp^2+4}-24p+2qp^3\sqrt{q^2p^2+4qp^2+4}-2p^3\sqrt{q^2p^2+4qp^2+4}+4q^2p^2+q^3p^3+q^2p^3$$
$$\left.-16qp^3-2q^2p^4+6qp^2+8qp-8\sqrt{q^2p^2+4qp^2+4}\right)$$

$$z:=(p,q)\to\frac{1}{2}\,\frac{1}{p^4}\left(16+2p^5+p^3q^3+p^3q^2-16p^3q-2p^4q^2+12p\sqrt{p^2q^2+4p^2q+4}-2p^3\sqrt{p^2q^2+4p^2q+4}\right. \tag{53}$$
$$-8\sqrt{p^2q^2+4p^2q+4}+2p^3q\sqrt{p^2q^2+4p^2q+4}-24p+6p^2q+4p^2q^2+4p^3+p^2q\sqrt{p^2q^2+4p^2q+4}$$
$$\left.-4pq\sqrt{p^2q^2+4p^2q+4}-p^2q^2\sqrt{p^2q^2+4p^2q+4}+8pq\right)$$

```
> plot3d([z(p, q), 0], p = q + 1..101, q = 3..100, axes = boxed, color = [grey, white]) : Abbildung;
```

Abbildung **(54)**

```
> with(plots) : implicitplot(z(p, q) ≤ 0, p = 3..10, q = 3..10, grid = [100, 100], coloring = [grey], filledregions = true) : Abbildung;
```

Abbildung **(55)**

```
> simplify(f[2,p,q](0, p − 1, q − 1)); simplify(f[2,p,q](2, p − 1, q − 1)); simplify(f[2,p,q](3, p − 1, q − 1)); simplify(f[2,p,q](p + 2, p − 1, q − 1)); simplify(f[2,p,q](p + q + 2, p − 1, q − 1)); factor(%)
```

$8+4p+4q$

$-2(p-1)(q-1)$

$-4+p+q$

$-2-p+2q-qp$

$-2+qp^3-p-q+2q^2p^2+pq^2+qp^2-2qp+pq^3$

$(p+q+2)(qp^2-qp+pq^2-1)$ **(56)**

```
> simplify(f[2,p,q](λ, p − 1, p − 1) − (λ − 3)·f[3,p,q](λ, p, p − 2));
```

$-2\lambda+2p+2$ **(57)**

```
> g := simplify(f[1,p,q](λ, p, p − 1) − f[2,p,q](λ, p − 1, p − 1)); ξ := solve(g = 0, λ);
```

$g := -\lambda^2p+2\lambda p+2\lambda+\lambda p^2-2p-2$

$$\xi := \frac{1}{2}\,\frac{2p+2+p^2+\sqrt{4p^3+4+p^4}}{p},\ -\frac{1}{2}\,\frac{-2p-2-p^2+\sqrt{4p^3+4+p^4}}{p} \tag{58}$$

```
> simplify(f[1,p,q](ξ[2], p, p − 1)); factor(%);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{p^4}\left(16+3p^5+10p^3+p^4\sqrt{4p^3+4+p^4}+12p\sqrt{4p^3+4+p^4}-p^3\sqrt{4p^3+4+p^4}-8\sqrt{4p^3+4+p^4}-12p^4\right.$$
$$\left.-24p+8p^2-4p^2\sqrt{4p^3+4+p^4}-p^6\right)$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{(p-1)\left(-p^5+2p^4+p^3\sqrt{4p^3+4+p^4}-10p^3+8p-4p\sqrt{4p^3+4+p^4}+8\sqrt{4p^3+4+p^4}-16\right)}{p^4} \tag{59}$$

```
> y := p→ 1/2 (p − 1)(−p^5 + 2p^4 + p^3√(4p^3 + 4 + p^4) − 10p^3 + 8p − 4p√(4p^3 + 4 + p^4) − 16 + 8√(4p^3 + 4 + p^4)) / p^4; y(4);
  y(5); evalf(y(4)); evalf(y(5));
```

$$y:=p\to\frac{1}{2}\,\frac{(p-1)\left(-p^5+2p^4+p^3\sqrt{4p^3+4+p^4}-10p^3+8p-4p\sqrt{4p^3+4+p^4}-16+8\sqrt{4p^3+4+p^4}\right)}{p^4}$$

$$-\frac{213}{32}+\frac{21}{32}\sqrt{129}$$

$$-\frac{6202}{625}+\frac{226}{625}\sqrt{1129}$$

0.797317203

2.226775240 **(60)**

```
> evalf(solve(p^3 − 4·p + 8 > 0));
```

RealRange(Open(−2.649435914), ∞) **(61)**

```
> solve(p^2 − 6·p + 4 > 0);
```

RealRange(−∞, Open(3 − √5)), RealRange(Open(√5 + 3), ∞) **(62)**

```
> simplify((λ − 1)·f4, p, q(λ, p, q) − f5, p, q(λ, p, q − 1)); factor(%);
```

$$\lambda^2 - \lambda^2 q + \lambda q + \lambda q p - \lambda p - \lambda$$

$$\lambda\,(q-1)\,(-\lambda + 1 + p) \tag{63}$$

```
> simplify(f5, p, q(0, p, q − 1)); simplify(f5, p, q(1, p, q − 1)); simplify(f5, p, q(2, p, q − 1)); simplify(f5, p, q(p + 2, p, q − 1));
      simplify(f5, p, q(p + q + 2, p, q − 1)); factor(%);
```

$$p + q + 2$$

$$-p\,(q-1)$$

$$-2 + p + q$$

$$-2 - p + q$$

$$-2 - p - q + 2q^2 + q^3 + 2q^2p^2 + 4pq^2 + pq^3 + qp^3 + 3qp^2 + 2qp$$

$$(p + q + 2)\,(qp^2 + pq^2 + qp - 1 + q^2) \tag{64}$$

```
> simplify(f5, p, q(λ, p, q − 1) − f5, p, q(λ, p − 1, q)); factor(%);
```

$$-\lambda^2 p + \lambda^2 q + 2\lambda p - 2\lambda q$$

$$-\lambda\,(\lambda - 2)\,(p - q) \tag{65}$$

```
> simplify(f5, p, q(λ, p − 1, q) − f6, p, q(λ, p − 1, q − 1)); factor(%);
```

$$\lambda^2 - \lambda^2 q - \lambda p - \lambda + \lambda q + \lambda q p$$

$$\lambda\,(q-1)\,(-\lambda + 1 + p) \tag{66}$$

```
> simplify(f6, p, q(0, p − 1, q − 1)); simplify(f6, p, q(1, p − 1, q − 1)); simplify(f6, p, q(q + 1, p − 1, q − 1)); simplify(f6, p, q(p + 1, p
      − 1, q − 1)); simplify(f6, p, q(p + q + 2, p − 1, q − 1)); factor(%);
```

$$p + q + 2$$

$$p + q - 2qp$$

$$p - q$$

$$-p + q$$

$$-4 + p^3 + pq^3 - 2p - 2q + 2q^2 + 2p^2 + q^3 + 2q^2p^2 + 4pq^2 + 4qp^2 + 2qp$$

$$(p + q + 2)\,(qp^2 + p^2 + pq^2 + qp - 2 + q^2) \tag{67}$$

```
> simplify(f6, p, q(0, p − 1, p − 1)); simplify(f6, p, q(1, p − 1, p − 1)); simplify(f6, p, q(3, p − 1, p − 1)); simplify(f6, p, q(p + 1, p − 1, p
      − 1));
```

$$2 + 2p$$

$$2p - 2p^2$$

$$-4 + 2p$$

$$0 \tag{68}$$

```
> fsolve(f6, p, q(x, 1, 1) = 0, x); simplify(f6, p, q(0, 1, 1));
```

$$0.2679491924,\ 2.,\ 3.,\ 3.732050808$$

$$6 \tag{69}$$

```
> P := α → −1 + (2 − λk)·α − α^2; solve(P(α) = 0, α);
```

$$P := \alpha \to -1 + (2 - \lambda_k)\,\alpha - \alpha^2$$

$$1 - \frac{1}{2}\lambda_k + \frac{1}{2}\sqrt{-4\lambda_k + \lambda_k^2},\ 1 - \frac{1}{2}\lambda_k - \frac{1}{2}\sqrt{-4\lambda_k + \lambda_k^2} \tag{70}$$

```
> λk := 2 − 2 cos((k − 1)·π / n); solve(P(α) = 0, α);
```

$$\lambda_k := 2 - 2\cos\left(\frac{(k-1)\,\pi}{n}\right)$$

$$\cos\left(\frac{(k-1)\,\pi}{n}\right) + \sqrt{\cos\left(\frac{(k-1)\,\pi}{n}\right)^2 - 1},\ \cos\left(\frac{(k-1)\,\pi}{n}\right) - \sqrt{\cos\left(\frac{(k-1)\,\pi}{n}\right)^2 - 1} \tag{71}$$

```
> ykl := l → cos((l·(k − 1)·π) / n − ((k − 1)·π) / (2·n)); simplify(ykl(0)); simplify(ykl(1)); simplify(ykl(n)); simplify(ykl(n + 1));
```

$$ykl := l \to \cos\left(\frac{l\,(k-1)\,\pi}{n} - \frac{1}{2}\,\frac{(k-1)\,\pi}{n}\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\,\frac{(k-1)\,\pi}{n}\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\ \frac{(k-1)\,\pi}{n}\right)$$
$$\cos\left(\frac{1}{2}\ \frac{(k-1)\,\pi\,(2n-1)}{n}\right)$$
$$\cos\left(\frac{1}{2}\ \frac{(k-1)\,\pi\,(2n+1)}{n}\right) \tag{72}$$

```
> ||y2(P_{n-1})||_2 := simplify(sqrt(sum(cos(l*pi/n - 1/2*pi/n)^2, l = 1..n)));
```

$$LinearAlgebra:\text{-}Norm(y_2(P_{n-1}),\ 2) := \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{n} \tag{73}$$

```
> assume(p, integer); expand(sum(cos(2*l*p*pi/n)*sin(2*l*p*pi/n), l = 1..n)); simplify(%);
```

$$-\frac{((-1)^{p\sim})^2 \sin\left(\frac{p\sim\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{p\sim\pi}{n}\right)^3}{\cos\left(\frac{p\sim\pi}{n}\right)^2-1}+\frac{((-1)^{p\sim})^4 \sin\left(\frac{p\sim\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{p\sim\pi}{n}\right)^3}{\cos\left(\frac{p\sim\pi}{n}\right)^2-1}$$
$$0 \tag{74}$$

```
> with(GraphTheory): with(SpecialGraphs): with(LinearAlgebra): n := 16; i := 1; while (n - 2*i > 0) do P_{n-1,i,n-i+1}
    := AddEdge(PathGraph(n), {i, n - i + 1}); LP_{n-1,i,n-i+1}
    := DiagonalMatrix(MatrixVectorMultiply(AdjacencyMatrix(P_{n-1,i,n-i+1}), Diagonal(IdentityMatrix(n))))
    - AdjacencyMatrix(P_{n-1,i,n-i+1}); χP_{n-1,i,n-i+1} := factor(CharacteristicPolynomial(LP_{n-1,i,n-i+1}, λ)); a
    := fsolve(%); λ2[i] := a[2]; i := i + 1; od: convert(λ2, list);
```

$$n := 16$$
$$i := 1$$
$$[0.1522409350,\ 0.1522409350,\ 0.1522409350,\ 0.1522409350,\ 0.09973034438,\ 0.06995911871,\ 0.05197136456] \tag{75}$$

```
> restart: simplify((((2 - 2*cos(2*pi/n)) - 1)*(((2 - 2*cos(2*pi/n))^2 - 5*(2 - 2*cos(2*pi/n))) + 2))/(2 - 2*cos(2*pi/n))); simplify(
    -(((2 - 2*cos(2*pi/n))^2 - 4*(2 - 2*cos(2*pi/n))) + 2)/(2 - 2*cos(2*pi/n))); simplify(2*(2 - 2*cos(2*pi/n) - 2)^2);
```

$$\frac{2-5\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+4\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)^3}{-1+\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$
$$\frac{-1+2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}{-1+\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$
$$8\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 \tag{76}$$

Tabellenverzeichnis

Tabelle 3.1: Schranken für $\lambda_2(P_5 + ij)$ 23
Tabelle 3.2: Das Spektrum eines Kreises 25
Tabelle 3.3: Nicht isomorphe Varianten $\lambda_2(P_{n-1} + ij)$ für $n = 3, 4, 5, 6, 7$ 26
Tabelle 3.4: $\lambda_2\left(P_{n-1} + \{i, n-i+1\}\right)$ für $n = 8, \ldots, 16$ 27
Tabelle 3.5: $\lambda_2\left(P_{n-1} + \{i, n-i+1\}\right)$ für $n = 19, 20, 23, 24, 51, 52$ 27
Tabelle 3.6: $\lambda_2(P_5 \dot{+} P_5 + ij)$ 33
Tabelle 3.7: $\lambda_2(C_5 \dot{+} P_6 + ij)$ 36
Tabelle 3.8: Satz 3.32 für $n = 6, 7, 8, 9$ Knoten 49
Tabelle 3.9: Satz 3.33 für $n = 6, 7, 8, 9$ Knoten 49
Tabelle 3.10: Satz 3.34 für $n = 7, 8, 9$ Knoten 50
Tabelle 3.11: Beispiele für Satz 3.36, vgl. Abbildung 3.29 58
Tabelle 3.12: Beispiele für Satz 3.37, vgl. Abbildung 3.31 60

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1: Vollständige Graphen . . . 3
Abbildung 2.2: Untergraphen und Komplement eines Graphen . . . 4
Abbildung 2.3: $P_{n-1} + 1n = C_n$ . . . 5
Abbildung 2.4: Ein Wald aus zwei Bäumen . . . 6
Abbildung 2.5: Isospektrale Graphen . . . 12
Abbildung 3.1: Modifikationen eines Graphen . . . 17
Abbildung 3.2: Bäume der Typen I und II . . . 18
Abbildung 3.3: Komponenten des charakteristischen Knotens i vom Baum T . . . 18
Abbildung 3.4: Ein Beispiel für Lemma 3.7 . . . 19
Abbildung 3.5: Ein Beispiel für Lemma 3.8 . . . 19
Abbildung 3.6: Ein Beispiel für Lemma 3.10 und Korollar 3.11 . . . 21
Abbildung 3.7: P_{n-1} . . . 21
Abbildung 3.8: Lollipop-Graph $C_{10,5}$ . . . 25
Abbildung 3.9: $\lambda_2(P_{n-1} + ij) > \lambda_2(C_{n,j-i+1}) > \lambda_2(C_{n,j-i})$ nach Lemma 3.16 . . . 26
Abbildung 3.10: $P_{n-1} + ij \cong C_{j,j-i+1} \dot{+} P_{n-j-1} + \{j, j+1\}$ . . . 28
Abbildung 3.11: Zusammenhang zwischen Satz 3.14 und Satz 3.20 . . . 30
Abbildung 3.12: Verbindung zweier Pfade P_{s-1} und P_{n-s-1} als Baum vom Typ I . . . 32
Abbildung 3.13: Optimale Verbindung zweier Pfade P_{s-1} und P_{n-s-1} . . . 33
Abbildung 3.14: Optimale Verbindung eines Kreises C_{n-s} mit einem Pfad P_{s-1} . . . 36
Abbildung 3.15: Stern $K_{1,n-1}$ . . . 36
Abbildung 3.16: Die Graphen G_1 bis G_8 . . . 38
Abbildung 3.17: Die Graphen G_9 bis G_{19} . . . 39
Abbildung 3.18: Zum Beweis von Beobachtung 3.30 . . . 47
Abbildung 3.19: T_1 . . . 47
Abbildung 3.20: Hinzufügen einer Kante zu T_1 . . . 48
Abbildung 3.21: T_2 . . . 48
Abbildung 3.22: Hinzufügen einer Kante zu T_2 . . . 48
Abbildung 3.23: T_3 . . . 49
Abbildung 3.24: Hinzufügen einer Kante zu T_3 . . . 49
Abbildung 3.25: T_4 . . . 50
Abbildung 3.26: Hinzufügen einer Kante zu T_4 . . . 50
Abbildung 3.27: Beispiel einer Verallgemeinerung der Sätze 3.31 und 3.32 . . . 51
Abbildung 3.28: Die Graphen $G^1_{p,q}$, $G^2_{p,q}$, $G^3_{p,q}$ und Bäume $T^1_{p,q}$, $T^2_{p,q}$, $T^3_{p,q}$ . . . 51
Abbildung 3.29: Hinzufügen einer Kante zu $T^1_{p,q}$ . . . 55
Abbildung 3.30: $f^1_{p,q-1}(\eta_1) > 0$ für $101 \geq p \geq q+1 \geq 4$ . . . 57
Abbildung 3.31: Hinzufügen einer Kante zu $K_{1,p} \dot{+} K_{1,q}$ . . . 60
Abbildung 3.32: Beispiele optimaler Kanten für Satz 3.38 . . . 60
Abbildung 3.33: Vollständig multipartite Graphen . . . 61
Abbildung 3.34: $K_{1,1,2} \cong \overline{K_1 \dot{+} K_1 \dot{+} K_2} \cong K_4 - ij$ . . . 65
Abbildung 3.35: Beispiele für Lemma 3.43 auf $n \geq 8$ Knoten . . . 66
Abbildung 4.1: Für $K_{1,n-1} = (N, E)$ ist $\binom{N}{2} \setminus E = E(O_{n-1})$ . . . 72
Abbildung 4.2: $\lambda_2(K_{1,6} + \widetilde{E}_{\max}) = \lambda_2(K_{1,6}) = 1$ mit $|\widetilde{E}_{\max}| = 10$ . . . 73
Abbildung 4.3: Optimale Wahl von sieben Kanten beim Hinzufügen zum $K_{1,8}$ . . . 74
Abbildung 4.4: Das Rad W_9 . . . 76

Abkürzungen und Symbole

Angegeben werden ausschließlich Abkürzungen, die nicht in einem deutschen Wörterbuch zu finden sind:

Th.	Theorem;
Le.	Lemma;
Ex.	Example;
Co.	Corollary;
Re.	Realteil;
Im.	Imaginärteil;
s. t.	subject to;
CAS	Computeralgebrasystem;
NP-schwer	Bezeichnung eines Optimierungsproblems, für das eine nichtdeterministische Turingmaschine existiert, die das Problem in polynomieller Zeit lösen kann [44, Definitionen 15.15, 15.34];
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen;
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen;
i	Imaginäre Einheit;
π	Kreiszahl;
$\lightning$	Widerspruch;
$\forall\, B_i$	Gültigkeit für alle Ausdrücke B_i;
$\exists\, B$	Existenz des Ausdrucks B;
$\nexists\, B$	Nichtexistenz des Ausdrucks B;
$B = C$	Gleichheit der Ausdrücke B und C;
$B \neq C$	Ungleichheit der Ausdrücke B und C;
$B - C$	Subtrahiere Ausdruck C von Ausdruck B;
$B + C$	Addition der Ausdrücke B und C;
$\sum_{i=1}^{n} B_i$	Addition der n Ausdrücke $B_1, B_2, \ldots, B_n$;
$B\,C$	Multiplikation der Ausdrücke B und C;
$\prod_{i=1}^{n} B_i$	Multiplikation der n Ausdrücke $B_1, B_2, \ldots, B_n$;
B^n	Der Ausdruck B wird n-mal mit sich selbst multipliziert bzw. n-te Potenz von B;
$B \pm C$	Fallunterscheidung zwischen $B + C$ und $B - C$, alternativ $B \mp C$;
$B > C$	Der Ausdruck B ist echt größer als Ausdruck C, alternativ $C < B$;
$B \gg C$	Der Ausdruck B ist sehr viel größer als Ausdruck C, alternativ $C \ll B$;
$B \geq C$	Der Ausdruck B ist echt größer oder gleich Ausdruck C, alternativ $C \leq B$;
$B \mathrel{(\geq)} C$	Fallunterscheidung zwischen $B > C$ und $B \geq C$, alternativ $C \mathrel{(\leq)} B$;
$\min_{D_j} B_i$	Minimum aller Ausdrücke B_i unter den Nebenbedingungen D_j, alternativ das Maximum $\max_{D_j} B_i$;
$B \cap C$	Durchschnitt zweier Mengen B und C;
$\bigcap_{i=1}^{n} B_i$	Durchschnitt der n Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_n$;
$B \cup C$	Vereinigung zweier Mengen B und C;
$\bigcup_{i=1}^{n} B_i$	Vereinigung der n Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_n$;
$B \setminus C$	Differenz zweier Mengen B und C;
$B \Rightarrow C$	Die Aussage B impliziert Aussage C, alternativ $C \Leftarrow B$;
$B \not\Rightarrow C$	Die Aussage B impliziert Aussage C nicht, alternativ $C \not\Leftarrow B$;
$B \Leftrightarrow C$	Äquivalenz zweier Aussagen B und C;
$a \in B$	Die Menge B enthält das Element a;

$B := C$	Der Ausdruck B wird definiert durch Ausdruck C, alternativ $C =: B$;
$\emptyset$	Leere Menge;
∞	Positiv unendlich;
$-\infty$	Negativ unendlich;
$\varphi : B \to C$	Abbildung φ mit Definitionsmenge B und Zielmenge C;
$G = (N, E)$	Ein ungerichteter Graph G mit endlicher Knotenmenge $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ und Kantenmenge E;
$E(G)$	Kantenmenge des Graphen G;
$\binom{N}{2}$	Menge aller möglichen Paarungen $\{i, j\}$ mit $i, j \in N$, $i \neq j$;
$\lvert N \rvert$	Kardinalität der Knotenmenge N;
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient von n über k;
$B \subseteq C$	B ist Teilmenge oder Untergraph von C;
$B \cong C$	Isomorphie der Graphen B und C;
$B \ncong C$	Die Graphen B und C sind nicht isomorph;
δ_{ij}	Kronecker-Symbol, gleich Eins für $i = j$ und gleich Null für $i \neq j$;
ij	Ungerichtete Kante, inzident zu den verschiedenen Knoten i und j, alternativ $\{i, j\}$;
K_n	Vollständiger Graph auf n Knoten;
$K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$	Vollständig r-partiter Graph auf r disjunkten Knotenmengen $\lvert N_i \rvert = n_i$;
K_s^r	Vollständig r-partiter Graph auf r disjunkten Knotenmengen $\lvert N_i \rvert = s$;
$G \dot{+} G'$	Direkte Summe zweier Graphen G und G';
$G[N']$	Von $N' \subseteq N$ induzierter Untergraph des Graphen $G = (N, E)$;
$\overline{G}$	Komplement des Graphen G;
$d_G(i)$	Grad des Knotens i vom Graphen G;
$\delta(G)$	Minimalgrad des Graphen G;
$\Delta(G)$	Maximalgrad des Graphen G;
$d(G)$	Durchschnittsgrad des Graphen G;
$\varepsilon(G)$	Verhältnis $\lvert E \rvert / \lvert N \rvert$ der Kantenanzahl zur Knotenanzahl im Graphen G;
$d_G(i, j)$	Abstand zweier Knoten i und j des Graphen G;
$g(G)$	Taillenweite des Graphen G;
$p(G)$	Umfang des Graphen G;
$v(G)$	Knotenzusammenhang des Graphen G;
$e(G)$	Kantenzusammenhang des Graphen G;
$\operatorname{diam}(G)$	Durchmesser des Graphen G;
$\operatorname{rad}(G)$	Radius des Graphen G;
$M_{m,n}(\mathbb{R})$	Linearer Raum aller $m \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen;
$M_n(\mathbb{R})$	Linearer Raum aller $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen;
$\mathbb{R}^n$	Linearer Raum aller Spaltenvektoren aus $M_{n,1}(\mathbb{R})$;
$\mathbb{C}^n$	Linearer Raum aller Spaltenvektoren aus $M_{n,1}(\mathbb{C})$;
S_n	Menge aller symmetrischen $n \times n$-Matrizen;
S_n^+	Menge aller positiv semidefiniten $n \times n$-Matrizen;
S_n^{++}	Menge aller positiv definiten $n \times n$-Matrizen;
$B^\top$	Transponierte Matrix B, alternativ für einen Vektor;
$\det(B)$	Determinante der Matrix B;
$\operatorname{rg}(B)$	Rang der Matrix B;
$\operatorname{tr}(B)$	Spur der Matrix B;
I	Einheitsmatrix aus $M_n(\mathbb{R})$;
(a, b)	Offenes Intervall reeller Zahlen ohne die Intervallgrenzen $a < b$;
$[a, b]$	Abgeschlossenes Intervall reeller Zahlen mit den Intervallgrenzen $a < b$;

$\langle x, y \rangle$	Skalarprodukt zweier Vektoren x und y;
$\|x\|_2$	Euklidische Norm des Vektors x;
$\lambda(B)$	Eigenwert der Matrix oder des Graphen B;
$\lambda_k(B)$	Der k-te Eigenwert der Matrix oder des Graphen B, betragsmäßig aufsteigend sortiert für $k = 1, 2, \ldots, n$;
U_λ	Zum Eigenwert λ gehörender Eigenunterraum;
$U^\perp$	Orthogonales Komplement des Unterraums $U \subseteq \mathbb{R}^n$;
$\mathrm{span}(U)$	Aufspannung bzw. lineare Hülle des Unterraums $U \subseteq \mathbb{R}^n$;
$\gamma(\lambda)$	Geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ;
$\alpha(\lambda)$	Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ;
$\chi_B(\lambda)$	Charakteristisches Polynom der Matrix oder des Graphen B;
$\mathrm{sp}(B)$	Spektrum der Matrix oder des Graphen B;
Λ	Diagonalmatrix mit den Eigenwerten einer symmetrischen $n \times n$-Matrix auf der Hauptdiagonalen;
$y_k(B)$	Eigenvektor $y_k = \left(y_k^1, y_k^2, \ldots, y_k^n\right)^\top$ zum Eigenwert λ_k der Matrix oder des Graphen B;
$\overline{y}_k(B)$	Normierter Eigenvektor $y_k(B) \,/\, \|y_k(B)\|_2$ zum Eigenwert λ_k der Matrix oder des Graphen B;
α_{ij}^2	Entspricht $\left(\overline{y}_2^i - \overline{y}_2^j\right)^2$;
β	Entspricht $\lambda_3(G) - \lambda_2(G)$;
P_{n-1}	Pfad der Länge $n-1$ auf n Knoten;
C_n	Kreis der Länge n auf n Knoten;
$C_{n,j}$	Lollipop-Graph auf n Knoten mit Taillenweite j;
$G_{k,l}^m$	Spezieller Graph aus Abbildung 3.1 (iii);
$G_{p,q}^m$	Spezieller Graph aus Abbildung 3.28 für $m = 1, 2, 3$;
$T_{p,q}^m$	Spezieller Baum aus Abbildung 3.28 für $m = 1, 2, 3$;
O_n	Der Graph auf n Knoten mit leerer Kantenmenge;
W_n	Rad auf n Knoten;
$A(G)$	Adjazenzmatrix des Graphen G;
$L(G)$	Laplace-Matrix des Graphen G;
$L_u(G)$	Laplace-Untermatrix des Knotens u eines Graphen G, entsteht durch Streichung der u-ten Zeile und u-ten Spalte von $L(G)$;
$\mathbf{1}$	Spaltenvektor aus $M_{n,1}(\mathbb{R})$, alle Einträge gleich Eins;
E_{ij}	Die Matrix $L(G - E + ij)$, deren ii- und jj-Eintrag gleich Eins, ij- und ji-Eintrag gleich minus Eins und alle restlichen Einträge gleich Null sind;
E_{ii}	Die Matrix, deren ii-Eintrag gleich Eins und alle restlichen Einträge gleich Null sind;
B_n	Entspricht $L_u(P_n)$ mit Endknoten u von P_n;
H_n	Entspricht $L_v(L_w(P_{n+1}))$ mit Anfangsknoten v und Endknoten w von P_{n+1};
$\lfloor a \rfloor$	Die reelle Zahl $a > 1$ wird auf die größte natürliche Zahl $b \leq a$ abgerundet;
$\lceil a \rceil$	Die reelle Zahl $a > 0$ wird auf die kleinste natürliche Zahl $b \geq a$ aufgerundet.

Literaturverzeichnis

[1] Barik, S. und Pati, S.: *On algebraic connectivity and spectral integral variations of graphs*, in: Linear Algebra and its Applications 397 (2005), S. 209–222.

[2] Beineke, L. W. und Wilson, R. J.: *Topics in Algebraic Graph Theory*, in: Encyclopedia of Mathematics, Volume 102, Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[3] Berg, L.: *Lineare Gleichungssysteme mit Bandstruktur und ihr asymptotisches Verhalten*, Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986.

[4] Biggs, N. L.: *Algebraic Graph Theory*, 2. Auflage. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[5] Bıyıkoğlu, T., Leydold, J. und Stadler, P. F.: *Laplacian Eigenvectors of Graphs*, in: Lecture Notes in Mathematics, Volume 1915, hrsg. von Morel, J.-M., Takens, F. und Teissier, B. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[6] Brünner, A.: *Rechner für Eigenwerte und Eigenvektoren*, URL: `http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/eigenwert2.htm` (besucht am 05. 10. 2013).

[7] Bunch, J. R., Nielsen, C. P. und Sorensen, D. C.: *Rank-one modification of the symmetric eigenproblem*, in: Numerische Mathematik 31 (1978), S. 31–48.

[8] Chung, F. R. K.: *Spectral Graph Theory*, 2. Auflage. Providence, Rhode Island: CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Number 92, American Mathematical Society, 1997.

[9] Cvetković, D. M., Doob, M. und Sachs, H.: *Spectra of Graphs – Theory and Applications*, 3. Auflage. Heidelberg: Johann Ambrosius Barth Verlag, 1995.

[10] Cvetković, D. M. et al.: *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*, in: Annals of Discrete Mathematics, Volume 36, Amsterdam: North-Holland Publishing, 1988.

[11] Demirci, M. F., van Leuken, R. H. und Veltkamp, R. C.: *Indexing through Laplacian spectra*, in: Computer Vision and Image Understanding 110.3 (2008), S. 312–325.

[12] Diestel, R.: *Graphentheorie*, 3. Auflage. Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.

[13] Fallat, S. M. und Kirkland, S.: *Extremizing algebraic connectivity subject to graph theoretic constraints*, in: Electronic Journal of Linear Algebra 3 (1998), S. 48–74.

[14] Fallat, S. M., Kirkland, S. und Pati, S.: *Minimizing algebraic connectivity over connected graphs with fixed girth*, in: Discrete Mathematics 254 (2002), S. 115–142.

[15] Fan, Y.: *On spectral integral variations of graphs*, in: Linear and Multilinear Algebra 50 (2002), S. 133–142.

[16] Faria, I.: *Permanental roots and the star degree of a graph*, in: Linear Algebra and its Applications 64 (1985), S. 255–265.

[17] Fiedler, M.: *A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory*, in: Czechoslovak Mathematical Journal 25.4 (1975), S. 619–633.

[18] Fiedler, M.: *Algebraic connectivity of graphs*, in: Czechoslovak Mathematical Journal 23.98 (1973), S. 298–305.

[19] Fiedler, M.: *Bounds for eigenvalues of doubly stochastic matrices*, in: Linear Algebra and its Applications 5 (1972), S. 299–310.

[20] Fischer, G.: *Lineare Algebra*, 17. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2010.

[21] Gantmacher, F. R.: *Matrizentheorie*, Berlin: Springer-Verlag, 1986.

[22] Ghosh, A. und Boyd, S.: *Growing well-connected graphs*, in: Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (2006), S. 6605–6611.

[23] Godsil, C. D. und Royle, G. F.: *Algebraic Graph Theory*, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.

[24] Gregory, R. T. und Karney, D. L.: *A Collection of Matrices for Testing Computational Algorithms*, New York: Wiley-Interscience, 1969.

[25] Grone, R. und Merris, R.: *Ordering trees by algebraic connectivity*, in: Graphs and Combinatorics 6 (1990), S. 229–237.

[26] Grone, R., Merris, R. und Sunder, V. S.: *The Laplacian spectrum of a graph*, in: SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 11 (1990), S. 218–238.

[27] Guo, J.-M.: *A conjecture on the algebraic connectivity of connected graphs with fixed girth*, in: Discrete Mathematics 308 (2008), S. 5702–5711.

[28] Guo, J.-M.: *On the second largest Laplacian eigenvalue of trees*, in: Linear Algebra and its Applications 404 (2005), S. 251–261.

[29] Guo, J.-M.: *The algebraic connectivity of graphs under perturbation*, in: Linear Algebra and its Applications 433 (2010), S. 1148–1153.

[30] Guo, J.-M., Shiu, W. C. und Li, J.: *The algebraic connectivity of lollipop graphs*, in: Linear Algebra and its Applications 434 (2011), S. 2204–2210.

[31] Guo, S.-G.: *The largest eigenvalues of Laplacian matrices of unicyclic graphs*, in: Applied Mathematics – A Journal of Chinese Universities Series A 16.2 (2001), S. 131–135.

[32] Guo, S.-G. und Wang, Y.-F.: *Ordering cacti with n vertices and k cycles by their Laplacian spectral radii*, in: Publications de l'Institut Mathématique 92.106 (2012), S. 117–125.

[33] Haemers, W. H. und Spence, E.: *Enumeration of cospectral graphs*, in: European Journal of Combinatorics 25.2 (2004), S. 199–211.

[34] Helmberg, C.: *Semidefinite Programming / Semidefinite Optimization*, URL: `http://www-user.tu-chemnitz.de/~helmberg/semidef.html` (besucht am 07. 11. 2013).

[35] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, 14. Auflage. Stuttgart: B. G. Teubner Verlag, 2001.

[36] Hogben, L. et al.: *Handbook of Linear Algebra*, in: Discrete Mathematics and its Applications, hrsg. von Rosen, K. H. Boca Raton: CRC Press, 2007.

[37] Horn, R. A. und Johnson, C. R.: *Matrix Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[38] Kelmans, A. K.: *The number of trees of a graph I*, in: Avtomatika i Telemekhanika (Automation and Remote Control) 26 (1965), S. 2194–2204.

[39] Kelmans, A. K.: *The number of trees of a graph II*, in: Avtomatika i Telemekhanika (Automation and Remote Control) 27 (1966), S. 56–65.

[40] Kirkland, S.: *A bound on the algebraic connectivity of a graph in terms of the number of cutpoints*, in: Linear and Multilinear Algebra 47 (2000), S. 93–103.

[41] Kirkland, S. und Fallat, S. M.: *Perron components and algebraic connectivity for weighted graphs*, in: Linear and Multilinear Algebra 44 (1998), S. 131–138.

[42] Kirkland, S. und Neumann, M.: *Algebraic connectivity of weighted trees under perturbation*, in: Linear and Multilinear Algebra 42 (1997), S. 187–203.

[43] Kirkland, S., Neumann, M. und Shader, B. L.: *Characteristic vertices of weighted trees via Perron values*, in: Linear and Multilinear Algebra 40 (1996), S. 311–325.

[44] Korte, B. und Vygen, J.: *Kombinatorische Optimierung*, 4. Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[45] Liu, Y., Shao, J.-Y. und Yuan, X.-Y.: *Some results on the ordering of the Laplacian spectral radii of unicyclic graphs*, in: Discrete Applied Mathematics 156 (2008), S. 2679–2697.

[46] Liu, Ying und Liu, Yue: *Ordering of unicyclic graphs with Laplacian spectral radii*, in: Journal of Tongji University 36.6 (2008), S. 841–843.

[47] Maas, C.: *Transportation in graphs and the admittance spectrum*, in: Discrete Applied Mathematics 16 (1987), S. 31–49.

[48] Mathews, J. H. und Fink, K. D.: *Numerical Methods Using MATLAB*, 3. Auflage. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999.

[49] Merris, R.: *Characteristic vertices of trees*, in: Linear and Multilinear Algebra 22 (1987), S. 115–131.

[50] Merris, R.: *Laplacian graph eigenvectors*, in: Linear Algebra and its Applications 278 (1998), S. 221–236.

[51] Mohar, B.: *The Laplacian spectrum of graphs*, in: Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Vol. 2, hrsg. von Alavi, Y. et al. New York: John Wiley & Sons, 1991, S. 871–898.

[52] Mohar, B. und Poljak, S.: *Eigenvalues in combinatorial optimization*, in: Combinatorial and Graph-Theoretical Problems in Linear Algebra, hrsg. von Brualdi, R. A., Friedland, S. und Klee, V. New York: IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Vol. 50, Springer-Verlag, 1993, S. 107–151.

[53] Mosk-Aoyama, D.: *Maximum algebraic connectivity augmentation is NP-hard*, in: Operations Research Letters 36 (2008), S. 677–679.

[54] Patra, K. L. und Lal, A. K.: *The effect on the algebraic connectivity of a tree by grafting or collapsing of edges*, in: Linear Algebra and its Applications 428 (2008), S. 855–864.

[55] Shao, J.-Y., Guo, J.-M. und Shan, H.-Y.: *The ordering of trees and connected graphs by algebraic connectivity*, in: Linear Algebra and its Applications 428 (2008), S. 1421–1438.

[56] Shiu, W. C., Guo, J.-M. und Li, J.: *The minimum algebraic connectivity of caterpillar unicyclic graphs*, in: Electronic Journal of Linear Algebra 22 (2011), S. 838–848.

[57] So, W.: *Rank one perturbation and its application to the Laplacian spectrum of a graph*, in: Linear and Multilinear Algebra 46 (1999), S. 193–198.

[58] Sydney, A., Scoglio, C. und Gruenbacher, D.: *Optimizing algebraic connectivity by edge rewiring*, in: Applied Mathematics and Computation 219.10 (2013), S. 5465–5479.

[59] Weinstein, A. und Stenger, W.: *Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues: Theory and Ramifications*, New York: Academic Press, 1972.

[60] Yueh, W.-C.: *Eigenvalues of several tridiagonal matrices*, in: Applied Mathematics E-Notes 5 (2005), S. 66–74.

[61] Zhang, X. und Zhang, H.: *The Laplacian spectral radius of some bipartite graphs*, in: Linear Algebra and its Applications 428 (2008), S. 1610–1619.

[62] Zhu, P. und Wilson, R. C.: *A study of graph spectra for comparing graphs*, in: British Machine Vision Conference, Oxford (2004), S. 679–688.

[63] de Abreu, N. M. M.: *Old and new results on algebraic connectivity of graphs*, in: Linear Algebra and its Applications 423 (2007), S. 53–73.

[64] de Verdière, Y. C.: *Spectres de Graphes*, in: Cours Spécialisés 4, Paris: Société Mathématique de France, 1998.

[65] van Lint, J. H. und Seidel, J. J.: *Equilateral point sets in elliptic geometry*, in: Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen, Series A: Mathematical Sciences 69 (1966), S. 335–348.

Danksagung

Das Erstellen einer wissenschaftlichen Arbeit erfordert Rahmenbedingungen, die ein effizientes Denken und reibungsloses Schreiben ermöglichen. Trotz alleinigem Regiment des Verfassers kann sie niemals nur das Werk einer einzelnen Person bedeuten. Ich möchte mich mit diesen Zeilen bei allen Menschen bedanken, die mich in meinem Studium der Wirtschaftsmathematik begleitet und vornehmlich in dessen Endphase unterstützt haben.

Herrn Professor Helmberg fühle ich mich zu besonderem Dank verpflichtet. Er weckte mein Interesse an einem für mich anfangs unbekannten Themengebiet, stand mir jederzeit für konstruktive Gespräche zur Verfügung und unterstützte mich mit seinen Anregungen, diese Arbeit in akademische Bahnen zu lenken. Ebenso darf meine Familie nicht unerwähnt bleiben. Ich kann zweifellos behaupten, dass sich der Kreis jener mir am nächsten stehenden Menschen im Laufe des letzten Jahres mehr als verdoppelt hat. Ohne eure Liebe und Fürsorge, in die ihr mich auch dann noch gebettet habt, als ich mit schwer zu ertragender Miene gegen geistig fruchtlose Phasen ankämpfte, hätte diese Arbeit wohl nie ein Ende gefunden. Zu guter Letzt bedanke ich mich bei all den großartigen Menschen, zu denen ich Freundschaften pflege und die mein Leben bereichern. Es ist ein Privileg, solch ein entlastendes Gegengewicht zur universitären Anstrengung haben zu dürfen und mit euch den Akku für angestrebte Leistungen immer wieder neu aufladen zu können. Nochmals vielen herzlichen Dank!

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides Statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe. Die Arbeit ist frei von Plagiaten. Sämtliche Aussagen, die wörtlich oder sinngemäß aus gedruckten oder elektronischen Veröffentlichungen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Die vorliegende Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keinem anderen Prüfer als Prüfungsleistung eingereicht.

Sandro Grunert Chemnitz, 29. November 2013