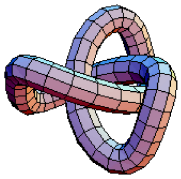
TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK



Erstellen von wegeoptimierten Stundenplänen mit Diskreten Methoden

An der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz eingereichte

Diplomarbeit

Vorgelegt von

Anja Lau

geboren am 8. Dezember 1984 in Burgstädt

Betreuer: Prof. Dr. Christoph Helmberg

Chemnitz, den 2. Juni 2008

Aufgabenstellung

Ein typisches Problem bei der Stundenplanerstellung für Universitäten besteht darin, dass Vorlesungssäle oft räumlich weit auseinanderliegen und in der Planung Fahrzeiten der Studierenden berücksichtigt werden müssen. Am Beispiel der Stundenplanung der TU Chemnitz soll ein diskretes Optimierungsmodell für diese Problematik entworfen und diskutiert sowie nach Möglichkeit an realen Daten erprobt werden.

Einleitung

Ein jedes Semester an Universitäten bzw. jährlich an Schulen auftretendes Problem ist die Erstellung von Stundenplänen für die Einrichtung. Dies ist ein sehr aufwändiger Prozess, bei dem auch heute noch viele Schritte von Hand ausgeführt werden. Dabei müssen viele Faktoren berücksichtigt werden und eine Vielzahl von Interessen spielt eine Rolle. Aus diesem Grund versucht man seit Jahren mathematische Modelle und Lösungsverfahren zu entwickeln, um diesen Prozess zu automatisieren, wobei die Notwendigkeit durch eine steigende Zahl der Studiengänge und Wahlmöglichkeiten noch wächst.

Eines der ersten Modelle zum Aufbau eines Stundenplans stammt von C. C. Gotlieb [17], wobei lediglich Pläne für Schulen betrachtet werden. Schon hier werden Binärvariablen eingesetzt, um festzulegen, welche Veranstaltung wann und wo stattfindet. Allerdings sucht man meist nur nach zulässigen Lösungen, d. h. man legt keine Gütekriterien fest. Weiterhin gibt es Varianten, bei denen Unzulässigkeiten erlaubt sind aber minimiert werden sollen. Ähnliche Ansätze werden auch bei der Erstellung von Prüfungsplänen verwendet [7, 13], wobei hier Zeit und Ort jeder Prüfung bestimmt werden.

Da man nachgewiesen hat, dass Stundenplanungsprobleme im Allgemeinen **NP**-schwer sind ([8, 11] oder Satz 3.3), gibt es zwei große Gruppen von Lösungsansätzen. Auf der einen Seite stehen exakte Lösungsverfahren, wobei zunächst meist boolesche Matrizen genutzt wurden [9, 23]. Später wurden Verfahren zur Bestimmung von Graphen-Färbungen [21], vgl. Definition 3.2, eingesetzt. In neueren Arbeiten [6] findet eine Vielzahl von Methoden der ganzzahligen Optimierung Verwendung, was vor allem durch die Verbesserung der Rechentechnik möglich wurde.

Auf der anderen Seite versucht man Lösungen mithilfe von heuristischen Verfahren, wie Simulated Annealing [2], genetischen Algorithmen [14], evolutionären Algorithmen [4, 27] und Tabu-Search [26], zu gewinnen, die auf lokaler Suche beruhen. Allerdings ist es hier meist schwer abzuschätzen, wie gut die Lösung ist.

Bisher unbeachtet blieb in den Arbeiten die Problematik von mehreren Standorten und die dadurch notwendigen Wechsel. Daneben gehen die meisten Arbeiten davon aus, dass bekannt ist, welche Veranstaltung jeder Studierende besuchen möchte oder dass es nur verbindliche Veranstaltungen gibt. Wir werden hier ein Modell vorstellen, das einerseits die Wegeproblematik berücksichtigt, andererseits auch bestimmte Überschneidungen von Veranstaltungen zulässt.

Außerdem zeigen wir, wie man mittels eines Bündelverfahrens und dem Einsatz von Rundungs- und Verbesserungsheuristiken gute Ergebnisse erzielen kann. Dabei betrachten wir das Lagrange-Duale des Problems und nutzen die Lagrange-Dekomposition aus. Auf diesem Weg erhält man innerhalb von etwa zwei Stunden gute Lösungen im Gegensatz von bis zu zwölf Stunden bei Verwendung des kommerziellen „state-of-the-art“ Lösers **Cplex** angewandt auf die lineare Relaxation des Problems bzw. mehreren Tagen bei Optimierung durch den **MIP**-Löser in **Cplex**, der auch nach dieser Zeit keine oder nur schlechtere Lösungen findet. Die Lösungen bei Einsatz des Bündelverfahrens sind dabei nachweislich weniger als 10 % von der Optimallösung des Modells entfernt. Dazu sei erwähnt, dass es uns im Allgemeinen nicht um die Bestimmung der Optimallösung, sondern nur um die Bestimmung möglichst guter Lösungen im Sinne unserer Zielstellungen geht.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabenstellung 2

Einleitung 3

Notation 6

1 Problemstellung 8
- 1.1 Studiengruppen . . . 9
- 1.2 Lehrveranstaltungen . . . 9
- 1.3 Dozenten . . . 10
- 1.4 Planungseinheiten . . . 11
- 1.5 Standorte und Räume . . . 11
- 1.6 Zielstellungen (für die Studiengruppen) . . . 12

2 Modellierung 13
- 2.1 Anpassungen des Problems an unser Modell . . . 13
  - 2.1.1 Vereinfachung der Lehrveranstaltungen . . . 13
  - 2.1.2 Raumgruppen . . . 14
- 2.2 Binärvariablen und erste Nebenbedingungen . . . 15
  - 2.2.1 Nebenbedingungen . . . 16
  - 2.2.2 Raumgruppen-Nebenbedingungen . . . 17
- 2.3 Modellierung mit Graphen . . . 18
- 2.4 Zulässigkeit . . . 25
- 2.5 Zielfunktion . . . 26
  - 2.5.1 Die Graphenvariablen . . . 26
  - 2.5.2 Ausgleich über die Tage – Extravariablen . . . 33
  - 2.5.3 Die Binärvariablen . . . 35
- 2.6 Zuweisung der Räume . . . 36
- 2.7 Behandlung von Symmetrien . . . 37
- 2.8 Weitere Möglichkeiten . . . 39

3 Lösungsansätze 41
- 3.1 Komplexität von **SPOPT** – **NP**-Vollständigkeit . . . 41
- 3.2 Lösung von **SPOPT** . . . 42
  - 3.2.1 **SPOPT** als ganzzahlige Optimierungsaufgabe und Relaxation . . . 42
  - 3.2.2 Formulierung von (IPR) als **LP** . . . 44
  - 3.2.3 Lagrange-Duales und Lagrange-Relaxation . . . 44
  - 3.2.4 Dekomposition . . . 46
  - 3.2.5 Bündelverfahren . . . 47
  - 3.2.6 Anwendung auf **SPOPT** . . . 48
  - 3.2.7 Einfache Rundungsheuristik . . . 49
  - 3.2.8 Matrixrunden . . . 53

3.2.9 Verbesserungsheuristiken 56
3.3 Implementierung und numerische Ergebnisse 59

4 Ausblick **65**

Literatur **67**

Eidestattliche Erklärung **70**

Abbildungsverzeichnis

1 Darstellung der Knotenmenge am Beispiel 19
2 Darstellung der Start-/Ende-/Start-Ende-/Pause-/Wartekanten am Beispiel 21
3 Stückweise lineare Zielfunktion 22
4 Graphenausschnitt mit allen möglichen Kanten in diesem Bereich 24
5 Darstellung der alten (schwarz) und neuen (rot und fett) Wechselkanten . . 27
6 Verdeutlichung der Nebenbedingungen (17), (18) 29
7 Verdeutlichung der Nebenbedingung (19) 30
8 Konvexe Zielfunktion der Variablen $x^{s,i}_{w,d}, (s,i,w,d) \in \mathcal{X}^{E_1}$ mit $m = m^i_s$ . . . 35
9 Matrixrunden am Beispiel von vier Veranstaltungen und zwei Planungseinheiten 55

Tabellenverzeichnis

1 Stundenplan für eine Studiengruppe an der TU Chemnitz (70 Planungseinheiten) 8
2 Zahl der Veranstaltungen, Studiengruppen und Dozenten bei den Testläufen 61
3 Variablenanzahl bei den Testläufen 61
4 Übersicht über die numerischen Ergebnisse bei Verwendung des Innere-Punkte-Verfahrens 63
5 Übersicht über die numerischen Ergebnisse bei Verwendung des Bündelverfahrens 63

Algorithmenverzeichnis

1 Zuweisung der Lehrveranstaltungen zu Räumen 37
2 Rundungsheuristik für Startlösung 52
3 Verbesserungsheuristik - Unzulässigkeiten 56
4 Verbesserungsheuristik - Orte 57
5 Verbesserungsheuristik - einzelne LV 58
6 Verbesserungsheuristiken - zusammengehörende LV 58
7 Verbesserungsheuristik - obligatorische LV eines Tages 59
8 Verbesserungsheuristik - obligatorische LV jeweils einer Studiengruppe . . . 59

Notation

Wir wollen im Folgenden die in der Arbeit verwendete Notation kurz einführen. Wie üblich bezeichne

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen,
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0,
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N})$ die Menge aller ganzen Zahlen und
- $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen.

Sei M eine Menge, dann ist

- $\mathcal{P}(M) := \{U \colon U \subset M\}$ die Potenzmenge über M, d. h. die Menge aller Teilmengen von M,
- $M^\bullet := \{(m_1, \ldots, m_n) \colon m_1, \ldots, m_n \in M, n \in \mathbb{N}_0\}$, die Menge aller geordneten n-Tupel von M beliebiger Länge $n \in \mathbb{N}_0$ und
- $|M|$ die Kardinalität der Menge M.

Betrachten wir außerdem ein $x \in \mathbb{R}$, dann bezeichne $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \colon n \leq x\}$ und $\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \colon n \geq x\}$.
Für das euklidische Skalarprodukt zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)$.

1 Problemstellung

Ziel dieser Arbeit ist es, Stundenpläne für universitäre Einrichtungen, im Speziellen für die TU Chemnitz (TUC), mit Methoden der diskreten Optimierung automatisch zu erstellen. Dieses Problem bezeichnen wir im Folgenden mit **SPOPT** (Stundenplan-Optimierung).

Ein Stundenplan ist aufgeteilt in *Planungseinheiten* (s. Abschnitt 1.4), d. h. feste Zeiträume, an denen *Lehrveranstaltungen* (LV) (s. 1.2) stattfinden können (z.B. montags, 7.30 - 9.00 Uhr). Neben der Bestimmung der Planungseinheit sind für jede Veranstaltung der *Standort* (davon gibt es an der TU Chemnitz vier, z. B. Straße der Nationen, Reichenhainer Straße) und der konkrete *Raum* (s. 1.5) festzulegen. Dabei muss die Planung auf zwei Personengruppen abgestimmt werden. Auf der einen Seite müssen die *Dozenten* (s. 1.3), die die Veranstaltungen leiten, und auf der anderen Seite die *Studierenden* (s. 1.1) beachtet werden.

Auf diese Aspekte wollen wir im Folgenden einzeln eingehen.

Woche 1	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
1. Einheit (7.30-9.00)			LV 6 Dozent 4 Raum 3, Ort 2	LV 8 Dozent 2 Raum 4, Ort 2	LV 10 Dozent 6 Raum 1, Ort 1
2. Einheit (9.15-10.45)	LV 1 Dozent 1 Raum 1, Ort 2	LV 3 Dozent 2 Raum 2, Ort 2	LV 7 Dozent 1 Raum 4, Ort 2	**Warten**	
3. Einheit (11.30-13.00)	LV 2 Dozent 2 Raum 1, Ort 2	LV 4 Dozent 3 Raum 1, **Ort 2**		LV 9 Dozent 5 Raum 1, Ort 2	
4. Einheit (13.45-15.15)		LV 5 Dozent 4 Raum 3, **Ort 1**			
5. Einheit (15.30-17.00)					
6. Einheit (17.15-18.45)					
7. Einheit (19.00-20.30)					
Woche 2	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
1. Einheit (7.30-9.00)			LV 6 Dozent 4 Raum 3, Ort 2	LV 8 Dozent 2 Raum 4, Ort 2	LV 10 Dozent 6 Raum 1, Ort 1
2. Einheit (9.15-10.45)	LV 1 Dozent 1 Raum 1, Ort 2	LV 3 Dozent 2 Raum 2, Ort 2	LV 7 Dozent 1 Raum 4, Ort 2	**Warten**	LV 11 Dozent 5 Raum 2, Ort 1
3. Einheit (11.30-13.00)		LV 4 Dozent 3 Raum 1, **Ort 2**		LV 9 Dozent 5 Raum 1, Ort 2	
4. Einheit (13.45-15.15)		LV 5 Dozent 4 Raum 3, **Ort 1**			
5. Einheit (15.30-17.00)					
6. Einheit (17.15-18.45)					
7. Einheit (19.00-20.30)					

Tabelle 1: Stundenplan für eine Studiengruppe an der TU Chemnitz (70 Planungseinheiten)

1.1 Studiengruppen

Im Mittelpunkt unserer Planungen stehen die Studierenden, welche in Form von *Studiengruppen* betrachtet werden. Darunter versteht man die Zusammenfassung von Studierenden in Gruppen, die durch den Studiengang, Fachsemester und eventuell weitere Charakteristika wie Studienrichtung oder Übungsgruppen definiert werden. An der TU Chemnitz wäre so eine Studiengruppe beispielsweise der Bachelor-Studiengang Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften im 3. Fachsemester.

Aus den jeweiligen Studienordnungen ergeben sich die zu besuchenden Lehrveranstaltungen, welche sich in die drei Klassen

- *obligatorisch* (obl),
- *wahlobligatorisch* (wobl) und
- *fakultativ* (fak)

einteilen lassen. Obligatorische Lehrveranstaltungen sind von allen Studierenden der Studiengruppe zu belegen. Unter den wahlobligatorischen Veranstaltungen ist hingegen eine Mindestanzahl zu besuchen, die Auswahl ist dabei den Studierenden freigestellt. Ein Zusatzangebot bilden fakultative Lehrveranstaltungen, die für das Studium empfohlen, aber nicht zwingend erforderlich sind.

Weiterhin kennen wir die Anzahl der Studierenden pro Studiengruppe, wobei häufig nur Schätzungen vorliegen. Das liegt beispielsweise daran, dass zu Beginn der Planung des Stundenplanes an den Universitäten keine genauen Zahlen zu den Neuimmatrikulationen, vor allem bei Studiengruppen im ersten Semester, vorliegen.

Daneben können Standorte angegeben werden, auf die sich möglichst die Mehrzahl der Veranstaltungen konzentrieren soll. Das kann beispielsweise der Ort mit dem Sitz der jeweiligen Fakultät sein. Bei den mathematischen Studiengruppen an der TU Chemnitz ist das z. B. der Standort Reichenhainer Straße. Komplizierter ist es jedoch bei Maschinenbau-Studiengruppen, da sich außer in der Raabestraße an allen weiteren Standorten Labore und Teststrecken befinden.

1.2 Lehrveranstaltungen

Jede *Lehrveranstaltung* (LV) wird von einem oder mehreren Dozenten durchgeführt. Mehrere Dozenten sind etwa bei Forschungsseminaren und speziellen Praktika keine Seltenheit.

Von jeder Lehrveranstaltung kennen wir

- ihre Art bzw. ihren Typ, z. B. Vorlesung, Übung, Seminar,
- die möglichen Planungseinheiten, an denen sie stattfinden kann,
- die Frequenz, in der sie gehalten werden soll (z. B. ein- oder zweiwöchentlich) und
- die Anzahl der Planungseinheiten, über die sich die Veranstaltung hintereinander erstreckt.

Im Normalfall ist dies genau eine Einheit, manche Praktika können aber auch einen ganzen Tag andauern.

Für eine Lehrveranstaltung ohne vorgegebenen Raum beschreibt die angeforderte Raumgröße/Sitzanzahl eine Schätzung für die Studierendenzahl, die die Veranstaltung hört. Daneben können weitere Kriterien, wie das Vorhandensein einer großen Tafelfläche oder technischer Gegenstände, wie Beamer oder Projektoren, gefordert werden. Es ist aber auch denkbar, dass gewisse Ausstattungsmerkmale ausgeschlossen werden sollen. Im Fall der TU Chemnitz liegen uns derzeit dazu keine detaillierten Daten vor.

Wie zuvor angedeutet, ist es möglich, die erlaubten Orte bzw. sogar den Raum oder die Räume anzugeben, in denen die Veranstaltung stattfinden soll. Dabei wollen wir im Folgenden davon ausgehen, dass für eine Lehrveranstaltung nur dann mehrere Räume für die gleiche Planungseinheit, beispielsweise ein Hörsaal und ein Computerpool für eine Informatik-Vorlesung, einzuplanen sind, falls dies explizit gefordert wird. Ansonsten gehen wir von *genau einem* Raum aus.

Weiterhin sind Verbindungen zwischen den Veranstaltungen denkbar, z. B. dass sie parallel liegen oder sich eben gerade nicht überschneiden dürfen. Parallele Veranstaltungen können z. B. in mehrere Gruppen aufgeteilte Praktika sein, die gleichzeitig von verschiedenen Dozenten in unterschiedlichen Räumen gehalten werden sollen. Nicht parallel liegen dürfen hingegen Vorlesungen und die dazugehörigen Übungen. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, dass gewisse Veranstaltungen in der Realität aus mehreren einzelnen Vorlesungen bestehen (die nicht hintereinander stattfinden müssen). In den uns vorliegenden Daten wurden diese in mehrere einzelne Lehrveranstaltungen aufgeteilt. Diese Zusammenhänge würde man in der Planung gern nutzen, um die einzelnen Veranstaltungen auf unterschiedliche Tage zu legen. Im Fall der TU Chemnitz handelt es sich dabei meist um Lehrveranstaltungen über vier Semesterwochenstunden (SWS), d. h. über zwei Einheiten pro Woche (z. B. „Linear Algebra I“). Dabei entspricht eine SWS gerade einer Planungseinheit, wobei innerhalb von zwei Wochen genau eine Einheit belegt wird.

Es gibt in diesem Zusammenhang noch weitere Forderungen, die in den uns vorliegenden Daten enthalten sind. Diese treten zumeist bei Lehrkomplexen auf, die aus einer 3-SWS-Vorlesung (eine Einheit jede Woche und eine Einheit alle zwei Wochen) und einer 1-SWS-Übung (findet alle zwei Wochen statt) bestehen. Dabei sollen, nur um eine Woche versetzt, der zweite Teil der Vorlesung und die Übung am gleichen Tag und in der gleichen Einheit stattfinden. Das ähnelt damit den parallelen Veranstaltungen.

1.3 Dozenten

Mit *Dozenten* seien hier diejenigen Personen bezeichnet, die die Lehrveranstaltungen leiten. Es kann sich dabei um Professoren, wissenschaftliche Mitarbeiter oder studentische Tutoren handeln. Aus den Daten der oben beschriebenen Lehrveranstaltungen ergibt sich außerdem, für welche Lehrveranstaltungen ein Dozent verantwortlich ist. Die Dozenten können zusätzlich angeben, zu welchen Planungseinheiten sie für die Durchführung von Lehrveranstaltungen nicht zur Verfügung stehen. Zu diesen *Dozentensperrzeiten* fehlen uns derzeit die benötigten Daten.

Neben der Einhaltung der Sperrzeiten müssen wir bei der Planung beachten, dass ein

Dozent gleichzeitig nur eine Veranstaltung halten kann und diese auch erreichen können muss, vgl. dazu die Wechselproblematik in Abschnitt 1.5 und die Zielstellungen für die Studierenden in Abschnitt 1.6.

1.4 Planungseinheiten

Die Stundenplanung wird für einen bestimmten Wochen-Rhythmus durchgeführt, z. B. wöchentlich, zweiwöchentlich usw. Jede einzelne Woche gliedert sich dann in mehrere Tage auf, an denen Lehrveranstaltungen in bestimmten Einheiten stattfinden sollen.

An der TU Chemnitz erarbeiten wir einen Stundenplan für einen 2-Wochen-Rhythmus, weil es Lehrveranstaltungen gibt, die nur alle zwei Wochen stattfinden. Planmäßig gibt es pro Wochentag und Woche sieben Einheiten zu je 90 Minuten. Diese sind durch 15-minütige Pausen unterbrochen, wobei es nach der zweiten und dritten Einheit jeweils eine 45-minütige Mittagspause gibt.

Eine *Planungseinheit* wird damit beschrieben durch Woche, Wochentag und Einheit. An der TU Chemnitz sind dies konkret Woche 1 und 2, Wochentage Montag bis Freitag und 7 Einheiten (z. B. 1. Einheit von 7.30 - 9.00 Uhr).

1.5 Standorte und Räume

Jeder *Standort* entspricht einer Zusammenfassung von benachbarten Räumen zwischen denen auch innerhalb kurzer Zeit, an der TU Chemnitz einer 15-minütigen Pause, ein Wechsel problemlos möglich ist. Für jeden der *Räume* ist eine maximale Anzahl an Studierenden angegeben, die von der jeweiligen Lehrveranstaltung nicht überschritten werden darf. Es ist weiterhin klar, dass gleichzeitig maximal eine Veranstaltung in einem bestimmten Raum stattfinden kann. Wie bereits erwähnt, kann man neben der Sitzanzahl auch andere Kriterien, wie die technische Ausstattung, berücksichtigen.

Wichtig in unserer Arbeit sind die Möglichkeiten zwischen den verschiedenen Orten zu wechseln. An der TU Chemnitz gibt es neben vier Hauptstandorten (Straße der Nationen, Reichenhainer Straße, Erfenschlag, Raabestraße) auch dezentral gelegene Gebäude (z. B. Sport- und Schwimmhalle), auf die wir im Weiteren nicht eingehen werden. Wechsel sind pauschal nur in den langen 45-Minuten-Pausen und über Einheiten hinweg umsetzbar, da die Busse im 10-Minuten-Rhythmus fahren und die 15-minütigen Pausen nicht ausreichen. Es sind aber auch andere Varianten denkbar, etwa dass zwischen bestimmten Standorten ein Wechsel nur über eine Einheit hinweg möglich ist oder dass sich die Wechselzeiten zwischen den Standorten unterscheiden.

Die Beschreibung der Räume an der TU Chemnitz ist in den uns zur Verfügung stehenden Daten leider nicht ganz vollständig. So erhalten wir keine Informationen darüber, welche nur einem speziellen Zweck dienen, z. B. ein Chemielabor für entsprechende Praktika, und nicht für andere Lehrveranstaltungen eingeplant werden dürfen. Aktuell gibt es auch einige Räume, bei denen die Anzahl der Sitze nicht angegeben ist. Für diese nehmen wir an, dass sie 40 Sitze haben.

1.6 Zielstellungen (für die Studiengruppen)

In diesem Abschnitt wollen wir uns klar machen, nach welchen Kriterien wir die Güte unserer Stundenpläne messen. Dabei spielt, neben der Einhaltung der erwähnten Bedingungen, die Betrachtung der Pläne für die Studierenden eine besondere Rolle.

Die Studierenden sollen ihre Lehrveranstaltungen besuchen und erreichen können. Zunächst beinhaltet das, dass sich die Veranstaltungen möglichst nicht überschneiden. Dabei fordern wir, dass obligatorische Lehrveranstaltungen nicht parallel liegen dürfen, da diese ja verpflichtend von allen besucht werden sollen. Lässt es sich nicht vermeiden, dass wahlobligatorische und fakultative Veranstaltungen gleichzeitig stattfinden, weil es beispielsweise mehr Veranstaltungen als Planungseinheiten gibt, so sehen wir die Überschneidungsfreiheit möglichst vieler, insbesondere wahlobligatorischer, Veranstaltungen als gut an. Ein weiterer zu erfüllender Aspekt liegt in der örtlichen Anordnung der Veranstaltungen. Diese sollte so angelegt sein, dass, wenn überhaupt, nur in den dafür vorgesehenen Zeiten zwischen den Standorten gewechselt wird. Vorzuziehen sind allerdings Pläne, die überhaupt keine Wechsel innerhalb eines Tages erfordern.

Um die An- bzw. Abreise vom bzw. zum Wohnort zu ermöglichen, ist es günstig, wenn die entsprechenden Planungseinheiten nicht oder zumindest nicht mit Veranstaltungen, die von vielen Studierenden besucht werden müssen, belegt werden. Weitere Präferenzen bestehen aber auch bezüglich des Wochentages. Hier gilt „je zentraler desto besser“, d. h., der Mittwoch ist an der TU Chemnitz der günstigste Tag. Daneben werden zentrale Zeiten am Tag, also zweite bis vierte Einheit, bevorzugt. Dabei sinkt erfahrungsgemäß mit der Höhe des durchschnittlichen Fachsemesters der Studiengruppe die Akzeptanz für frühe Startzeitpunkte.

Insgesamt werden Pläne als gut angesehen, die die Tageslast für die Studierenden verteilen und es damit beispielsweise nicht vorkommt, dass an einem Tag keine und an einem anderen alle Planungseinheiten belegt werden. Hierbei können wir zum einen die Gesamtanzahl der Veranstaltungen an einem Tag und zum anderen auch nur die obligatorischen Veranstaltungen zählen.

2 Modellierung

In diesem Abschnitt bauen wir das Modell für das Erstellen eines Stundenplans auf. Dabei gehen wir in drei wesentlichen Schritten vor. Zunächst beschreiben wir die benötigten Mengen und einige „einfache“ Nebenbedingungen. Danach gehen wir näher auf die Bedingungen an die Studierenden-Stundenpläne, wie Wegeproblematik und die Behandlung von Überschneidungen, ein. Abschließend setzen wir die Zielstellungen beim Aufbau der Zielfunktion aus der Problemstellung um.

Wir führen nun die Bezeichnungen der Mengen ein, die sich sofort aus der Problembeschreibung (vgl. Kapitel 1) ergeben. Als Ziel wird dort formuliert, dass wir für jede Lehrveranstaltung festlegen, in welchen Planungseinheiten und in welchen Räumen sie stattfindet.

$V \ldots$ Menge der Veranstaltungen
$c_{V,v} \ldots$ benötigte Kapazität $\hat{=}$ Anzahl der Studierenden von $v \in V$
$W := \{1, \ldots, n_W\}, n_W \in \mathbb{N} \ldots$ Wochen
$D := \{1, \ldots, n_D\}, n_D \in \mathbb{N} \ldots$ Tage
$E := \{1, \ldots, n_E\}, n_E \in \mathbb{N} \ldots$ Einheiten (pro Tag)
$T := \{(w, d, e) \colon w \in W, d \in D, e \in E\} \ldots$ Planungseinheiten
$O := \{1, \ldots, n_O\}, n_O \in \mathbb{N} \ldots$ Orte
$\tilde{R} \ldots$ Menge der Räume
$c_{R,r} \ldots$ Kapazität/Sitzanzahl von Raum $r \in \tilde{R}$
$S \ldots$ Menge der Studiengruppen
$a_s \ldots$ Anzahl der Studierenden in Studiengruppe $s \in S$
$P \ldots$ Menge der Dozenten

2.1 Anpassungen des Problems an unser Modell

Wir wollen die Daten so anpassen, dass wir in unserem Modell davon ausgehen können, dass jede Lehrveranstaltung *genau einen Raum* belegt sowie *genau eine* Planungseinheit im Planungszyklus andauert, z. B. genau einmal alle zwei Wochen bei der TU Chemnitz. Darüberhinaus wollen wir eine genaue Zuordnung von Räumen zu Lehrveranstaltungen vernachlässigen und uns stattdessen auf *Raumgruppen*, Räume mit ähnlichen Charakteristika, beschränken. Die dazu nötigen Transformationen werden wir in den nächsten beiden Abschnitten behandeln.

2.1.1 Vereinfachung der Lehrveranstaltungen

Um uns auf Veranstaltungen mit genau einem Raum und Dauer von genau einer Einheit zu beschränken, benötigen wir die folgenden Mengen:

$V_{WPar} \subset \mathcal{P}(V \times W)$: $\{(v_1, w_1), \ldots, (v_k, w_k)\} \in V_{WPar}$ heißt, die Veranstaltungen $v_1, \ldots, v_k$ finden am gleichen Tag und in der gleichen Einheit in den Wochen $w_1, \ldots, w_k$ statt.

$F \subset V^{\bullet}$: $(v_1, \ldots, v_k) \in F$ bedeutet, die Veranstaltungen $v_1, \ldots, v_k$ finden unmittelbar hintereinander statt.

$V_{Par} \subset \mathcal{P}(V)$: $\{v_1, \ldots, v_r\} \in V_{Par}$ bedeutet, die Veranstaltungen $v_1, \ldots, v_r$ finden gleichzeitig statt.

$V_{NPar} \subset \mathcal{P}(V)$: $\{v_1, \ldots, v_k\} \in V_{NPar}$ bedeutet, dass jeweils paarweise zwei Veranstaltungen $v_i, v_j, i \neq j$, nicht parallel liegen dürfen. Dafür kann es verschiedene Gründe geben, etwa die Vermeidung von Mehrfach-Belegungen bei einzelnen Räumen. Mit Hilfe dieser Menge könnte man modellieren, dass obligatorische Veranstaltungen einer Studiengruppe nicht gleichzeitig stattfinden dürfen. Wir werden das aber auf andere Weise erreichen (siehe Abschnitt 2.3).

Die Ausgangsdaten werden nun wie folgt angepasst:

Wöchentliche Lehrveranstaltung: Findet eine Veranstaltung $v \in V$ in den Wochen $w_1, \ldots, w_k \in W, w_i \neq w_j$ für $i \neq j$, statt, so ersetzen wir v durch Lehrveranstaltungen $v_1, \ldots, v_k$ und fügen das Element $\{(v_1, w_1), \ldots, (v_k, w_k)\}$ zu V_{WPar} hinzu. Damit können wir auch den Fall abdecken, dass zwei verschiedene, aber zusammengehörende Veranstaltungen (z. B. eine Vorlesung und eine Übung, vgl. Abschnitt 1.2) am gleichen Tag und in der gleichen Einheit um eine Woche versetzt gehalten werden sollen. Gehen wir beispielsweise von zwei Lehrveranstaltungen v_1, v_2 aus, wobei v_1 nur in Woche eins und v_2 nur in Woche zwei stattfindet, so fügen wir $\{(v_1, 1), (v_2, 2)\}$ zu V_{WPar} hinzu.

Veranstaltungen über mehrere aufeinanderfolgende Einheiten: Dauert eine Veranstaltung $v \in V$ über $l > 1$ hintereinanderfolgende Einheiten an, so ersetzen wir v durch Lehrveranstaltungen $v_1, \ldots, v_l$ und fügen das Element $(v_1, \ldots, v_l)$ zu F hinzu.

Veranstaltungen mit mehreren Räumen: Belegt eine Veranstaltungen $v \in V$ planmäßig $r > 1$ Räume (vgl. Abschnitt 1.2), so ersetzen wir v durch die Veranstaltungen $v_1, \ldots, v_r$ und fügen das Element $\{v_1, \ldots, v_r\}$ zur Menge V_{Par} hinzu.

2.1.2 Raumgruppen

Laut Problembeschreibung sollen wir jeder Veranstaltung den exakten Raum zuordnen. Dies ist aus praktischer Sicht jedoch kaum möglich. Dafür gibt es zwei wichtige Gründe. Auf der einen Seite würde sich so die Anzahl der Variablen auf ein Vielfaches erhöhen, auf der anderen Seite ist es später für die Löser nicht möglich, zwischen zwei Räumen mit gleicher Kapazität bzw. Charakteristik, die sich am gleichen Standort befinden, zu unterscheiden. Aus diesen Gründen heraus führen wir lediglich Raumgruppen ein, die Räume am gleichen Ort mit gleichen Charakteristika zusammenfassen. Dabei können für jeden Ort andere Merkmale zur Unterscheidung gewählt werden. (Die Auswahl der Charakteristika sollte an die Bedingungen angepasst sein, die von den Veranstaltungen gefordert

werden, z. B. Raum mit großer Tafelfläche, Raum mit Beamer, Raum mit großer Tafelfläche und Beamer.) Es ist sogar möglich, dass nur ein einziger Raum zu einer bestimmten Raumgruppe gehört. Man sollte dies jedoch nur in Ausnahmefällen in Betracht ziehen, da dadurch die Zahl der Nebenbedingungen sehr stark anwachsen kann.

Die Menge aller Raumgruppen erhalten wir durch

$$R := \{(o, g)\colon o \in O, g \in \{1, \ldots, n_{R,o}\}\}$$

mit $n_{R,o}$ Anzahl der Raumgruppen in Ort o, und $c_{(o,g)} \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl der Räume in Raumgruppe (o, g). Aus den Bedingungen, die von Veranstaltung $v \in V$ an den jeweiligen Raum gestellt werden, können wir für jede Veranstaltung v eine Menge zulässiger Raumgruppen an Ort $o \in O$

$$R_{v,o} := \{(o, g) \in R\colon (o, g) \text{ mögliche Raumgruppe für } v \text{ in Ort } o\} \ (v \in V, o \in O)$$

bestimmen.

Konkret beschränken wir uns für die TU Chemnitz auf zwei Raumgruppen und unterscheiden nur nach der Sitzanzahl. Dabei gibt es kleine Räume (bis 40 Sitze) und große Räume (ab 41 Sitze). Die von uns angelegten Raumgruppen bezeichnen wir mit

$$R^{TUC} := \{\underbrace{(o, 1)}_{\text{(klein)}}, \underbrace{(o, 2)}_{\text{(groß)}}\colon o \in O\}$$

und es gilt bei $O_v := \{o \in O\colon o \text{ möglicher Standort für } v\}$ $(v \in V)$

$$\begin{aligned}
R^{TUC}_{v_0,o} &= \{(o, i)\colon o \in O_{v_0}, i \in \{1, 2\}\}, \text{ falls } c_{V,v_0} \leq 40 \text{ und kein fester Raum,}\\
R^{TUC}_{v_1,o} &= \{(o, 1)\colon o \in O_{v_1}\}, \text{ falls } c_{V,v_1} \leq 40 \text{ und fester Raum,}\\
R^{TUC}_{v_2,o} &= \{(o, 2)\colon o \in O_{v_2}\}, \text{ falls } c_{V,v_2} > 40.
\end{aligned}$$

Um zu garantieren, dass ein bestimmter Raum nicht mehrfach gleichzeitig genutzt wird, fügen wir zur Menge V_{NPar} die Menge $\{v_1, \ldots, v_k\}$ hinzu, falls den Veranstaltungen $v_1, \ldots, v_k$ pflichtmäßig der gleiche Raum zugeordnet wird.

2.2 Binärvariablen und erste Nebenbedingungen

Unser Ziel besteht darin, für jede einzelne Veranstaltung anzugeben, in welchem Ort sie zu welcher Planungseinheit stattfindet. Damit ergeben sich die Binärvariablen

$$x_{o,t,v} \in \{0, 1\},\ o \in O, t = (w, d, e) \in T, v \in V,$$

mit der Interpretation

$$x_{o,t,v} = \begin{cases} 1 & \text{LV } v \text{ findet in Ort } o \text{ in Planungseinheit } t \text{ statt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es bezeichne dabei $\mathcal{X}^b = \{(o, t, v)\colon o \in O, t \in T, v \in V\}$ die Indexmenge der Binärvariablen, d. h. $x \in \{0, 1\}^{|\mathcal{X}^b|} \Leftrightarrow x_{o,t,v} \in \{0, 1\}$ für alle $(o, t, v) \in \mathcal{X}^b$.

2.2.1 Nebenbedingungen

Aus der Aufgabenstellung folgen zunächst einige „einfache“ Nebenbedingungen. Seien für eine Veranstaltung $v \in V$ die folgenden Mengen definiert durch

$$\begin{aligned} T_v &:= \{t \in T \colon t \text{ mögliche Planungseinheit für } v\} \ (v \in V), \\ O_v &:= \{o \in O \colon o \text{ möglicher Standort für } v\} \ (v \in V), \\ P_v &:= \{p \in P \colon p \text{ hält } v\} \ (v \in V). \end{aligned}$$

Dabei reduziert sich die Menge T_v etwa um die Sperrzeiten aller Dozenten der Veranstaltung v. Falls v nur für bestimmte Planungseinheiten $t \in T_v$ und bestimmte Orte $o \in O_v$ zugelassen ist, so gilt

$$\forall\, (o,t) \in (O \times T) \setminus (O_v \times T_v) \colon x_{o,t,v} = 0. \tag{1}$$

Weiterhin fordern wir von allen Lehrveranstaltungen, dass sie genau einmal (zu genau einer Planungseinheit) stattfinden. Es ergibt sich dann automatisch, dass nur ein Ort genutzt wird. Würde mehr als ein Raum eingeplant, so hätte für einen Standort mehr als eine Variable den Wert 1. Diese Formulierung ist dadurch möglich, dass wir auch wöchentlich stattfindende Veranstaltungen auf $|W|$ (an der TU Chemnitz auf 2) aufteilen, vgl. Abschnitt 2.1.1.

$$\forall\, v \in V \colon \sum_{o \in O, t \in T} x_{o,t,v} = 1. \tag{2}$$

Jeder Dozent kann lediglich eine Veranstaltung zu einer Planungseinheit $t \in T$ halten. Das führt auf die Nebenbedingungen

$$\forall\, p \in P, \forall\, t \in T \colon \sum_{o \in O} \sum_{v \in V : p \in P_v} x_{o,t,v} \leq 1. \tag{3}$$

Ähnliche Nebenbedingungen ergeben sich für nicht-parallele Veranstaltungen, die teilweise durch die Einführung der Raumgruppen entstehen, vgl. 2.1.2. Dort war das Ziel auszuschließen, dass gleichzeitig mehr als eine Veranstaltung im gleichen Raum liegt.

$$\forall\, V' \in V_{NPar}, \forall\, t \in T \colon \sum_{o \in O, v \in V'} x_{o,t,v} \leq 1. \tag{4}$$

Ebenfalls aus unseren Anpassungen entsteht die Menge V_{Par}, welche Mengen von zur gleichen Planungseinheit stattfindenden Veranstaltungen enthält.

$$\forall\, \{v_1, \ldots, v_k\} \in V_{Par}, \forall\, 2 \leq i \leq k, \forall\, t \in T \colon \sum_{o \in O} x_{o,t,v_1} - \sum_{o \in O} x_{o,t,v_i} = 0. \tag{5}$$

Im Vergleich dazu gestalten sich die Nebenbedingungen für die Menge V_{WPar} etwas anders, da hier der gleiche Tag und die gleiche Einheit, dazu aber spezielle Wochen verlangt werden.

$$\begin{aligned} \forall\, \{(v_1, w_1), \ldots, (v_k, w_k)\} \in V_{WPar}, \forall\, 2 \leq i \leq k, \forall\, d \in D, \forall\, e \in E \colon \\ \sum_{o \in O} x_{o,(w_1,d,e),v_1} - \sum_{o \in O} x_{o,(w_i,d,e),v_i} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Eine Besonderheit stellen noch über mehrere Einheiten andauernde Veranstaltungen dar, die in einzelne zerlegt werden. Für diese muss

$$\forall\,(v_1,\ldots,v_n)\in F, \forall\,2\le i\le n, \forall\,o\in O, \forall\,(w,d,e)\in T \text{ mit } e\le n_E-n+1\colon \\ x_{o,(w,d,e),v_1}-x_{o,(w,d,e+i-1),v_i}=0 \tag{7}$$

gelten.

2.2.2 Raumgruppen-Nebenbedingungen

Es können niemals mehr Räume benutzt werden, als in den einzelnen Raumgruppen zur Verfügung stehen. Dazu darf gleichzeitig für jede Teilmenge von Raumgruppen die Anzahl der Lehrveranstaltungen, die in Räumen dieser Raumgruppen stattfinden *müssen*, die Anzahl der Räume in diesen nicht überschreiten.

Sei $o\in O$ ein Ort und $U\subset\{(o,g)\in R\}$ eine Teilmenge von Raumgruppen in o. Dann bezeichnet

$$V_o(U):=\{v\in V\colon R_{v,o}\subset U\}$$

die Menge der Veranstaltungen, die in einen Raum einer Raumgruppe aus U gelegt werden müssen. Folglich erhalten wir die Nebenbedingungen:

$$\forall\,o\in O, \forall\,t\in T, \forall\,U\in\mathcal{P}(\{(o,g)\in R\})\colon \sum_{v\in V_o(U)} x_{o,t,v}\le\sum_{u\in U} c_u. \tag{8}$$

Bei unserem Beispiel der TU Chemnitz beschränken wir uns, wie oben angegeben, auf zwei Raumgruppen pro Ort, vgl. 2.1.2. Daraus ergeben sich aus (8) die folgenden drei Punkte:

1. Für jede Planungseinheit $t\in T$ darf die Anzahl an Veranstaltungen, denen ein kleiner Raum pflichtmäßig vorgegeben wird (steht der genaue Raum nicht fest, so kann eine Veranstaltung mit einer geschätzten Studierendenanzahl unter unserer Grenze von 40 auch in einem großen Raum stattfinden und wird hier nicht gezählt), nicht größer sein, als die Anzahl der Räume in dieser Raumgröße.

$$\forall\,o\in O, \forall\,t\in T\colon \sum_{v\in V_{1,o}^{TUC}} x_{o,t,v}\le c_{(o,1)},\ V_{1,o}^{TUC}:=\{v\in V\colon R_{v,o}^{TUC}\subset\{(o,1)\}\}.$$

2. Keine Wahlmöglichkeit besteht hingegen bei Veranstaltungen $v\in V$ mit $R_v\subset\{(o,2)\colon o\in O\}$. Diese müssen in einen Raum der Kategorie 2 gelegt werden, von denen ebenso nur eine beschränkte Zahl zur Verfügung steht.

$$\forall\,o\in O, \forall\,t\in T\colon \sum_{v\in V_{2,o}^{TUC}} x_{o,t,v}\le c_{(o,2)},\ V_{2,o}^{TUC}:=\{v\in V\colon R_{v,o}^{TUC}\subset\{(o,2)\}\}.$$

3. Ferner darf die Summe aller Lehrveranstaltungen die Anzahl der Räume insgesamt an diesem Standort nicht überschreiten.

$$\forall\, o \in O, \forall\, t \in T\colon \sum_{v \in V} x_{o,t,v} \leq c_{(o,1)} + c_{(o,2)}.$$

(Bemerkung: Es gilt $V = \bigcup\limits_{o \in O} \left(V_{0,o}^{TUC} \dot\cup V_{1,o}^{TUC} \dot\cup V_{2,o}^{TUC}\right)$, wobei $V_{0,o}^{TUC}$ alle die Veranstaltungen enthält, die in *beiden* Raumgruppen an Ort $o \in O$ stattfinden dürfen.)

Bemerkung 2.1 Konzentriert man sich nur auf die Raumgröße (keine weiteren Kriterien wie die Ausstattung), so können die entsprechenden Nebenbedingungen in Polynomialzeit separiert werden. Dazu muss man für jede Planungseinheit $t \in T$ und jeden Ort $o \in O$ die Variablen $x_{o,t,\bullet}$ der Veranstaltungen in t und o nach der Anzahl der benötigten Sitzplätze der Veranstaltungen absteigend sortieren. Summiert man die Variablen in dieser Reihenfolge auf und übersteigt eine Teilsumme die Anzahl der verfügbaren Räume, deren jeweilige Kapazität für die Veranstaltungen dieser Teilsumme ausreicht, so wird die zugehörige Ungleichung zum Problem hinzugefügt.

Bisher haben wir lediglich Nebenbedingungen aufgestellt, die für die Erstellung eines Stundenplans unbedingt notwendig sind. Damit dieser in der Praxis auf Akzeptanz stößt, müssen weitere Ziele beachtet werden. Der folgende Abschnitt zeigt, wie die Zielstellungen an die Studierenden-Stundenpläne (vgl. Abschnitt 1.6) im Modell umgesetzt werden.

2.3 Modellierung mit Graphen

Besonderen Wert legen wir auf die Vermeidung von Wechseln bzw. die Einhaltung der Wechselbedingungen. Versucht man diese Beziehungen in Nebenbedingungen unter Nutzung der Variablen $x_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathcal{X}^b$, auszudrücken, so stellt man sehr schnell fest, dass die Anzahl der Nebenbedingungen sehr groß wird. Das liegt daran, dass der Wechsel nicht unbedingt zwischen zwei Einheiten der Studierenden oder der Dozenten erfolgen muss, sondern dass auch Freistunden dazwischen liegen können. Um die Wegeproblematik besser beschreiben zu können, haben wir uns deshalb für die Modellierung mithilfe von Netzwerkflüssen in Graphen entschieden. Dies ermöglicht es uns weiterhin, Überschneidungen zwischen Lehrveranstaltungen einer Studiengruppe zu erkennen und in Abschnitt 2.5 zu bestrafen.

Dafür benötigen wir aber noch die folgenden Mengen, die die Veranstaltungen der Studiengruppe $s \in S$ bzw. Teile davon umfassen.

$$\begin{aligned}
V_s &:= \{v \in V\colon\ v \text{ ist Veranstaltung von Studiengruppe } s\}\ (s \in S),\\
V_s^{obl} &:= \{v \in V_s\colon\ v \text{ ist obligatorische Veranstaltung für } s\}\ (s \in S),\\
V_s^{wobl} &:= \{v \in V_s\colon\ v \text{ ist wahlobligatorische Veranstaltung für } s\}\ (s \in S),\\
V_s^{fak} &:= \{v \in V_s\colon\ v \text{ ist fakultative Veranstaltung für } s\}\ (s \in S).
\end{aligned}$$

Für jede Studiengruppe $s \in S$, jede Woche $w \in W$ und jeden Tag $d \in D$ repräsentiert ein Graph $G_{s,w,d}$ die Stationen der Studierenden aus s. Dazu konstruieren wir gerichtete

Graphen $G_{s,w,d} = (\mathcal{V}, A_{s,w,d})$, wobei $\mathcal{V}$ die Knotenmenge und $A_{s,w,d}$ die Menge gerichteter Kanten bezeichnet. Die Knotenmenge $\mathcal{V}$ setzt sich zusammen aus

- einem Startknoten v_q (Quelle),
- einem Endeknoten v_s (Senke),
- $\forall\, e \in E, \forall\, o \in O$ einem Knoten $v_{e^1,o}$ zum Beginn der Einheit e und einem Knoten $v_{e^2,o}$ zum Ende der Einheit e bzw. zum Pausenbeginn.

Abbildung 1 zeigt dies am Beispiel von zwei Orten und zwei Einheiten.

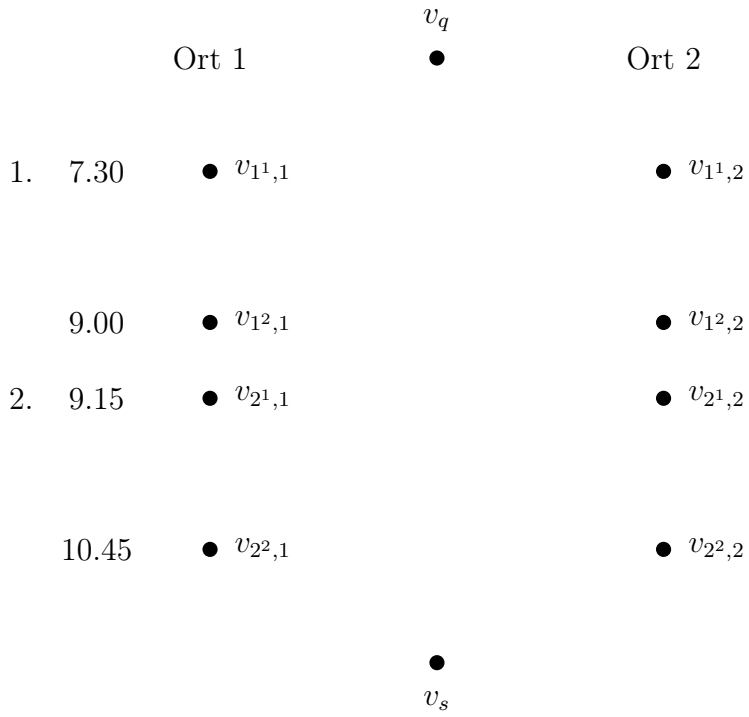


Abbildung 1: Darstellung der Knotenmenge am Beispiel

Zwischen den Knoten fügen wir die folgenden Kanten ein:

- Die Studierenden können zu jeder Einheit mit ihrer ersten Lehrveranstaltung am Tag anfangen und nach jeder Einheit nach Hause zurückkehren. Dabei kommen wir von v_q bzw. gehen zu v_s:

$$A_q := \{(v_q, v_{e^1,o})\colon e \in E, o \in O\},$$
$$A_s := \{(v_{e^2,o}, v_s)\colon e \in E, o \in O\}.$$

- Zusätzlich kann es vorkommen, dass an einem Tag überhaupt keine Veranstaltung stattfindet. Dafür brauchen wir eine Start-Ende-Kante

$$A_{qs} := \{(v_q, v_s)\}.$$

- Weiterhin ist es möglich, an einem Standort zu warten und keine Veranstaltung zu besuchen. Man beachte hierbei, dass die Option zu warten nicht in der ersten bzw. der letzten Einheit besteht, da man später kommen bzw. eher gehen würde. (Das ergibt sich aus den späteren Zielfunktionskoeffizienten und lässt sich leicht aus den bisher formulierten Zielen ableiten.)

$$A_w := \{(v_{e^1,o}, v_{e^2,o})^w \colon e \in E \setminus \{1, n_E\}, o \in O\}.$$

- Es werden ebenso Kanten für die Pausen eingefügt (Pausen nach jeder Einheit außer der letzten):

$$A_p := \{(v_{e^2,o}, v_{(e+1)^1,o}) \colon e \in E \setminus \{n_E\}, o \in O\}.$$

- Um die Wechsel zwischen den Standorten zu modellieren, führen wir Kanten zwischen den jeweiligen Orten ein. Dabei beschreibt $(e + d_e) \in E, e \in E$, die nächst mögliche Einheit, die bei Ortswechsel an diesem Tag erreicht werden kann.

$$A_f := \{(v_{e^2,o_1}, v_{(e+d_e)^1,o_2}) \colon e \in E, o_1 \in O, o_2 \in O \setminus \{o_1\}\}.$$

  Man könnte d_e auch vom jeweiligen Ort bzw. von der Fahrtzeit zwischen je zwei Orten abhängig machen. Darauf werden wir aber nicht weiter eingehen.

  An der TU Chemnitz sind Wechsel nur über Einheiten hinweg und in den großen Pausen möglich, konkret

$$A_f^{TUC} := \{(v_{e^2,o_1}, v_{(e+d_e^{TUC})^1,o_2}) \colon e \in \{1, \dots, 5\}, o_1 \in O, o_2 \in O \setminus \{o_1\}\},$$
$$d_e^{TUC} := \begin{cases} 1 & e \in \{2, 3\} \\ 2 & e \in \{1, 4, 5\}. \end{cases}$$

  Es gibt hier keine Kanten nach der sechsten Einheit, weil man keine weitere Veranstaltung erreichen kann. Wir werden bei unseren numerischen Tests außerdem auf Kanten nach der ersten Einheit verzichten, weil wir den Wechsel in der ersten großen Pause (10.45 bis 11.30 Uhr) dafür nutzen können, vgl. auch Bemerkung 2.4.

Damit sind all diejenigen Kanten eingefügt, die von der Studiengruppe unabhängig sind. In der Abbildung 2 werden Teile dieser dargestellt sind, wobei keine Fahrtkanten dargestellt sind, weil in den beiden Planungseinheiten an der TU Chemnitz keine vorkommen.

Kanten, die von der Studiengruppe abhängen, betreffen die Lehrveranstaltungen:

- Bei den Lehrveranstaltungen unterscheiden wir drei Klassen, welche auch in den Graphen verschieden behandelt werden. (Zu weiteren Modellierungsmöglichkeiten betrachte Bemerkung 2.2.)
  - Um später differenziert den Anteil der Studierenden einer Studiengruppe, der eine wahlobligatorische oder fakultative Lehrveranstaltung besucht, in einer

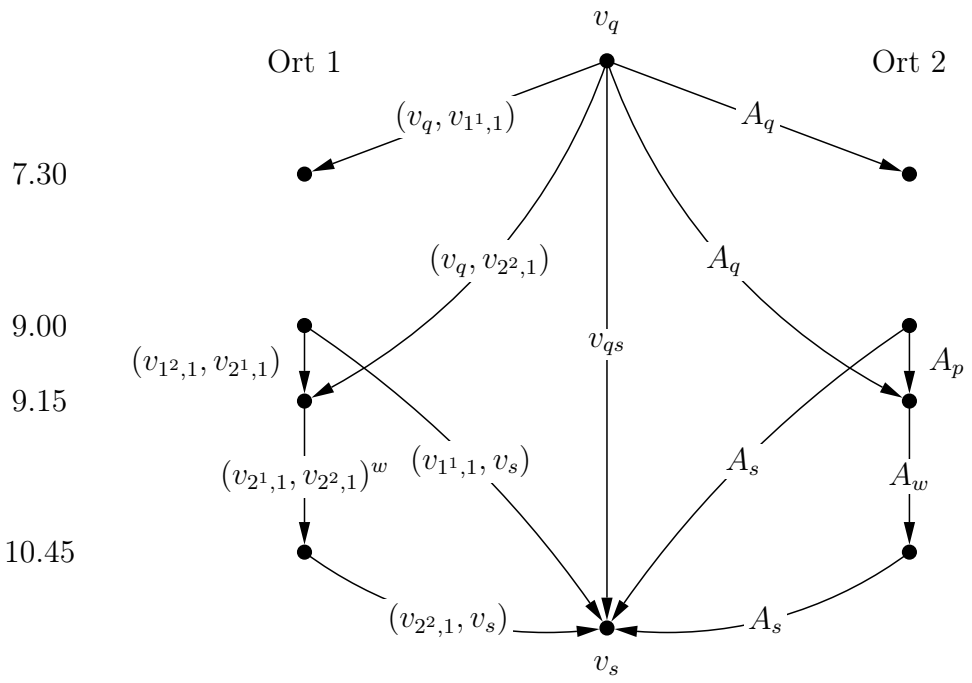


Abbildung 2: Darstellung der Start-/Ende-/Start-Ende-/Pause-/Wartekanten am Beispiel

stückweise linearen konvexen Zielfunktion, vgl. Abbildung 3, berücksichtigen zu können, werden folgende Mengen benötigt (siehe Abschnitt 2.5)

$$\forall\, \bar{v} \in V_s^{wobl} \cup V_s^{fak}, \forall\, i \in \{1,2\}\colon \\ A_{\bar{v},i}^{s,w,d} := \{(v_{e^1,o}, v_{e^2,o})_i^{\bar{v}}\colon o \in O_{\bar{v}}, e \in E \text{ mit } (w,d,e) \in T_{\bar{v}}\}. \quad (9)$$

Damit werden für jede wahlobligatorische oder fakultative Lehrveranstaltung $\bar{v} \in V_s^{wobl} \cup V_s^{fak}$ sowie jeden Ort $o \in O_{\bar{v}}$ und jede Planungseinheit $(w,d,e) \in T_{\bar{v}}, e \in E$, zwei Kanten $(v_{e^1,o}, v_{e^2,o})_i^{\bar{v}}, i = 1,2$, eingeführt. Beide Kanten werden später mit unterschiedlichen Schranken und Kosten versehen, um dem Verhalten der Zielfunktion aus Abbildung 3 zu entsprechen.

– Weil gefordert wird, dass maximal ein $\bar{v} \in V_s^{obl}$ zu einer Planungseinheit stattfindet, können die obligatorischen Veranstaltungen zu einer Planungseinheit mithilfe einer Kante zusammengefasst werden:

$$A_{obl}^{s,w,d} := \Bigg\{(v_{e^1,o}, v_{e^2,o})^{obl}\colon \underbrace{e \in E\colon (w,d,e) \in \bigcup_{\bar{v} \in V_s^{obl}} T_{\bar{v}}}_{(*)}, \underbrace{o \in \bigcup_{\bar{v} \in V_s^{obl}} O_{\bar{v}}}_{(**)}\Bigg\}.$$

((∗) Alle Planungseinheiten in Woche w und am Tag d, an denen obligatorische Veranstaltungen für Studiengruppe s stattfinden können.
(∗∗) Alle Orte, an denen obligatorische Veranstaltungen für Studiengruppe s stattfinden können.)

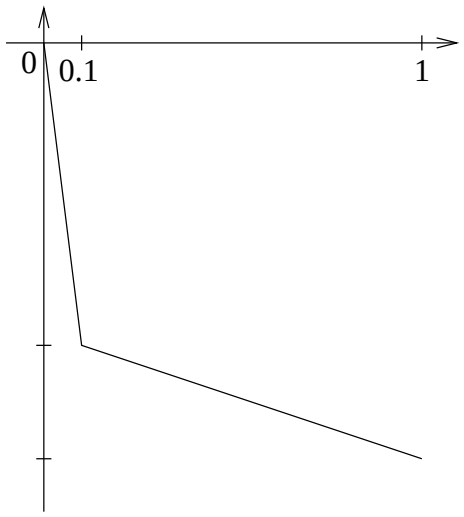


Abbildung 3: Stückweise lineare Zielfunktion

Bemerkung 2.2 Es gibt noch weitere Möglichkeiten, die Veranstaltungen einer Studiengruppe in den Graphen zu erfassen.

- Man kann für jede Planungseinheit und jeden Ort genau eine Veranstaltungskante einführen. In der Zielfunktion ist es dann jedoch nur möglich, die Anzahl der gleichzeitig stattfindenden Veranstaltungen zu bestrafen und bei Betrachtung der Flüsse festzustellen, ob Veranstaltungen besucht werden. Über die Verteilung der Studierenden auf die einzelnen Veranstaltungen sagt das aber nichts aus.

- Weiterhin besteht die Möglichkeit, für jede Planungseinheit und jeden Ort drei Kanten (obl, wobl, fak) zu nutzen. Allerdings ist auch diese Variante zu grob, um die Ziele bzgl. der Überschneidungen von Veranstaltungen zu formulieren, da Veranstaltungen mit gleicher Priorität nicht voneinander zu trennen sind. Außerdem lässt es sich hier nur schwer verhindern, dass zwei gleichzeitig stattfindende Lehrveranstaltungen an unterschiedlichen Orten günstiger erscheinen, da wir, wie oben erwähnt, eine *konvexe*, nicht-lineare Zielfunktion (siehe auch 2.5.1) benutzen wollen. Finden z. B. zwei fakultative Veranstaltungen *gleichzeitig* am *gleichen* Ort statt, so werden diese nur über *eine* Kante repräsentiert. Finden sie aber *gleichzeitig* an verschiedenen Orten statt, dann werden sie über *zwei* Kanten, nämlich eine Kante pro Ort, repräsentiert. Dieser Unterschied hat dann Einfluss auf den Wert der konvexen Zielfunktion.

Insgesamt setzt sich in jedem Graphen $G_{s,w,d} = (\mathcal{V}, A_{s,w,d})$ die Kantenmenge wie folgt

zusammen:

$$A_{s,w,d} = A_q \cup A_s \cup A_{qs} \cup A_w \cup A_p \cup A_f \cup \left(\bigcup_{v \in V_s^{wobl} \cup V_s^{fak}} (A_{v,1}^{s,w,d} \cup A_{v,2}^{s,w,d}) \right) \cup A_{obl}^{s,w,d}$$

$A_q \ldots$ Menge aller Startkanten
$A_s \ldots$ Menge aller Endekanten
$A_{qs} \ldots$ Start-Ende-Kante
$A_w \ldots$ Menge aller Wartekanten
$A_p \ldots$ Menge aller Pausenkanten
$A_f \ldots$ Menge aller Wechsel- bzw. Fahrtkanten
$A_{v,1}^{s,w,d} \ldots$ Menge aller Veranstaltungskanten zu $v \in V_s^{wobl} \cup V_s^{fak}$, Typ 1
$A_{v,2}^{s,w,d} \ldots$ Menge aller Veranstaltungskanten zu $v \in V_s^{wobl} \cup V_s^{fak}$, Typ 2
$A_{obl}^{s,w,d} \ldots$ Menge aller Veranstaltungskanten zu V_s^{obl}.

Abschließend zeigt Abbildung 4 ein Beispiel eines Teilgraphen, wobei für einzelne Kanten nur die Menge genannt wird, zu der sie gehören. Man beachte zusätzlich, dass die stärkeren Linien, die mit

$$A_{V,\bullet}^{s,w,d} = \bigcup_{v \in V_s^{wobl} \cup V_s^{fak}} (A_{v,1}^{s,w,d} \cup A_{v,2}^{s,w,d})$$

bezeichnet sind, auch mehrere Kanten repräsentieren können.

Auf diesen Graphen werden Flussprobleme erstellt, wozu die Variablen $\hat{x}_{s,w,d,a}$ benötigt werden mit

$$\hat{x}_{s,w,d,a} \in \begin{cases} [0, 0.1] & a \in \bigcup_{v \in V_s^{wobl} \cup V_s^{fak}} A_{v,2}^{s,w,d} \\ [0, 1] & \text{sonst} \end{cases}$$

und Indexmenge $\mathfrak{X}^G = \{(s, w, d, a) \colon s \in S, w \in W, d \in D, a \in A_{s,w,d}\}$. Diese müssen für einen zulässigen Fluss bestimmten Nebenbedingungen genügen.

Definition 2.3 Sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit Kantenkapazitäten $c(a) \geq 0, a \in A$, und seien s, t zwei ausgezeichnete Knoten. Ein $x \in \mathbb{R}^{|A|}$ heißt *zulässiger* (s,t)*-Fluss*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\forall\, a \in A \colon 0 \leq x_a \leq c(a)$,
2. $\forall\, v \in V \setminus \{s, t\} \colon \sum_{a \in A \colon a=(\cdot,v)} x_a = \sum_{a \in A \colon a=(v,\cdot)} x_a$, wobei $\sum_{a \in A \colon a=(\cdot,v)} x_a$ den einfließenden und $\sum_{a \in A \colon a=(v,\cdot)} x_a$ den ausfließenden Fluss bezeichnet.

Dabei wird ein Fluss von eins von der Quelle v_q zur Senke v_s geschickt, wobei der Gesamtfluss über eine Kante $a \in A_{s,w,d}$ allen Studierenden der Studiengruppe s entspricht. Wir legen aber im Normalfall keinen Wert auf einen ganzzahligen Fluss (außer bei $A_{obl}^{s,w,d}$), da

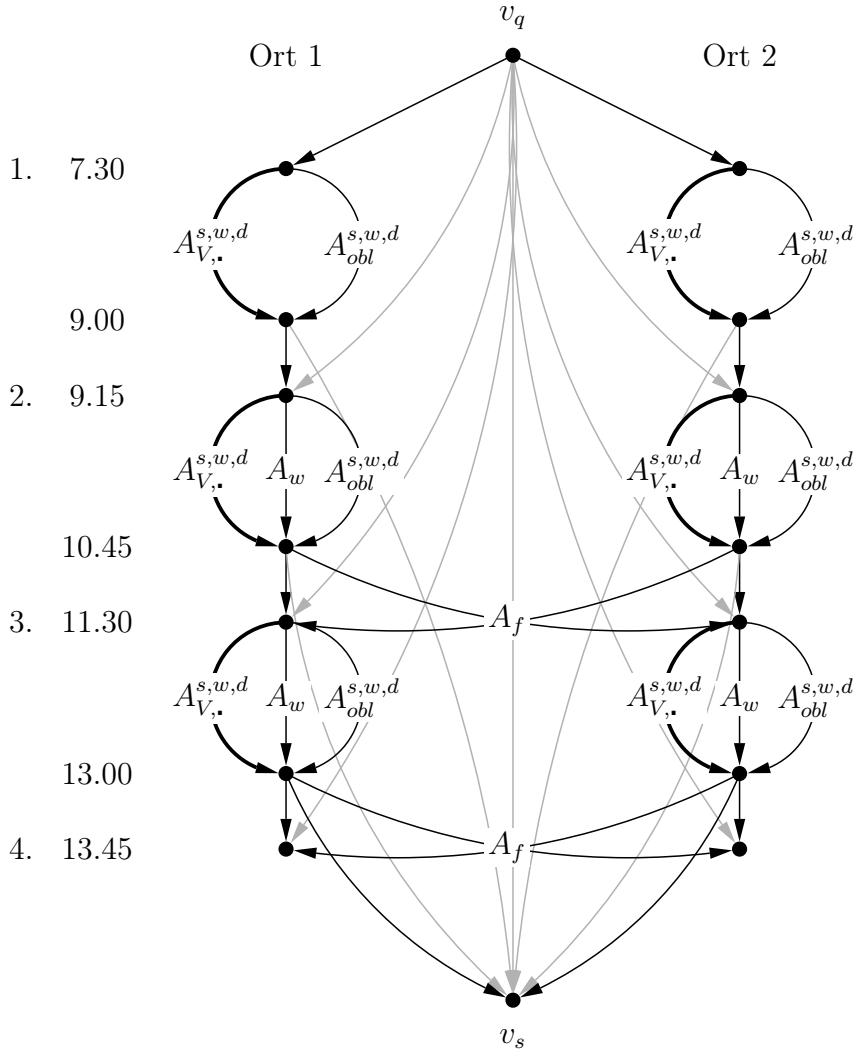


Abbildung 4: Graphenausschnitt mit allen möglichen Kanten in diesem Bereich

wir davon ausgehen, dass sich die Studierenden auf die Lehrveranstaltungen aufteilen. Es kann außerdem vorkommen, dass sich Studierende an verschiedenen Standorten befinden bzw. unterschiedlichen Tätigkeiten, wie Fahren oder Warten, nachgehen.

Die balancierten Flusserhaltungsgleichungen für den Graphen $G_{s,w,d}$ lauten dann in jedem Knoten:

$$v_s\colon \sum_{a\in A\colon\, a=(v_q,\cdot)} \hat{x}_{s,w,d,a} = 1 \tag{10}$$

$$v_e\colon \sum_{a\in A\colon\, a=(\cdot,v_s)} \hat{x}_{s,w,d,a} = 1 \tag{11}$$

$$\forall\, v \in \mathcal{V}\setminus\{v_q, v_s\}\colon \sum_{a\in A\colon\, a=(v,\cdot)} \hat{x}_{s,w,d,a} - \sum_{a\in A\colon\, a=(\cdot,v)} \hat{x}_{s,w,d,a} = 0. \tag{12}$$

Außerdem kommen zu unserem Modell noch die koppelnden Nebenbedingungen hin-

zu, welche die Verbindung zwischen den Graphen und den ganzzahligen Variablen $x_{o,t,\bar{v}}$, $(o,t,\bar{v}) \in \mathcal{X}^b$, schaffen. So wollen wir nur einen Fluss über $a \in A^{s,w,d}_{V,\cdot} \cup A^{s,w,d}_{obl}$ erlauben, wenn die entsprechenden Variablen $x_{o,t,\bar{v}}$ ungleich null sind. Allerdings liefern uns diese nur eine obere Schranke, da wahlobligatorische und fakultative Lehrveranstaltungen auch parallel auftreten dürfen und sich der Fluss der Studierenden auf diese aufteilen kann.

$$\begin{aligned} &\forall\, s \in S, \forall\, (w,d,e) \in T, \forall\, o \in O, \forall\, \bar{v} \in V^{wobl}_s \cup V^{fak}_s \\ &\qquad x_{o,(w,d,e),\bar{v}} \geq \hat{x}_{s,w,d,a_1} + \hat{x}_{s,w,d,a_2}, \end{aligned} \tag{13}$$

mit $a_i = (v_{e^1,o}, v_{e^2,o})^{\bar{v}}_i \in A^{s,w,d}_{\bar{v},i}, i = 1,2$.

Die bereits früher erwähnte Forderung nach der Überschneidungsfreiheit bei obligatorischen Veranstaltungen lässt sich nun ebenfalls leicht formulieren. Da die Studierenden nur Veranstaltungen besuchen können, die auch stattfinden, muss in (14) sogar Gleichheit gelten.

$$\begin{aligned} &\forall\, s \in S, \forall\, (w,d,e) \in T, \forall\, o \in O\colon \\ &\qquad \sum_{\bar{v} \in V^{obl}_s} x_{o,(w,d,e),\bar{v}} - \hat{x}_{s,w,d,a} = 0, a = (v_{e^1,o}, v_{e^2,o})^{obl} \in A^{s,w,d}_{obl}. \end{aligned} \tag{14}$$

Da später eine Relaxation des Problems gelöst werden soll (siehe Abschnitt 3.2), werden noch die folgenden Nebenbedingungen verwendet, die bei Ganzzahligkeit der $x_{o,t,\bar{v}}$, $(o,t,\bar{v}) \in \mathcal{X}^b$, automatisch erfüllt sind.

$$\forall\, s \in S, \forall\, \bar{v} \in V^{wobl}_s \cup V^{fak}_s\colon \sum_{\substack{(w,d,e) \in T \\ o \in O}} \sum_{\substack{a \in A^{s,w,d}_{\bar{v},2}\colon \\ a = (v_{e^1,o}, v_{e^2,o})^{\bar{v}}_2}} \hat{x}_{s,w,d,a} \leq 0.1. \tag{15}$$

Diese Nebenbedingungen verhindern, dass in einer Lösung der Relaxation eine Veranstaltung $\bar{v} \in V$ auf mehrere Planungseinheiten aufgeteilt wird, um mehrfach (insgesamt mehr als 0.1) Fluss über die günstigen Kanten aus $A^{s,w,d}_{\bar{v},2}$ zu schicken. In einer ganzzahligen Lösung kann dies nicht auftreten, da jede Veranstaltung zu genau einer Planungseinheit stattfinden muss.

2.4 Zulässigkeit

Es wird sich in Kapitel 3.1 zeigen, dass selbst das Finden einer zulässigen Lösung von **SPOPT** aus komplexitätstheoretischer Sicht schwierig ist. Da wir aber im Vorhinein nicht wissen, ob überhaupt eine Lösung existiert bzw. wir bei den Lösungsverfahren in Abschnitt 3.2 teilweise Variablen fixieren, was die dortige Lösungsmenge weiter verkleinert, ergänzen wir unser Modell um weitere Variablen, die uns erlauben, Unzulässigkeiten zu erkennen. Dazu überlegen wir uns, welche Situationen zu Unzulässigkeiten führen können.

Zunächst können einige Nebenbedingungen, die nur Variablen aus $x_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathcal{X}^b$, enthalten, nicht erfüllbar sein. In diesem Fall sollte es möglich sein, die betroffenen Variablen bzw. die zugehörigen Veranstaltungen an einen neutralen Zeitpunkt zu legen. Aus diesem Grund führen wir für jedes $v \in V$ die *Unzulässigkeits-Variable* $x_{0,(0,0,0),v} \in \{0,1\}$ mit

Indexmenge $\mathfrak{X}^U := \{(0,(0,0,0),v) \colon v \in V\}$ ein, wobei wir im Folgenden $\tilde{\mathfrak{X}}^b := \mathfrak{X}^b \cup \mathfrak{X}^U$ für die Vereinigung der Indexmengen der bisherigen Binärvariablen und der Unzulässigkeits-Variablen verwenden.

Für jede Veranstaltung $v \in V$ wird die Variable $x_{0,(0,0,0),v}, (0,(0,0,0),v) \in \mathfrak{X}^U$, jeweils nur zu der entsprechenden Nebenbedingung (2) hinzugefügt,

$$\forall\, v \in V \colon \sum_{o \in O, t \in T} x_{o,t,v} + x_{0,(0,0,0),v} = 1. \tag{2'}$$

Das bedeutet aber auch, dass durch die Erhöhung einer dieser Variablen auf eins die Unzulässigkeits-Variablen zu weiteren $v \in V$ eventuell ebenso erhöht werden müssen, da sie über gewisse Nebenbedingungen miteinander verbunden sind. Ein Beispiel dafür stellen parallele Veranstaltungen dar, vergleiche dazu die Mengen V_{Par}, V_{WPar} und die Nebenbedingungen (5), (6). In der Zielfunktion werden die $x_{0,(0,0,0),v}, v \in V$, aber mit sehr hohen Kosten, etwa von 10 000, versehen, wodurch sie in der Lösung ausschließlich dann benutzt werden, wenn keine andere Möglichkeit besteht.

Weiterhin kann das Problem in den Graphen liegen, wenn zwei obligatorische Lehrveranstaltungen so hintereinander in zwei verschiedenen Orten stattfinden müssen, dass dazwischen keine Wechselmöglichkeit besteht. Um diese Unzulässigkeiten zu umgehen, führen wir in jedem Graphen zusätzlich Wechselkanten nach jeder Einheit, für die $d_e > 1, e \in E$ (vgl. Seite 20), gilt, ein. Diese werden wir im Folgenden als *Unzulässigkeits-Kanten* bezeichnen, da sie uns erlauben, jeden Ort zur nächsten Einheit zu erreichen. Allerdings werden auch die Unzulässigkeits-Kanten mit sehr hohen Kosten in der Zielfunktion versehen.

Abbildung 5 zeigt am Beispiel der TU Chemnitz die eigentlichen Fahrtkanten schwarz und die neuen Unzulässigkeits-Kanten rot und fett.

2.5 Zielfunktion

In diesem Abschnitt werden wir beschreiben, wie die Zielfunktionskoeffizienten gewählt werden und welche Idee dieser Wahl zu Grunde liegt. Unser Hauptsteuerungselement sind dabei die Kosten der $\hat{x}_{s,w,d,a}, (s,w,d,a) \in \mathfrak{X}^G$, welche zu den Flüssen bzw. den Kanten in den Graphen gehören. Zusätzlich führen wir Extravariablen ein, die für eine gute Lastverteilung über die Tage allgemein sowie bestimmter Veranstaltungskomplexe sorgen sollen. Durch kleine Veränderungen an den $x_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathfrak{X}^b$, lassen sich außerdem Präferenzen für bestimmte Einheiten oder Tage setzen, wobei diese auf die anderen Kosten abgestimmt werden.

2.5.1 Die Graphenvariablen

Der Fluss durch einen der Graphen soll den Weg der Studierenden einer Studiengruppe an einem Tag modellieren. Dabei steuern die Kosten der Kanten, wie sich die Studierenden verhalten sollen. Die Modellierung erfolgt hierbei im Sinne von Min-Cost-Flow-Problemen (Minimaler-Kosten-Fluss-Problemen), d. h., die Studierenden versuchen ihre Kosten möglichst zu minimieren. Aus den in Abschnitt 1.6 formulierten Zielen lässt sich leicht ablesen,

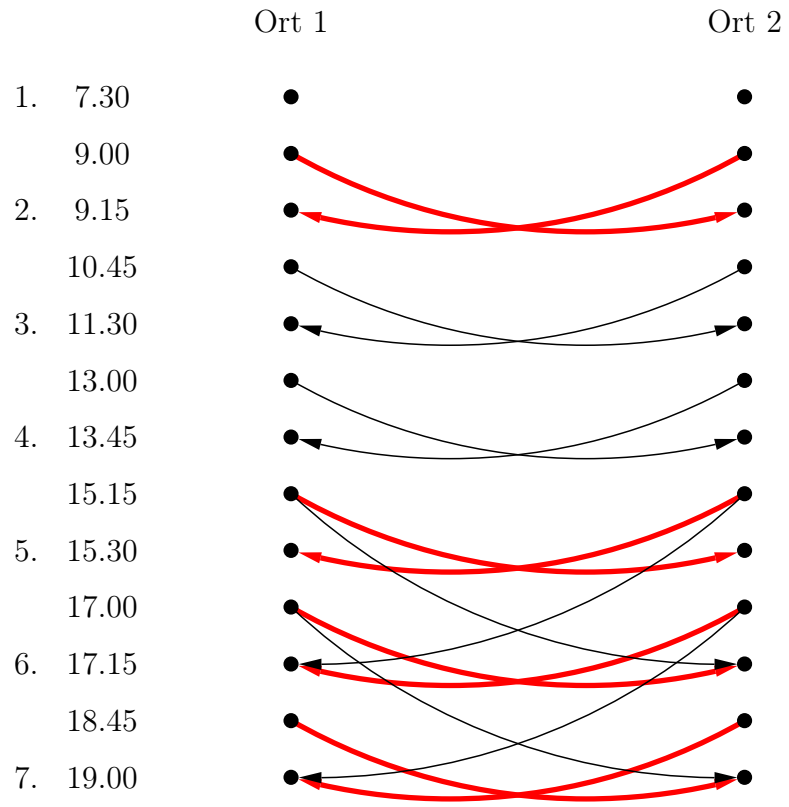


Abbildung 5: Darstellung der alten (schwarz) und neuen (rot und fett) Wechselkanten

dass die Studierenden davon profitieren müssen, Veranstaltungen zu besuchen und dass es sie etwas kosten muss, zu fahren oder zu warten.

Um die Zielstellungen aufeinander abzustimmen, modellieren wir den *idealen Studierenden*, und legen fest, welche konkreten Ziele dieser verfolgen soll. Aus den Zielen bauen wir ein System linearer Ungleichungen, dessen Lösung dann die Zielfunktionskoeffizienten der $\hat{x}_{s,w,d,a}, (s,w,d,a) \in \mathcal{X}^G$, ergibt.

Als Variablen, die alle reelle Werte annehmen können, benutzen wir dafür die folgenden.

- Die Variable w modelliert den Kostenwert für die Wartekanten A_w, wobei w vom Ort und von der Planungseinheit unabhängig ist. Das lässt sich damit begründen, dass die Studierenden stets die gleiche Zeit warten müssen.

- Für die Fahrten zwischen den Standorten nach der e-ten Einheit stehen die Variablen $f_e, e \in E$, wobei an der TU Chemnitz Wechsel nur für $e \in \{1,2,3,4,5\} \subset E$ möglich sind (Fahrtkanten A_f). Dabei stellt $e + d_e, e \in E$ (vgl. Seite 20), den frühest möglichen Beginn der nächsten Veranstaltung dar.

- Mit q_e spiegeln wir den Aufwand des Kommens zu Einheit $e \in E$ wieder und s_e entsprechend den des Gehens nach Einheit $e \in E$ (Start- und Endekanten A_q, A_s, A_{qs}).

- Bei den Veranstaltungen gehen wir etwas anders vor. So wollen wir erreichen, dass jede Veranstaltung von mindestens 10 % aller Studierenden einer Studiengruppe

besucht wird. Allerdings erzwingen wir nicht, dass diese Zahl eingehalten wird, sondern begünstigen dies nur. Man könnte hier auch andere Werte fordern, z. B. dass mindestens ein Studierender zu einer Veranstaltung geht.

Daneben unterscheiden wir die Prioritäten wahlobligatorisch und fakultativ. Sollte unser Mindestmaß von 10 % bei jeder Veranstaltung erfüllt sein, so zieht der ideale Studierende wahlobligatorische vor, sonst geht er lieber zu der wenig besuchten Lehrveranstaltung. Um diese Ziele zu verbinden, wählen wir eine stückweise lineare konvexe Zielfunktion. Für die Variablen zu den Lehrveranstaltungskanten bedeutet dies zwei unterschiedlich große Werte. Daraus ergeben sich $v_{1,e}^{wobl}, v_{1,e}^{fak}$ als Koeffizienten für $\hat{x}_{s,w,d,a}, a \in A_{v,1}^{s,w,d}$, und $v_{2,e}^{wobl}, v_{2,e}^{fak}$ für $\hat{x}_{s,w,d,a}, a \in A_{v,2}^{s,w,d}$ (vgl. (9)), wobei letztere Kanten eine Kapazität von 0.1 haben. Da unser Studierender immer davon profitieren soll, wenn er Veranstaltungen besucht, und wir ein Minimierungsproblem aufbauen, können wir ohne Einschränkung $v_{i,e}^{wobl} \leq v_{i,e}^{fak} < 0, i \in \{1, 2\}$, fordern. (Es gibt hier keine Variablen für obligatorische Veranstaltungen, da zu diesen alle Studierenden anwesend sein müssen.)

- Außerdem führen wir noch $v_1^{\alpha}, v_2^{\alpha} \geq 0$ ein, die den Mindestabstand von $v_{1,e}^{wobl}$ und $v_{1,e}^{fak}$ bzw. $v_{2,e}^{wobl}$ und $v_{2,e}^{fak}$ angeben. Würde man diese nicht mit in das **LP** aufnehmen, so wären Lösungen zulässig, bei denen die Werte übereinstimmen und man würde nicht mehr nach Prioritäten unterscheiden. Außerdem haben wir die Möglichkeit, die Kosten der Veranstaltungen zeitabhängig zu machen. Das ist aber ungünstig, weil dies dazu führt, dass gewisse Einheiten bevorzugt werden, indem der Besuch geringere Kosten verursacht. Aus diesem Grund regulieren wir die Zeiten später. Dennoch schreiben wir in den folgenden Formeln $v_{i,e}^{wobl}, v_{i,e}^{fak}, i \in \{1, 2\}, e \in E$, statt v_i^{wobl}, v_i^{fak}, um dem Leser das Verständnis der Formeln zu vereinfachen.

Wir beschreiben nun das Verhaltensmuster eines idealen Studierenden mit Hilfe von Nebenbedingungen. Dabei gelte stets für alle $k \in \{fak, wobl\}$, falls derartige Indices auftreten.

Es ist sinnvoll zu fordern, dass der Studierende lieber wartet, als dass er an einen anderen Ort fährt. Daher fordern wir

$$\forall\, i \in E \text{ (TUC: } i \in \{1, \ldots, 5\} \subset E)\colon w < f_i. \tag{16}$$

Bemerkung 2.4 Es besteht an dieser Stelle auch die Möglichkeit, weitere Ungleichungen zu ergänzen, die verhindern, dass Fahrten zu bestimmten Zeiten bevorzugt werden. Dieses Problem tritt auf, wenn die $d_i, i \in E$, unterschiedlich groß sind. An der TU Chemnitz müsste man beispielsweise verhindern, dass es günstiger ist, nach der ersten Einheit in einen anderen Ort zu fahren als in der zweiten Einheit zu warten und dann in der ersten großen Pause zu fahren. In den numerischen Tests umgehen wir dieses Problem teilweise, indem wir keine Kanten nach der ersten Einheit einführen. Allerdings besteht das Problem weiterhin, wenn es viele Wartezeiten gibt und die Werte der $f_i, i \in E$, gleich sind, da man dann nicht in den großen Pausen sondern über Einheiten hinweg fährt, um die Kosten einer Warteeinheit zu sparen. Da es aber sinnvoll ist, den Studierenden die Möglichkeit zu geben, essen zu gehen, werden wir keine weiteren Ungleichungen einführen.

Kann der Studierende durch einen Wechsel jedoch in Einheit j eine zusätzliche Veranstaltung besuchen, so wird er die Möglichkeit nutzen und wechseln. Dafür müssen die Kosten für Wechsel und den Besuch einer Lehrveranstaltung geringer sein, als die gesamte Zeit zu warten,

$$\text{hin: } \forall\, i, j \in E, j \geq i + d_i \colon \underbrace{f_i}_{\text{hin}} + \underbrace{v^k_{1,j}}_{\text{LV}} < \underbrace{(d_i - 1) \cdot w}_{\text{Hinfahrt}} + w. \tag{17}$$

Wenn man nun davon ausgeht, dass am ersten Ort zu einer späteren Einheit noch eine Lehrveranstaltung gehalten wird, so muss die Rückfahrt auch mit eingeplant werden,

$$\text{hin + rück: } \forall\, i, j \in E, j \geq i + d_i \colon \underbrace{f_i}_{\text{hin}} + \underbrace{v^k_{1,j} + f_j}_{\text{LV + rück}} < \underbrace{(d_i - 1) \cdot w}_{\text{Hinfahrt}} + w + \underbrace{(d_j - 1) \cdot w}_{\text{Rückfahrt}}. \tag{18}$$

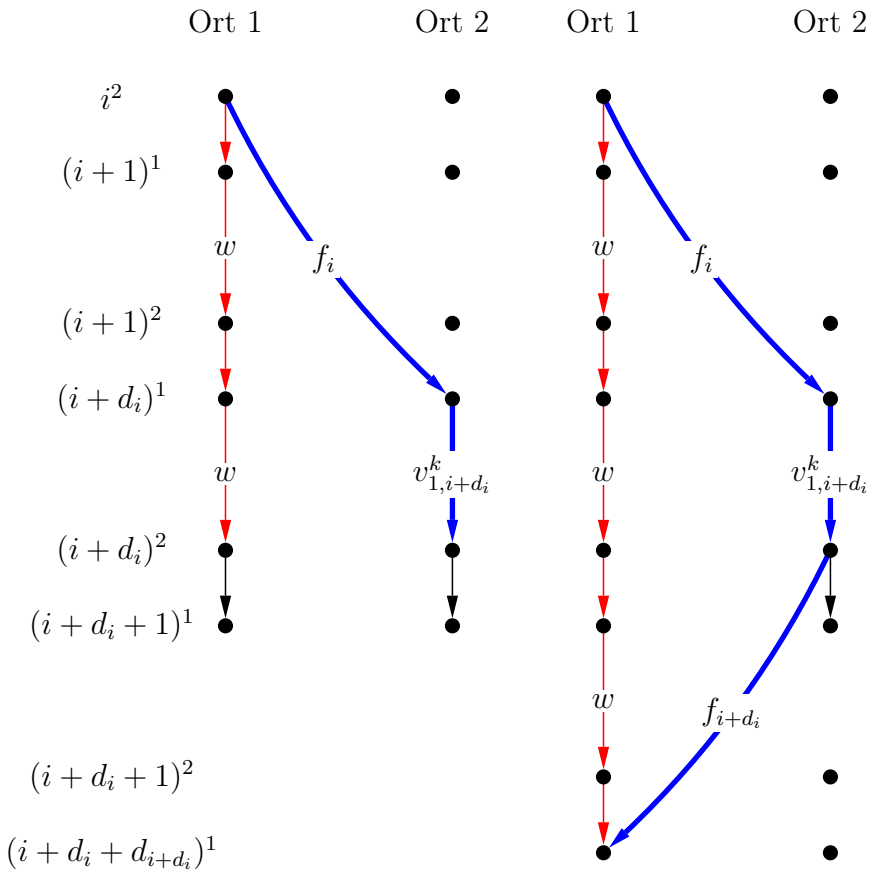


Abbildung 6: Verdeutlichung der Nebenbedingungen (17), (18)

Abbildung 6 verdeutlicht die letzten beiden Nebenbedingungen anhand zweier Graphen, wobei $d_i = 2$ für alle $i \in E$. Außerdem gibt es keine zusätzlichen Wartezeiten. Sollte im rechten Teil der Abbildung die zweite Lehrveranstaltung jedoch erst später beginnen, so müsste man auch in Ort 1 warten. An den obigen Ungleichungen würde sich dadurch aber nichts ändern, da man w wegkürzen könnte.

Weiterhin wartet der Studierende nicht, wenn er stattdessen entweder später zur Universität kommen (vgl. Abbildung 7) bzw. früher nach Hause gehen kann,

$$\forall\, i, j \in E, j > i\colon q_j < q_i + (j - i) \cdot w, \tag{19}$$
$$\forall\, i, j \in E, j > i\colon s_i < (j - i) \cdot w + s_j. \tag{20}$$

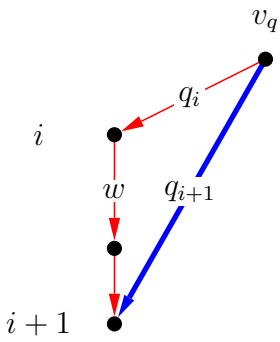


Abbildung 7: Verdeutlichung der Nebenbedingung (19)

Wie zuvor, nimmt er aber einen längeren Aufenthalt in Kauf, d. h., er kommt früher oder geht später, wenn er dadurch vor der j-ten bzw. nach der i-ten Einheit weitere Lehrveranstaltungen besuchen kann,

$$\forall\, i, j \in E, j > i\colon q_i + v^k_{1,i} + \underbrace{(j - i - 1) \cdot w}_{\text{Warten}} < q_j, \tag{21}$$
$$\forall\, i, j \in E, j > i\colon \underbrace{(j - i - 1) \cdot w}_{\text{Warten}} + v^k_{1,j} + s_j < s_i. \tag{22}$$

Dies gilt sogar, wenn dafür noch Fahrten notwendig sind und sich die Wartezeit um etwaige Fahrtzeiten verschiebt,

$$\forall\, i, j \in E, j \geq i + d_i\colon q_i + v^k_{1,i} + f_i + w \cdot (j - i - d_i) < q_j, \tag{23}$$
$$\forall\, i, j \in E, j \geq i + d_i\colon w \cdot (j - i - d_i) + f_i + v^k_{1,j} + s_j < s_i. \tag{24}$$

Damit der Studierende vorzieht, lieber zu Veranstaltungen zu gehen, bei denen noch nicht 10 % der Studiengruppe sind, benötigen wir die folgenden Ungleichungen. Zunächst wird die Variante bevorzugt, bei der man nach der i-ten Einheit an einen anderen Ort fährt, um in j dort vom betragsmäßig größeren Anstieg profitieren zu können.

$$\forall\, i, j \in E, j \geq i + d_i, \forall\, \hat{\imath} \in \{i + 1, \ldots, j\}\colon f_i + v^k_{2,j} < (d_i - 1) \cdot w + v^k_{1,\hat{\imath}}. \tag{25}$$

Daneben kann die Fahrt auch erst danach notwendig sein, wenn man beispielsweise die zwei Möglichkeiten hat, in Ort 1 oder Ort 2 anzufangen, und in der 3. Einheit auf jeden

Fall in Standort 2 sein muss. Es lohnt sich dann trotzdem, den steileren Anstieg in Ort 1 zu nutzen. Man beachte aber, dass dies unter Umständen nicht gilt, wenn man in der 2. Einheit eine weitere Veranstaltung in Ort 2 besuchen könnte.

$$\forall\, i \in E, \forall\, \hat{\imath} \in \{i, \ldots, i + d_i - 1\} \colon v^k_{2,i} + f_i < v^k_{1,\hat{\imath}} + (d_i - 1) \cdot w. \tag{26}$$

Die Entscheidung zwischen wahlobligatorischen und fakultativen Veranstaltungen fällt gemäß den nächsten Bedingungen. Dabei ähneln die Formeln den obigen, nur dass bezüglich der Prioritäten und nicht der unterschiedlichen Wertungen der Kanten unterschieden wird. Wir benötigen dazu eine Angabe über die Differenz der Anstiege der linearen Funktionen auf den jeweiligen Intervallen. Die Abstände sollen mindestens v^α_1 auf [0.1,1] bzw. v^α_2 auf [0,0.1] (beides gegebene feste Parameter größer gleich null) betragen.

$$\forall\, i \in E \colon \qquad v^{wobl}_{1,i} \leq v^{fak}_{1,i} - v^\alpha_1, \tag{27}$$

$$\forall\, i \in E \colon \qquad v^{wobl}_{2,i} \leq v^{fak}_{2,i} - v^\alpha_2, \tag{28}$$

$$\forall\, i, j \in E, j \geq i + d_i, \hat{\imath} \in \{i + 1, \ldots, j\} \colon f_i + v^{fak}_{2,j} < (d_i - 1) \cdot w + v^{wobl}_{1,\hat{\imath}}, \tag{29}$$

$$\forall\, i \in E, \forall\, \hat{\imath} \in \{i, \ldots, d_i - 1\} \colon v^{fak}_{2,i} + f_i < v^{wobl}_{1,\hat{\imath}} + (d_i - 1) \cdot w. \tag{30}$$

Bisher haben wir die Ziele bezüglich der Wechsel zwischen den Standorten und den Überschneidungen von Lehrveranstaltungen in das Ungleichungssystem aufgenommen. Es gibt aber noch weitere Aspekte, die man mithilfe der Kosten der Graphenvariablen berücksichtigen kann, wie die Beachtung der bevorzugten Standorte für eine Studiengruppe, vgl. Abschnitt 1.1. Dazu führen wir die Variable $\beta \geq 0$ ein, wobei $v^k_{j,i} - \beta, j \in \{1, 2\}, i \in E$ die Kosten einer Veranstaltung an einem präferierten Ort darstellt. Da wir jedoch bei wahlobligatorischen und fakultativen Veranstaltungen keine zusätzlichen Wartezeiten oder Wechsel ($w < f_i, i \in E$) in Kauf nehmen wollen, nur um eine Veranstaltung an einem günstigeren Ort zu besuchen, muss folgendes gelten:

$$\forall\, j \in \{1, 2\}, \forall\, i \in E \colon v^k_{j,i} \leq v^k_{j,i+1} - \beta + w. \tag{31}$$

Zusätzlich müssen noch die Ungleichungen (25), (26), (29) und (30) angepasst werden, damit auch präferierte Orte berücksichtigt werden. (Es soll weiterhin günstiger sein, Fahrten für wenig besuchte Veranstaltungen in nicht-präferierten Orten in Kauf zu nehmen.)

$$\forall\, i, j \in E, j \geq i + d_i, \forall\, \hat{\imath} \in \{i + 1, \ldots, j\} \colon f_i + v^k_{2,j} < (d_i - 1) \cdot w + v^k_{1,\hat{\imath}} - \beta, \tag{25'}$$

$$\forall\, i \in E, \forall\, \hat{\imath} \in \{i, \ldots, i + d_i - 1\} \colon v^k_{2,i} + f_i < v^k_{1,\hat{\imath}} - \beta + (d_i - 1) \cdot w, \tag{26'}$$

$$\forall\, i, j \in E, j \geq i + d_i, \hat{\imath} \in \{i + 1, \ldots, j\} \colon f_i + v^{fak}_{2,j} < (d_i - 1) \cdot w + v^{wobl}_{1,\hat{\imath}} - \beta, \tag{29'}$$

$$\forall\, i \in E, \forall\, \hat{\imath} \in \{i, \ldots, d_i - 1\} \colon v^{fak}_{2,i} + f_i < v^{wobl}_{1,\hat{\imath}} - \beta + (d_i - 1) \cdot w. \tag{30'}$$

Daneben gibt es weiterhin noch die Kanten, die zu obligatorischen Veranstaltungen gehören. Deren Zielfunktionskoeffizienten v^{obl} sind aktuell noch null und werden noch nicht beachtet. Auch diese kann man bezüglich der Orte anpassen, wobei wir diesmal sogar maximal einen Wechsel in Kauf nehmen. Der Grund dafür liegt darin, dass es sich bei

obligatorischen Veranstaltungen meist um die Kernveranstaltungen handelt und diese in der Nähe des Fakultätssitzes stattfinden sollten.

$$\forall\, i \in E\colon 0 \leq -v^{obl} \leq f_i. \tag{32}$$

Bemerkung 2.5 Die Anpassungen bezüglich der Orte können auch andere Ziele beachten. Möchte man für obligatorische Veranstaltungen keine zusätzlichen Wartezeiten und Wechsel erzeugen, so muss $|v^{obl}| \leq w$ gewählt werden. Eine andere Möglichkeit besteht in der Erhöhung der Anpassungen, falls stärker präferiert werden soll.

Da aber, wie zu Beginn erwähnt, $v^k_{i,1} = \ldots = v^k_{i,7}, i \in \{1,2\}$ gelten soll, können wir das obiges System noch etwas vereinfachen. Ersetzt man zusätzlich alle echten Ungleichungen durch $\leq$, indem man ein $\varepsilon > 0$ einführt und auf den rechten Seite subtrahiert, so erhält man folgendes System linearer Ungleichungen mit $v^\alpha_1 \geq 0, v^\alpha_2 \geq 0, \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\forall\, i \in E\colon\ & w \leq f_i - \varepsilon, && (16)\\
\forall\, i \in E\colon\ & v^k_2 + f_i \leq v^k_1 - \beta + (d_i - 1)\cdot w - \varepsilon, && (26')\\
\forall\, i \in E\colon\ & v^{fak}_2 + f_i \leq v^{wobl}_1 - \beta + (d_i - 1)\cdot w - \varepsilon, && (30')\\
\forall\, i \in E\colon\ & 0 \leq -v^{obl} \leq f_i, && (32)\\
\forall\, i,j \in E, j \geq i + d_i\colon\ & f_i + v^k_1 + f_j \leq (d_i - 1)\cdot w + w + (d_j - 1)\cdot w - \varepsilon, && (18)\\
\forall\, i,j \in E, j \geq i + d_i\colon\ & f_i + v^k_1 \leq (d_i - 1)\cdot w + w - \varepsilon, && (17)\\
\forall\, i,j \in E, j \geq i + d_i\colon\ & k_i + v^k_1 + f_i + w\cdot(j - i - d_i) \leq k_j - \varepsilon, && (23)\\
\forall\, i,j \in E, j \geq i + d_i\colon\ & w\cdot(j - i - d_i) + f_i + v^k_1 + h_j \leq h_i - \varepsilon, && (24)\\
\forall\, i,j \in E, j \geq i + d_i\colon\ & f_i + v^k_2 \leq (d_i - 1)\cdot w + v^k_1 - \beta - \varepsilon, && (25')\\
\forall\, i,j \in E, j \geq i + d_i\colon\ & f_i + v^{fak}_2 \leq (d_i - 1)\cdot w + v^{wobl}_1 - \beta - \varepsilon, && (29')\\
\forall\, i,j \in E, j > i\colon\ & q_j \leq q_i + (j - i)\cdot w - \varepsilon, && (19)\\
\forall\, i,j \in E, j > i\colon\ & s_i \leq (j - i)\cdot w + s_j - \varepsilon, && (20)\\
\forall\, i,j \in E, j > i\colon\ & q_i + v^k_1 + (j - i - 1)\cdot w \leq q_j - \varepsilon, && (21)\\
\forall\, i,j \in E, j > i\colon\ & (j - i - 1)\cdot w + v^k_1 + s_j \leq s_i - \varepsilon, && (22)\\
& \beta \leq w, && (31)\\
& v^{wobl}_1 \leq v^{fak}_1 - v^\alpha_1, && (27)\\
& v^{wobl}_2 \leq v^{fak}_2 - v^\alpha_2. && (28)
\end{aligned}$$

Dieses **LP** ist für die TU Chemnitz mit $v^\alpha_1 = 1, v^\alpha_2 = 5, \varepsilon = 1$ lösbar, wenn auch nicht eindeutig. Eine Lösung lautet

$$\begin{aligned}
& q_i = s_i = 0,\\
(*)\qquad & w = \beta = 1, f_i = 2, \forall\, i \in E\\
& v^{wobl}_1 = -9, v^{fak}_1 = -7, v^{wobl}_2 = -18, v^{fak}_2 = -13, v^{obl} = -2.
\end{aligned}$$

Diese Werte könnten wir nun als Zielfunktionskoeffizienten für die Graphenvariablen $\hat{x}_{s,w,d,a}, (s,w,d,a) \in \mathcal{X}^G$ nutzen. Allerdings würden wir so beispielsweise nicht beachten, wie viele Studierende von bestimmten Überschneidungen betroffen sind. Um die Zahl der Studierenden in jeder Studiengruppe mit einzubeziehen, multiplizieren wir die obige Lösung und die Parameter (die Lösung bleibt auch zulässig, wenn man die Parameter nicht mit γ_s multipliziert, da $v_1^\alpha \geq 0, v_2^\alpha \geq 0, \varepsilon > 0$ und $\gamma_s \geq 1$) mit einem positivem Skalar $\gamma_s \geq 1$ durch und erhalten damit wieder eine Lösung des Problems. Setzt man als Skalar die Studierendenzahl an, so werden Studiengruppen mit sehr wenigen Studierenden sehr stark benachteiligt. Aus diesem Grund haben wir uns gegen eine lineare Anpassung entschieden. Stattdessen setzen wir

$$\gamma_s = \begin{cases} 1 & a_s < 3 \\ \ln(a_s) & \text{sonst} \end{cases}, s \in S.$$

Man überlegt sich leicht, dass man ebenfalls eine zulässige Lösung erhält, wenn man β und v^{obl} nicht mit γ_s multipliziert. Man kann damit für alle Studiengruppen die gleiche Anpassung bezüglich der Standorte wählen, unabhängig von der jeweiligen Studierendenzahl.

Bemerkung 2.6 Es ist möglich weitere Nebenbedingungen einzufügen, die verhindern, dass ein Studierender in beiden großen Pausen fahren muss und damit nicht zum Mittagessen gehen kann. Außerdem könnte man die Anzahl der Wechsel mittels einer stückweise linearen konvexen Zielfunktion bestrafen, damit möglichst nur einmal pro Tag gewechselt wird. Bisher ist der Zielfunktionswert in den Fällen gleich, dass zwei Wechsel am selben Tag oder an zwei verschiedenen Tagen stattfinden.

2.5.2 Ausgleich über die Tage – Extravariablen

Neben den bisherigen Anpassungen wird eine ausgeglichene Tageslast angestrebt, das heißt, dass an allen Tagen die Anzahl der Veranstaltungen, insbesondere der obligatorischen, ungefähr gleich sein soll. Für diese Zielstellung wollen wir zwei verschiedene Modellierungen angeben.

Bei der ersten führen wir pro Studiengruppe $s \in S$, Tag $d \in D$ und Woche $w \in W$ die neuen Variablen

$$x_{w,d}^{s,1} = \sum_{o \in O, e \in E, v \in V_s} x_{o,(w,d,e),v},$$
$$x_{w,d}^{s,2} = \sum_{o \in O, e \in E, v \in V_s^{obl}} x_{o,(w,d,e),v},$$

mit Indexmenge $\mathcal{X}^{E_1} := \{(s,i,w,d) \colon s \in S, i \in \{1,2\}, w \in W, d \in D\}$ ein. In der Zielfunktion bestrafen wir dann die Differenz zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Wert

$$\forall\, s \in S, \forall\, i \in \{1,2\} \colon \max\{x_{w,d}^{s,i} \colon w \in W, d \in D\} - \min\{x_{w,d}^{s,i} \colon w \in W, d \in D\} \to \min,$$

wobei das an die Löser als

$$\begin{aligned}\min_{\text{s.t.}} & \sum_{s\in S}(u_s - l_s)\\ & x^{s,i}_{w,d} \leq u_s, \forall\, s \in S, \forall\, w \in W, \forall\, d \in D\\ & x^{s,i}_{w,d} \geq l_s, \forall\, s \in S, \forall\, w \in W, \forall\, d \in D\end{aligned}$$

übergeben wird.

Würde man als Zielfunktion lediglich $\max\{x^s_{w,d}\colon w \in W, d \in D\} \to \min$ wählen, so hätte im Fall, dass an einem Tag viele Einheiten fixiert sind, diese Zielfunktion keinen Einfluss auf das Aussehen des Stundenplans. Das Maximum würde (mit hoher Wahrscheinlichkeit) an diesem Tag angenommen und die Verteilung der restlichen Lehrveranstaltungen auf die anderen Tage hätte keine Wirkung auf die Zielfunktion. Daher berücksichtigen wir zusätzlich auch die minimale Anzahl an Lehrveranstaltungen pro Tag.

Weiterhin sollten erneut die Zielfunktionskoeffizienten der Variablen $x^{s,i}_{w,d}, (s,i,w,d) \in \mathcal{X}^{E_1}$, die Kosten für eine Warteeinheit nicht übersteigen. Sie dienen viel mehr als eine Entscheidungshilfe für die Löser, wenn es um die konkrete Anordnung der Lehrveranstaltungen geht.

Eine andere Möglichkeit besteht im Aufbau einer stückweise linearen konvexen Zielfunktion, die ein etwas anderes Ziel verfolgt. Bei dieser führen wir ebenfalls die Variablen $x^{s,i}_{w,d}, (s,i,w,d) \in \mathcal{X}^{E_1}$, wie oben ein, aber wir bestrafen die Abweichung von $x^{s,i}_{w,d}$ zum theoretischen Mittelwert m^i_s, der sich leicht aus der Anzahl der Lehrveranstaltungen ableiten lässt. Ist diese Abweichung klein (z. B. ≤ 1), so bestrafen wir dies nicht mit Kosten (Es kommt sehr selten vor, dass der Mittelwert in $\mathbb{N}_0$ liegt bzw. wir die Möglichkeit haben, an jedem Tag die gleiche Veranstaltungszahl zu setzen.). Bei einer höheren Differenz empfiehlt es sich zunächst wieder Kosten ungefähr in der Höhe einer Warteeinheit anzusetzen und beispielsweise ab Werten über $m^i_s + 3$ oder unter $m^i_s - 3$ diesen Wert noch zu erhöhen. Für jede Studiengruppe hat dann die Zielfunktion das Aussehen wie in Abbildung 8. Durch diese Modellierung können wir jeden einzelnen Tag gewichten, d. h., jeder Tag geht in die Zielfunktion ein und wir beschränken uns nicht nur auf Minimum und Maximum wie im vorigen Fall. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass wir durch die Konvexität der Zielfunktion Steuerungsmöglichkeiten hinzugewinnen.

Wir werden außerdem in Abschnitt 3.2.2 aufzeigen, dass man die stückweise lineare konvexe Zielfunktion so umformen kann, dass es ein lineares Optimierungsproblem entsteht. Dies wäre bei einer konvexen quadratischen Funktion nicht möglich, was allerdings nicht problematisch ist, da $x^{s,i}_{w,d}, (s,i,w,d) \in \mathcal{X}^{E_1}$, ganzzahlige Werte annimmt und Funktionsaufrufe nur an diesen Stellen (verschoben um m^i_s) notwendig sind.

Im Zusammenhang mit einem gut ausgewichteten Stundenplan erscheint es weiterhin sinnvoll zu erreichen, dass Veranstaltungen, die sich über mehr als eine Planungseinheit pro Woche (z. B. 4-SWS-Veranstaltungen, vgl. Abschnitt 1.2) erstrecken, auf unterschiedliche Tage aufgeteilt werden (bei 4-SWS-LV - auf zwei Tage pro Woche). So gibt man den Studierenden die Möglichkeit den Stoff besser zu festigen. Gehören die Veranstaltungen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ zusammen, d. h., sie werden vom gleichen Dozenten der gleichen Hörerschaft präsentiert, so fügen wir für jede Woche $w \in W$ und jeden Tag $d \in D$ die Variable

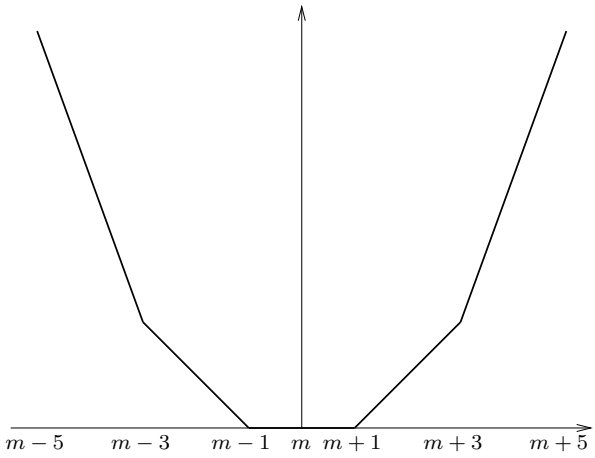


Abbildung 8: Konvexe Zielfunktion der Variablen $x^{s,i}_{w,d}, (s,i,w,d) \in \mathfrak{X}^{E_1}$ mit $m = m^i_s$

$x_{w,d,\{v_1,\ldots,v_n\}}$ ein, die die Anzahl der Veranstaltungen $v_1, \ldots, v_n$ in Woche w an Tag d misst,

$$\forall\, w \in W, \forall\, d \in D\colon x_{w,d,\{v_1,\ldots,v_n\}} = \sum_{o\in O, e\in E} \sum_{i=1}^{n} x_{o,(w,d,e),v_i}.$$

Dabei ist $x_{w,d,\{v_1,\ldots,v_n\}} \in [0,n]$ mit Indexmenge

$$\mathfrak{X}^{E_2} := \{(w,d,\{v_1,\ldots,v_n\})\colon w \in W, d \in D, \{v_1,\ldots,v_n\} \in \mathcal{P}(V), \\ v_1,\ldots,v_n \text{ gehören zusammen}\}.$$

Für die Kosten von $x_{w,d,\{v_1,\ldots,v_n\}}, (w,d,\{v_1,\ldots,v_n\}) \in \mathfrak{X}^{E_2}$, wählen wir erneut eine stückweise lineare konvexe Zielfunktion, wobei die Abweichung von $\frac{n}{|W|\cdot|D|}$ bestraft wird. Wie bei den Variablen $x^{s_i}_{w,d}, (s,i,w,d) \in \mathfrak{X}^{E_1}$, sollten kleine Differenzen keine Kosten verursachen und hohe Abweichung zu entsprechend hohen Kosten führen.

Im Weiteren fassen wir die beiden Indexmengen zusammen:

$$\mathfrak{X}^E := \mathfrak{X}^{E_1} \cup \mathfrak{X}^{E_2}.$$

2.5.3 Die Binärvariablen

Bisher haben wir noch nichts zu den Kosten der Binärvariablen $x_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathfrak{X}^b$, gesagt. Mit deren Hilfe können wir Gewichtungen über die Einheiten bzw. über die Tage vornehmen, vgl. Abschnitt 1.6. Eine erste Forderung besteht zunächst im Ermöglichen von An- und Abreise am Montag bzw. Freitag. Zu diesem Zweck bestrafen wir montags die erste und die zweite Einheit sowie freitags die sechste und siebte. Bei den konkreten Kostenwerten muss man allerdings erneut abwägen und unsere weiteren Ziele beachten. Sind die Kosten sehr hoch, so werden eventuell zusätzliche Wechsel notwendig oder es kommt sogar zu Überschneidungen zwischen Lehrveranstaltungen. Setzt man die Kosten jedoch zu niedrig an, so erzielt man möglicherweise keine Veränderung am Stundenplan.

Daneben gewichten wir bezüglich des Wochentages, indem wir die Differenz des Tages d von $\lceil |D|/2 \rceil$ (an der TU Chemnitz vom Mittwoch, $D = \{1, 2, \underline{3}, 4, 5\}$) messen und mit einem festzulegenden Faktor $\tilde{f}$ bestrafen. Damit gilt für den Zielfunktionskoeffizienten von $x_{o,(w,d,e),v}$: $c \leftarrow c + \tilde{f} \cdot |d - \lceil |D|/2 \rceil|$.

Bei der Festlegung der günstigsten Einheit gehen wir jedoch nicht so pauschal vor, sondern wägen anhand der Studiengruppen und der Anzahl der Zahl der Studierenden $c_{V,v}$ in Veranstaltung $v \in V$ ab. So bevorzugen im Normalfall die Studierenden in höheren Semestern spätere Zeiten und stark besuchte Veranstaltungen (Anzahl der Studierenden und Anzahl der beteiligten Studiengruppen) sollten möglichst zentral liegen. Um die Zielfunktionskoeffizienten entsprechend anzupassen, bestimmen wir für eine Veranstaltung $v \in V$ die durchschnittliche Anzahl an Studienjahren d_v der Hörer und die Anzahl der Studiengruppen $n_{S,v}$. Diese Informationen können wir aus den Angaben zum Fachsemester und den Mengen $V_s, s \in S$, erhalten. Wir passen den Zielfunktionskoeffizienten der Variablen $x_{o,(w,d,e),v}, (o,(w,d,e),v) \in \mathfrak{X}^b$, mit

$$c \leftarrow c - \ln(c_{V,v}) \cdot \frac{n_{S,v}}{|e - d_v| + 1} \cdot \overline{f}$$

an, d. h., bei einer Lehrveranstaltung nur für Erstsemestler (Studienjahr 1) ist die erste Einheit am besten und spätere Einheiten erhöhen die Gesamtkosten. Dieser Koeffizient ist allerdings an die Strukturen an der TU Chemnitz angepasst, da es hier sieben Einheiten und Planungen bis zum neunten Semester, fünften Studienjahr, gibt. Bei anderen Vorgaben sind auch andere Wert denkbar bzw. sinnvoll.

2.6 Zuweisung der Räume

Bisher haben wir lediglich den Standort der Veranstaltungen festgelegt. Wir wollen in der ursprünglichen Aufgabenstellung aber auch wissen, in welchen Räumen diese stattfinden. Algorithmus 1 beschreibt ein mögliches Vorgehen, um diese zuzuweisen.

Dabei kann es vorkommen, dass eine zulässige Lösung von **SPOPT** mit Raumgruppen im eigentlichen Sinne unzulässig ist. Dieses Problem entsteht durch die Zusammenfassung von Räumen in Raumgruppen, wobei wir von jeder Raumgruppe nur die Eigenschaften, an der TU Chemnitz nur die Sitzanzahl, und die Anzahl der zugehörigen Räume kennen. Allerdings lässt es sich so an der TU Chemnitz beispielsweise nicht vermeiden, dass es bei Vorhandensein von nur fünf Räumen mit über 100 Sitzplätzen an einem Standort und weiteren fünf Räumen mit 50 Sitzen, gleichzeitig dort sieben Veranstaltungen stattfinden sollen mit mehr als 50 Sitzen. Dann reicht die vorliegende Anzahl an Räumen nicht aus, kann aber bei uns zulässig sein (solange nicht mehr als 10 Veranstaltungen mehr als 40 Sitze benötigen).

Bemerkung 2.7 Falls man bei der Zuweisung der Räume Probleme feststellt, hat man mehrere Optionen. Man könnte zum einen die am Anfang festgelegten Raumgruppen anpassen bzw. weitere Raumgruppen einführen. Da wir uns auf die Sitzanzahl als Raumkriterium beschränkt haben, wird ein erneutes Lösen notwendig, wobei jetzt veränderte

Algorithmus 1 Zuweisung der Lehrveranstaltungen zu Räumen

Require: Lösung von **SPOPT** mit Raumgruppen (Beschränkung auf Raumgruppen an der TUC)

for $t \in T$ **do**
  for $o \in O$ **do**
    $\tilde{V} := \{v \in V : x_{o,t,v} = 1\}$
    Weise $v \in \tilde{V}$ mit festem Raum diesen zu; $\tilde{V} \leftarrow \tilde{V} \setminus \{v\}$.
    for $\tilde{V} \neq \emptyset$ **do**
      Bestimme $\hat{v} \in \tilde{V} : c_{V,\hat{v}} = \min\{c_{V,v} : v \in \tilde{V}\}$
      Weise $\hat{v}$ den kleinstmöglichen freien Raum in Ort o zu.
      if Zuweisung nicht möglich (weil kein Raum mit benötigter Größe vorhanden) **then**
        return Lösung unzulässig im eigentlichen Sinne!
      else
        $\tilde{V} \leftarrow \tilde{V} \setminus \{\hat{v}\}$
      end if
    end for
  end for
end for
return Stundenplan mit zugewiesenen Räumen

Raumbelegungsnebenbedingungen gelten, da sich bei einigen Veranstaltungen die Größenklassifikation ändert. Alternativ kann man die Nebenbedingungen auch zusätzlich hinzugeben und, von der ursprünglichen Lösung ausgehend, erneut lösen. Sollten solche Probleme jedoch häufiger auftreten, so sollten die Annahmen bzgl. der Grenzen zwischen den Raumgruppen entsprechend revidiert werden, um die Anzahl der Iterationen bei späteren Berechnungen zu reduzieren. Eventuell ist auch denkbar, dass man für bestimmte Räume weitere Elemente in die Menge V_{NPar} mit aufnimmt und damit Überschneidungen spezieller Veranstaltungen von vornherein ausschließt.

2.7 Behandlung von Symmetrien

Große Probleme bei der Lösung des Stundenplanproblems entstehen typischerweise durch viele Symmetrien im Problem, so schreibt M. Gavanelli [15]: „The basic timetabling problem is highly symmetric...“. So ist es für die Löser sehr schwer zu erkennen, wie zwei Veranstaltungen, die nur von einer Studiengruppe besucht werden und die gleiche Priorität haben, angeordnet werden sollen, da sich die Zielfunktionskoeffizienten der Binärvariablen nur sehr wenig unterscheiden. Um einige dieser Symmetrien abzubauen, werden die Variablen zu Veranstaltungen über vier SWS zusammengefasst, ebenso falls die gleiche Übung von einem Dozenten mehrfach für die gleiche Personengruppe gehalten wird. Bei der dazugehörigen Nebenbedingung, dass eine Veranstaltung genau einmal stattfindet (2), verändert sich damit die rechte Seite von eins auf die entsprechende Anzahl.

Aus der Literatur (z. B. [15, 16, 22, 25]) sind weitere Möglichkeiten bekannt, mit denen

man versucht, Symmetrien in kombinatorischen Problemen abzubauen, indem man zusätzliche Nebenbedingungen hinzufügt und damit die Menge der Optimallösungen verkleinert. Dies verringert dann vor allem die Iterationsschritte bei Branch-and-Bound-Verfahren. Die meisten „Symmetriebrecher“ haben aber die Voraussetzung, dass der Zielfunktionswert nicht von der Permutation der Variablen abhängig ist.

Ein Beispiel, bei dem derartige Anpassungen zu guten Ergebnissen führen, ist das *Social Golfer Problem* (**SGP**), vgl. [22] S. 224-226. Bei diesem sind

- die Wochen G_W und
- die Spieler S, die jeweils auf m Gruppen aufgeteilt werden sollen, mit $|S| = n \cdot m$,

gegeben. Ziel ist es einen Spielplan zu erstellen, der regelt, welche Spieler wann in welchen Gruppen spielen, wobei zwei Spieler nicht mehr als einmal in einer Gruppe aufeinander treffen sollen. Um dem Leser die Problematik zu verdeutlichen, wollen wir das Beispiel etwas genauer erläutern. Aus dieser Aufgabenstellung leiten die Autoren von [22] die ganzzahligen Variablen

$$g_{s,w} = \begin{cases} m & \text{Spieler } s \text{ spielt in Woche } w \text{ in Gruppe } m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, s \in S, w \in G_W,$$

ab. Da lediglich eine zulässige Belegung gesucht wird, kann man die Zielfunktion weglassen bzw. über eine Konstante optimieren.

Es ist klar, dass hier viele Symmetrien auftreten. So kann man die Spieler oder die Wochen bzw. die Gruppen in diesen permutieren. Dem kann man mit der Einführung einer lexikografischen Ordnung zwischen möglichen Lösungen entgegenwirken, wobei

$$\begin{aligned} x = (x_1, \ldots, x_n) \leq_{lex} y = (y_1, \ldots, y_n) :\Leftrightarrow \\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\colon \left(\left[\bigwedge_{1 \leq i' < i} x_{i'} = y_{i'} \right] \Rightarrow x_i \leq y_i \right). \end{aligned}$$

Beim **SGP** kann man mit

$$(g_{i,1}, \ldots, g_{i,|G_W|}) \leq_{lex} (g_{i+1,1}, \ldots, g_{i+1,|G_W|}), \forall\, 1 \leq i < |S|$$

verhindern, dass zwei Spieler einfach miteinander vertauscht werden können, vergleiche dazu

	S_1	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	S_4	S_5	S_6			S_1	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{S_3}$	S_4	S_5	S_6
W_1	1	1	2	2	3	3		W_1	1	2	1	2	3	3
W_2	1	2	1	3	2	3	$\leftrightsquigarrow$	W_2	1	1	2	3	2	3
W_3	1	2	2	3	3	1		W_3	1	2	2	3	3	1

,

wobei $W_i \in G_W, S_j \in S$ gilt und die Einträge der Tabelle die jeweilige Gruppe darstellen. Mit

$$(g_{1,k}, \ldots, g_{|S|,k}) \leq_{lex} (g_{1,k+1}, \ldots, g_{|S|,|G_W|}), \forall\, 1 \leq k < |G_W|$$

erreicht man, dass Vertauschungen der Wochen wie hier

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
$\mathbf{W_1}$	1	1	2	2	3	3
$\mathbf{W_2}$	1	2	1	3	2	3
W_3	1	2	2	3	3	1

$\leftrightsquigarrow$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
$\mathbf{W_1}$	1	1	2	3	2	3
$\mathbf{W_2}$	1	1	2	2	3	3
W_3	1	2	2	3	3	1

in der neuen Lösungsmenge nicht mehr enthalten sind. Doch auch mit Hilfe dieser Nebenbedingungen, kann man noch nicht alle Symmetrien beseitigen. Entsprechend wurden weitere Varianten entwickelt, auf die wir hier nicht eingehen wollen, vgl. [22] Kapitel 2.2.2 und 3.

Bei uns ist die Annahme bzgl. der Zielfunktion jedoch nur in den seltenen Fällen erfüllt, dass ein Dozent für die gleiche Hörerschaft mehrere Veranstaltungen anbietet und, abgestimmt auf unsere Manipulationen der Zielfunktionskoeffizienten für die Binärvariablen $x_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathcal{X}^b$, auch die gleiche Raumgröße angefordert worden ist. Außerdem sind bei uns durch vorher festgelegte Planungseinheiten auch nicht alle Kombinationen möglich. Aus diesen Gründen verzichten wir auf diese Methoden.

2.8 Weitere Möglichkeiten

Die bisher beschriebenen Nebenbedingungen und Zielfunktionskoeffizienten bauen auf den uns vorliegenden Daten auf. Falls weitere Informationen zur Verfügung stehen, besteht die Möglichkeit, weitere Aspekte in die Stundenpläne einfließen zu lassen.

Neben den aufgezeigten Anpassungen bzgl. der Veranstaltungsklassen (obl, wobl, fak) kann auch die Veranstaltungsart für Gewichtungen genutzt werden. So ist es beispielsweise denkbar, dass Seminare nach der vierten Einheit bevorzugt werden oder Vorlesungen möglichst früh stattfinden sollen. Weiterhin kann man versuchen, obligatorische Veranstaltungen stärker auf zentrale Termine zu konzentrieren, indem man die Kosten der Kanten zu obligatorischen Veranstaltungen in den Studierendengraphen anpasst. Dabei muss man erneut auch die anderen Zielstellungen mit abwägen.

Sollten statistische Daten darüber existieren, wie sich die Studierenden einer Studiengruppe auf die Lehrveranstaltungen verteilen, so können diese Daten beim Aufbau der Zielfunktionskoeffizienten genutzt werden. (Bisher arbeiten wir aber lediglich mit der geplante Anzahl an Zuhörern und kennen die relevanten Studiengruppen für eine Veranstaltung.) So kann es beispielsweise vorkommen, dass mehrere Vertiefungsrichtungen innerhalb eines Studiengruppe möglich sind (an der TU Chemnitz z. B. Diplom-Studiengang Mathematik im 2. Semester [D_MA__2, MMM2] mit den Vertiefungsrichtungen: Elektrotechnik, Maschinenbau, Physik, Chemie, Wirtschaftswissenschaften, Informatik) und dass es für jede Vertiefungsrichtung eigene obligatorische Veranstaltungen gibt. Diese könnten durchaus parallel liegen, ohne dass dies ein Problem darstellen würde. Desweiteren ist eine bessere Anpassung der Zielfunktionskoeffizienten möglich, wenn man weiß, wie viele Studierende tatsächlich von einer ungünstigen gelegenen Planungseinheit oder von einem Wechsel betroffen sind. Darüberhinaus kann eine spezielle Behandlung von Übungsgruppen, d. h., für eine Studiengruppe werden themengleiche Übungen angeboten,

von denen die Studierenden jeweils nur eine besuchen sollten, von Vorteil sein. Dann empfiehlt es sich z. B., dass für die dazugehörigen Kanten in den Studierendengraphen nur ein Fluss bis zu einer bestimmten Höhe begünstigt wird, etwa bis $\frac{1}{3}$, damit mehrere Übungen nebeneinander gelegt werden können.

Bei den Dozenten haben wir bisher die Wegeproblematik noch nicht beachtet. Man könnte bei ihnen auch für jeden Tag pro Woche einen Graphen einführen, der den Studierendengraphen ähnelt. Allerdings braucht man dann an jedem Ort zu jeder Einheit nur zu unterscheiden, ob er eine Veranstaltung hält oder nicht. Dementsprechend hat zwar jeder Graph weniger Kanten, aber die Anzahl der Dozenten ist meist größer als die Anzahl der Studiengruppen. Es ist jedoch fraglich, ob diese enorme Vergrößerung der Variablenanzahl lohnt, da die meisten Dozenten nur eine kleine Anzahl an Veranstaltungen halten und durch die Bevorzugung bestimmter Orte in der Nähe der Fakultät der Studierenden, auch die Wechsel für die Dozenten verringert werden. Alternativ kann man die Lösung wie bisher ohne Dozenten-Wechsel-Nebenbedingungen bestimmen und dann nur die Dozenten betrachten, bei denen Probleme auftreten. Hierfür können beispielsweise Schnittebenenverfahren eingesetzt werden, die zusätzliche Nebenbedingungen zum ursprünglichen Problem hinzufügen.

In anderen Stundenplanungsmodellen gibt es häufig auch Belastungsschranken B_s für die Studierenden bzw. B_p für die Dozenten, d. h., dass an einem bestimmten Tag nur maximal B_s bzw. B_p Einheiten durchgeführt werden können. Als Nebenbedingung ergibt sich dann für die Dozenten:

$$\forall\, p \in P, \forall\, w \in W, \forall\, d \in D\colon \sum_{o \in O, e \in E} \sum_{v \in V : p \in P_v} x_{o,(w,d,e),v} \leq B_p.$$

Dabei kann auch für jeden Dozenten eine andere Schranke angesetzt werden.

3 Lösungsansätze

In diesem Kapitel gehen wir auf die Lösung von **SPOPT** ein. Dazu beweisen wir zunächst, dass das Problem **NP**-schwer ist. Aus diesem Grund ist das Finden der exakten Lösung (wahrscheinlich) nicht praktikabel bzw. effizient, aber mit Hilfe von Branch-and-Cut-Algorithmen prinzipiell möglich. Deshalb gehen wir hier nur auf Heuristiken ein, die auf Relaxationen unseres gemischt-ganzzahligen Problems **SPOPT** beruhen und die in numerischen Tests teilweise sehr gute Laufzeiten aufgewiesen haben. Ein Vergleich dieser schließt unsere Ausführungen ab.

Bemerkung 3.1 Es sei hier erwähnt, dass das Finden einer guten Lösung bei unserem Problem in der Praxis durchaus ausreicht. Das hat mehrere Gründe. Zum einen sind die vorliegenden Daten nicht exakt bzw. es fehlen wichtige Informationen, z. B. über die Verteilung der Studierenden einer Studiengruppe auf die einzelnen Veranstaltungen. Zum anderen haben wir unsere Zielfunktionskoeffizienten zwar mathematisch hergeleitet, aber wir haben in Abschnitt 2.5.1 nur eine mögliche Lösung des Ungleichungssystems verwendet und bei den Zielen des idealen Studierenden sehr starke Annahmen getroffen.

3.1 Komplexität von SPOPT – NP-Vollständigkeit

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Komplexität von **SPOPT**. Wir werden hier jedoch nicht genauer auf die Begriffe der Komplexitätstheorie eingehen und möchten auf die Abhandlungen in [19] und [29] verweisen.

Unter den (realistischen) Voraussetzungen, dass die Universität nur eine durch eine Konstante beschränkte Anzahl an Räumen hat und nur ein endlicher Zeitraum geplant werden soll, ist das Problem **SPOPT** in polynomieller Zeit lösbar, denn dann kann es nur beschränkt viele verschiedene Lehrveranstaltungen geben. Falls jede Studiengruppe mindestens eine Lehrveranstaltung hat und jeder Dozent mindestens eine Lehrveranstaltung hält, kann es auch nur endlich viele Studiengruppen und Dozenten geben. Damit sind alle Eingabegrößen beschränkt und somit kann der Lösungsraum in polynomieller Zeit enumeriert werden.

Um die Komplexität des Problems besser einschätzen zu können, müssen wir daher für einige der Eingabedaten verlangen, dass die Größen nicht durch Konstanten beschränkt sind. Bereits in dem Fall, dass die Anzahl der Räume mindestens so groß ist wie die Anzahl der Lehrveranstaltungen (während die Anzahl der Planungseinheiten weiterhin beschränkt bleibt), ist das Problem **NP**-schwer (d. h., man kann alle Probleme aus **NP** polynomiell auf **SPOPT** reduzieren). Da wir für jede Veranstaltung gewisse Daten gegeben haben, ist die Anzahl der Veranstaltungen (und damit die der Räume) also polynomiell in der Eingabegröße.

Wir zeigen dies, indem wir das Problem der *Graphen-Dreifärbung*, vgl. Definition 3.2, auf das Problem **SPOPT** reduzieren, wobei wir wissen, dass es sich hierbei um ein **NP**-vollständiges Problem handelt [19].

Definition 3.2 Sei $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ ein Graph mit Knotenmenge $\bar{V}$ und Kantenmenge $\bar{E}$. Der Graph $\bar{G}$ heißt dreifärbbar, wenn es eine Funktion $\phi\colon \bar{V} \to \{1, 2, 3\}$ gibt, so dass für alle Kanten $\{u, v\} \in \bar{E}\colon \phi(u) \neq \phi(v)$.

Satz 3.3 *Unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der Räume mindestens so groß ist wie die Anzahl der Lehrveranstaltungen, ist das Problem* **SPOPT** **NP***-schwer.*

Beweis. Sei $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ ein Graph mit Knotenmenge $\bar{V}$ und Kantenmenge $\bar{E}$. Wir erstellen nun eine **SPOPT**-Instanz, die genau dann zulässig ist (d. h., die Optimallösung benutzt keine Unzulässigkeitsvariablen), falls der Graph $\bar{G}$ dreifärbbar ist. Wir erzeugen für jeden Knoten $\bar{v} \in \bar{V}$ eine Lehrveranstaltung $v \in V$ und für jede Kante $\{\bar{u}, \bar{v}\} \in \bar{E}$ eine Studiengruppe $s_{uv} \in S$, für die beide Lehrveranstaltungen obligatorisch sind. Weiterhin gibt es nur einen Standort und genau drei Planungseinheiten (dies kann man auch dadurch erreichen, indem jede andere Planungseinheit durch je eine zusätzliche Lehrveranstaltung belegt wird, die für alle Studiengruppen obligatorisch ist). Dann ist leicht einzusehen, dass es genau dann einen zulässigen Stundenplan gibt, wenn der Graph dreifärbbar ist. Dabei entsprechen alle in Planungseinheit 1 stattfindenden Lehrveranstaltungen der ersten Farbklasse, die in Planungseinheit 2 stattfindenden der zweiten und die in Planungseinheit 3 stattfindenden der dritten. □

3.2 Lösung von SPOPT

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Lösung unseres Optimierungsproblems **SPOPT** befassen. Dazu werden wir zunächst das Problem noch einmal formal aufschreiben und anschließend auf Grundlage seiner Struktur zwei Lösungsansätze diskutieren.

3.2.1 SPOPT als ganzzahlige Optimierungsaufgabe und Relaxation

Wir benutzen in diesem und den folgenden Abschnitten zusätzlich die folgenden Bezeichnungen:

- $X_b = [0, 1]^{|\tilde{\mathfrak{X}}^b|}$,
- $X_E = [l_{e_1}, u_{e_1}] \times \ldots \times [l_{e_m}, u_{e_m}]$, ($l_{e_i}, i = 1 \ldots, m$, stellen dabei untere Schranken an die Extravariablen (Indexmenge $\mathfrak{X}^E$) dar, die man stets mit null ansetzen kann; $u_{e_i}, i = 1 \ldots, m$, sind obere Schranken, die wir (sehr grob abgeschätzt) mit $|V|$ ansetzen können)
- X_G^i die zulässigen Flüsse des i-ten Flussproblems, d. h.
  $X_G^i = \{x \in \mathbb{R}^k\colon x$ erfüllt die Nebenbedingungen (10),(11),(12), $k = |A_{s,w,d}|, i = (s, w, d)$ und $x_j = x_{s,w,d,j} \in \begin{cases} [0, 0.1] & j \in A_{v,2}^{s,w,d} \\ [0, 1] & \text{sonst} \end{cases}, j = 1 \ldots, k\ \}$.
- Für $n = n_1 + \ldots + n_k$ und einen Vektor $x \in \mathbb{R}^{n_1 + \ldots + n_k}$ bezeichnet $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$ die zu n_i gehörenden Komponenten von x.

- Für $n = n_1 + \ldots + n_k$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ bezeichnet $A^i \in \mathbb{R}^{m,n_i}$ die zu n_i gehörenden Spalten von A.

Das Problem **SPOPT** lässt sich dann formal beschreiben als

$$(IP) \qquad \begin{aligned} \min_{\text{s.t.}} \; & c_b^T x_b + c_G^T x_G + f(x_E) \\ Ax &\leq b,\ x = (x_b, x_G, x_E)^T \\ Cx &= d \\ x_b &\in \{0,1\}^{|\tilde{\mathcal{X}}^b|} \\ x_G^i &\in X_G^i,\ i = 1, \ldots, k \\ x_E &\in X_E, \end{aligned}$$

wobei $Ax \leq b$ und $Cx = d$ die koppelnden Nebenbedingungen und $f\colon \mathbb{R}^{|\mathcal{X}^E|} \to \mathbb{R}$ die konvexe Zielfunktion darstellen. Dabei ist

$$f(x_E) = \sum_{j=1}^{|\mathcal{X}^E|} f_j(x_{E,j})$$

eine Summe von eindimensionalen konvexen Funktionen $f_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, j = 1, \ldots, |\mathcal{X}^E|$. Dieses Problem ist ein gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem und, wie in Abschnitt 3.1 gezeigt, sehr schwer zu lösen. Wir wollen daher anstelle des Problems (IP) das folgende Optimierungsproblem (IPR), seine *Relaxation*, lösen, die durch Ersetzen der Ganzzahligkeitsbedingungen $x_b \in \{0,1\}^{|\tilde{\mathcal{X}}^b|}$ durch $x_b \in X_b$ entsteht

$$(IPR) \qquad \begin{aligned} \min_{\text{s.t.}} \; & c_b^T x_b + c_G^T x_G + f(x_E) \\ Ax &\leq b,\ x = (x_b, x_G, x_E)^T \\ Cx &= d \\ x_b &\in X_b \\ x_G^i &\in X_G^i,\ i = 1, \ldots, k \\ x_E &\in X_E. \end{aligned}$$

Da die X_b, X_E und X_G^i sowie die Nebenbedingungen $Ax \leq b$ und $Cx = d$ konvexe Mengen beschreiben und die Zielfunktion konvex ist, handelt es sich um ein konvexes Optimierungsproblem. Die Lösung dieses Optimierungsproblems liefert (sofern sie existiert) eine Optimallösung $x^* = (x_b^*, x_G^*, x_E^*)^T$.

Diese ist i. A. jedoch keine Lösung des Problems (IP), da die Variablen x_b^* nicht ganzzahlig sein müssen. Dennoch werden wir versuchen, aus der Lösung von (IPR) eine möglichst gute Lösung von (IP) zu berechnen, vgl. dazu die Kapitel 3.2.7, 3.2.8.

In den nächsten beiden Abschnitten wollen wir zwei Lösungsansätze für (IPR) vorstellen. Als erstes werden wir dabei das Problem als lineares Programm formulieren, was uns eine Lösung mithilfe von Verfahren der linearen Optimierung ermöglicht. Im zweiten Ansatz verwenden wir ein *Bündelverfahren*, um das *Lagrange-Duale* von (IPR) zu berechnen.

3.2.2 Formulierung von (IPR) als LP

Das Problem (IPR) ist eine konvexe aber keine lineare Optimierungsaufgabe, da die Zielfunktion wegen des Terms $f(x_E)$ nicht linear ist. Im Folgenden werden wir unter Verwendung eines Standardansatzes zeigen, wie man das Problem dennoch als **LP** formulieren kann, um es anschließend mittels entsprechender Verfahren zu lösen.

Wie bereits erwähnt ist $f(x_E)$ die Summe eindimensionaler konvexer Funktionen $f_j(x_{E,j})$, $j = 1, \ldots, |\mathcal{X}^E|$. Diese sind stückweise linear, haben also die Form

$$f_j(x_{E,j}) = \max_{p=1,\ldots,m_j} s_{j,p} \cdot x_{E,j} + t_{j,p},$$

oder, äquivalent

$$f_j(x_{E,j}) = \min\{y \colon y \geq s_{j,p} \cdot x_{E,j} + t_{j,p},\ p = 1, \ldots, m_j\}.$$

Damit lässt sich (IPR) äquivalent formulieren als

$$
\begin{aligned}
&\min_{\text{s.t.}} c_b^T x_b + c_G^T x_G + \sum_{j=1}^{|\mathcal{X}^E|} y_j \\
(IPR') \qquad & \begin{array}{rcl}
y_j & \geq & s_{j,p} \cdot x_{E,j} + t_{j,p},\ j = 1, \ldots, |\mathcal{X}^E|, p = 1, \ldots, m_j \\
Ax & \leq & b,\ x = (x_b, x_G, x_E)^T \\
Cx & = & d, \\
x_b & \in & X_b, \\
x_G^i & \in & X_G^i,\ i = 1, \ldots, k \\
x_E & \in & X_E \\
y_j & \in & \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, |\mathcal{X}^E|.
\end{array}
\end{aligned}
$$

Hierbei handelt es sich um eine lineare Optimierungsaufgabe, welche mittels entsprechender Verfahren der linearen Optimierung effizient gelöst werden kann. In Abschnitt 3.3 haben wir einige Testinstanzen auf diesem Weg berechnet.

Diese Tests haben jedoch gezeigt, dass eine exakte Lösung auch mit moderner Software aufgrund der Größe des Problems relativ viel Zeit in Anspruch nimmt. Daher beschreiben wir in den nächsten Abschnitten einen anderen Weg, der (IPR) mittels sogenannter *Lagrange-Relaxation* näherungsweise löst.

3.2.3 Lagrange-Duales und Lagrange-Relaxation

Dieser und der nächste Abschnitt fassen kurz die theoretischen Grundlagen zum Lagrange-Dualen und zur Lagrange-Relaxation zusammen. Anschließend stellen wir einen Algorithmus zur Lösung der entstehenden Optimierungsaufgabe vor und im darauffolgenden Abschnitt werden wir die Ergebnisse auf das Problem (IPR) anwenden, um näherungsweise Lösungen zu bestimmen.

Ausgangspunkt ist ein konvexes Optimierungsproblem der Form

$$(P) \qquad \begin{array}{rcl} \min\limits_{\text{s.t.}} & f(x) & \\ x & \in & X \\ Ax & \leq & b \\ Cx & = & d, \end{array}$$

wobei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe kompakte Menge ist. Falls das Problem einen zulässigen Punkt x besitzt, so existiert aufgrund der Kompaktheit von X eine Optimallösung. Es bezeichne x^* eine Optimallösung von (P) und f^* den zugehörigen optimalen Zielfunktionswert. Die Funktion

$$L(x, \lambda, \eta) := f(x) - \lambda^T(b - Ax) - \eta^T(d - Cx)$$

heißt *Lagrangefunktion*. Man sieht leicht, dass

$$f^* = \min_{x \in X} \sup_{\lambda \geq 0, \eta} L(x, \lambda, \eta)$$

gilt, denn sind die Nebenbedingungen $Ax \leq b, Cx = d$ erfüllt, so ist

$$\sup_{\lambda \geq 0} -\lambda^T \underbrace{(b - Ax)}_{\geq 0} = 0, \ \sup_{\eta} -\eta^T \underbrace{(d - Cx)}_{=0} = 0.$$

Das Problem

$$(D_L) \qquad \sup_{\lambda \geq 0, \eta} \min_{x \in X} L(x, \lambda, \eta)$$

heißt *Lagrange-Duales zu* (P). Es ist ein wohlbekanntes Resultat, dass für ein Problem (P) und sein Lagrange-Duales (D_L) *schwache Dualität*, d. h.

$$\min_{x \in X} \sup_{\lambda \geq 0, \eta} L(x, \lambda, \eta) \geq \sup_{\lambda \geq 0, \eta} \min_{x \in X} L(x, \lambda, \eta),$$

erfüllt ist (siehe auch [5], Prop. 6.2.2). Weiterhin liegt im Falle des obigen Problems sogar *starke Dualität* vor, d. h., falls das Problem (P) eine endliche Optimallösung besitzt, hat auch das Problem (D_L) eine Optimallösung und es gilt

$$\min_{x \in X} \sup_{\lambda \geq 0, \eta} L(x, \lambda, \eta) = \sup_{\lambda \geq 0, \eta} \min_{x \in X} L(x, \lambda, \eta),$$

(siehe auch [5], Prop. 6.4.2). Die optimalen Werte (λ^*, η^*) von (D_L) heißen auch die *optimalen Lagrange-Multiplikatoren*.

Betrachten wir noch einmal das Problem (IP) sowie seine lineare Relaxation (IPR). Man überprüft leicht, dass (IPR) ein konvexes Optimierungsproblem vom obigen Typ ist. Vorausgesetzt, dass (IP) und damit auch (IPR) eine zulässige Lösung besitzt, existieren also optimale Lagrange-Multiplikatoren (λ^*, η^*) von (D_L). Seien $f^*_{(IP)}$ der Optimalwert

von (IP), $f^*_{(IPR)}$ der Optimalwert von (IPR) und $f^*_{(D_L)}$ der Optimalwert des Lagrange-Dualen. Dann folgt wegen der schwachen und starken Dualität

$$f^*_{(IP)} \geq f^*_{(IPR)} = f^*_{(D_L)}$$

und für jeden dual zulässigen Punkt $(\bar{\lambda}, \bar{\eta})$ gilt somit

$$f^*_{(IP)} \geq \min_{x \in X} L(x, \bar{\lambda}, \bar{\eta}).$$

Jeder dual zulässige Punkt gibt uns also eine untere Schranke an den optimalen Zielfunktionswert von (IP).

Wir wollen nun anstelle des schwierigen Problems (IP) das einfachere Lagrange-Duale (D_L) lösen, d. h., wir suchen die optimalen Lagrange-Multiplikatoren (λ^*, η^*) bzw. Approximationen dieser (diese liefern uns ja auch eine untere Schranke an die Optimallösung). Mit Hilfe dieser Lösung bzw. der zugehörigen primalen Lösung x^* von (IPR) wollen wir später eine zulässige Lösung von (IP) erzeugen. Zunächst beschäftigen wir uns noch mit einer anderen wichtigen Eigenschaft der Lagrange-Relaxation.

3.2.4 Dekomposition

Wir beginnen diesmal mit einer konvexen Optimierungsaufgabe

$$(P') \qquad \begin{array}{rcl} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i(x^i) & \\ \text{s.t.} & & \\ x^i & \in & X_i,\ i = 1, \ldots, k \\ Ax & \leq & b \\ Cx & = & d, \end{array}$$

wobei die $f_i \colon \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k$, konvexe Funktionen und die $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, \ldots, k$ konvexe kompakte Mengen sind. Es ist dabei wichtig, dass nur die *koppelnden Nebenbedingungen* $Ax \leq b$ und $Cx = d$ alle x^i betreffen, die Nebenbedingungen $x^i \in X_i$ aber nur die einzelnen x^i. Offenbar ist (P') eine Optimierungsaufgabe der Form (P) mit $f(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x^i)$, und wir können daher obige Theorie anwenden. Die Lagrange-Funktion ist dann

$$\begin{aligned} L'(x, \lambda, \eta) &= \sum_{i=1}^{k} f_i(x^i) - \lambda^T (b - Ax) - \eta^T (d - Cx) \\ &= -b^T \lambda - d^T \eta + \sum_{i=1}^{k} \left(f_i(x^i) + \lambda^T A^i x^i + \eta^T C^i x^i \right), \end{aligned}$$

und das Lagrange-Duale zu (P') hat die Form

$$\begin{aligned} & \sup_{\lambda \geq 0, \eta} \min_{x^i \in X_i, i=1,\ldots,k} L'(x, \lambda, \eta) \\ = & \sup_{\lambda \geq 0, \eta} -b^T \lambda - d^T \eta + \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\min_{x^i \in X_i} \left(f_i(x^i) + \lambda^T A^i x^i + \eta^T C^i x^i \right)}_{(\circ)}. \end{aligned}$$

Da die koppelnden Nebenbedingungen alle in $(\circ)$ sind, müssen für eine Auswertung der dualen Funktion

$$\begin{aligned} q(\lambda,\eta) &= \min_{x^i\in X_i, i=1,\ldots,k} L'(x,\lambda,\eta) \\ &= -b^T\lambda - d^T\eta + \sum_{i=1}^{k} \min_{x^i\in X_i} \left(f_i(x^i) + \lambda^T A^i x^i + \eta^T C^i x^i\right) \end{aligned}$$

nur die *unabhängigen* Probleme

$$\min_{x^i\in X_i} \left(f_i(x^i) + \lambda^T A^i x^i + \eta^T C^i x^i\right), i = 1,\ldots,k,$$

gelöst werden. Das bedeutet, das Gesamtproblem ist in mehrere unabhängig zu lösende Teilprobleme zerfallen, was man auch als *Lagrange-Dekomposition* bezeichnet. Wir werden diese Eigenschaft bei der Lösung unseres Problems ausnutzen.

3.2.5 Bündelverfahren

Das Bündelverfahren ist ein sog. *First-Order-Verfahren* zur Lösung konvexer Optimierungsprobleme

$$\min\{f(y)\colon l_i \le y_i \le u_i,\ i = 1,\ldots,m\},$$

wobei $l_i, u_i \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, $i = 1,\ldots,m$. First-Order-Verfahren heißt, dass die Funktion $f(y)$ mittels eines Orakels erster Ordnung gegeben ist, d. h., zu jedem Punkt $y \in \mathbb{R}^m$ liefert das Orakel den Zielfunktionswert $f(y)$ und einen Subgradienten $g \in \partial f(y)$, wobei

$$\partial f(y) := \{p \in \mathbb{R}^n\colon \forall\, z \in \mathbb{R}^n, f(z) \ge f(y) + < p, z - y >\}.$$

Falls die Funktion $f(y)$ für alle zulässigen y einen endlichen Wert annimmt, erzeugt das Verfahren eine Folge von Punkten $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $f(y_k) \to \inf f$ konvergiert (siehe [20] Satz 3.6). Außerdem generiert das Verfahren eine Folge sog. *aggregierter Subgradienten* $\{\hat{g}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, das sind Konvexkombinationen der $g_k, k \in \mathbb{N}$. Falls $\inf f > -\infty$, gilt für eine geeignete Teilfolge der aggregierten Subgradienten

$$\lim_{l\to\infty} \|\hat{g}_{k_l}\| = 0.$$

Wie bereits erwähnt, wollen wir das Negative zum Problem (D_L) mittels Bündelverfahren lösen. Dazu betrachten wir die Funktion

$$q(\lambda,\eta) := \max_{x\in X} -L(x,\lambda,\eta).$$

Man sieht leicht ein, dass q eine konvexe Funktion ist (als Maximum affiner Funktionen), die aufgrund der Kompaktheit von X in unserem Fall für alle (λ,η) einen endlichen Wert annimmt (sofern $X \neq \emptyset$). Das Lagrange-Duale (D_L) lässt sich dann schreiben als

$$\max_{\lambda\ge 0,\eta} -q(\lambda,\eta) = \min_{\lambda\ge 0,\eta} q(\lambda,\eta),$$

(wir verwenden hier ein Minimierungsproblem, weil der von uns verwendete Löser nur Probleme dieser Art verarbeiten kann, vgl. [18]). Neben der Folge von Lagrange-Multiplikatoren $\{\lambda_k, \eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und den aggregierten Subgradienten $\{\hat{g}_k\}$ liefert das Verfahren auch eine Folge von *primalen Aggregierten* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, wobei jedes x_k eine Konvexkombination der Lösungen der primalen Unterprobleme

$$\max_{x\in X} -L(x, \lambda_k, \eta_k)$$

ist (siehe [12], Satz 5.2). Der aggregierte Subgradient $\hat{g}_k$ wird dann gerade von der primalen Aggregierten x_k erzeugt, d. h. $\hat{g}_k = -\bigtriangledown_{\lambda,\eta} L(x_k, ., .)\big|_{(\lambda_k,\eta_k)}$. Diese x_k verletzen im Allgemeinen die koppelnden Nebenbedingungen, sind aber für große k eine gute Approximation für die Optimallösung von (IPR). Daher können sie als Basis für die Konstruktion von Lösungen für (IP) genutzt werden.

3.2.6 Anwendung auf SPOPT

Wir beschreiben hier die Umformungen, die bei der Lagrange-Relaxation notwendig sind. Die folgenden Formeln zeigen zusammengefasst unser Modell. Bei uns entspricht x_b den Binärvariablen der Indexmenge $\tilde{\mathcal{X}}^b = \mathcal{X}^b \cup \mathcal{X}^U$, x_G gehört zu den Flüssen (Indexmenge $\mathcal{X}^G$) und x_E steht für die Extravariablen (Indexmenge $\mathcal{X}^E$). Die Matrizen A und C repräsentieren alle unsere Nebenbedingungen, bis auf die Flusserhaltungsgleichungen und die Box-Nebenbedingungen an die Graphenvariablen, mit den rechten Seiten b bzw. d. Diese bilden wir in den Mengen X_G^i, $i = 1, \ldots, k$, ab (k ist die Anzahl der Graphen), d. h. $x_G = (x_G^1, \ldots, x_G^k)$.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\text{s.t.}} \; c_b^T x_b + c_G^T x_G + f(x_E) \\
&\qquad\begin{aligned}
Ax &\leq b,\; x = (x_b, x_G, x_E)^T \\
Cx &= d, \\
x_b &\in X_b \\
x_G^i &\in X_G^i, i = 1, \ldots, k \\
x_E &\in X_E
\end{aligned} \\
\Leftrightarrow \quad &\min_{\substack{x_b\in X_b \\ x_G^i\in X_G^i, i=1,\ldots,k \\ x_E\in X_E}} \; c_b^T x_b + c_G^T x_G + f(x_E) + \sup_{\substack{\lambda\geq 0 \\ \eta \text{ frei}}} (-\lambda^T(b - Ax) - \eta^T(d - Cx)) \\
\Leftrightarrow \quad &\sup_{\substack{\lambda\geq 0 \\ \eta \text{ frei}}} \Bigg[- b^T\lambda - d^T\eta + \underbrace{\min_{x_b\in X_b} \left((c_b + A_b^T\lambda + C_b^T\eta)^T x_b\right)}_{(*)} \\
&\qquad + \underbrace{\min_{x_E\in X_E} \left(f(x_E) + (A_E^T\lambda + C_E^T\eta)^T x_E\right)}_{(**)} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\min_{x_G^i\in X_G^i} \left((c_G^i + (A_G^i)^T\lambda + (C_G^i)^T\eta)^T x_G^i\right)}_{(***)} \Bigg]
\end{aligned}
$$

(D_L^{spopt})

Betrachtet man sich das Unterproblem $(*)$, so ist dieses aufgrund der einfachen Struktur von X_b (nur Box-Nebenbedingungen) einfach zu lösen. Das Unterproblem $(**)$ hat die Form

$$\sum_{j=1}^{|\mathfrak{X}^E|} \min_{l_{e_j} \leq x_{E,j} \leq u_{e_j}} \left(f_j(x_{E,j}) + (A_E^T \lambda + C_E^t \eta)_j \cdot x_{E,j} \right),$$

ist also Summe von unabhängigen, eindimensionalen, stückweise linearen, konvexen Optimierungsproblemen. Jedes einzelne, und damit auch ganz $(**)$, ist einfach zu lösen. Die Unterprobleme $(***)$ sind für feste Werte von λ, η Min-Cost-Flow-Probleme unter Kapazitätsbeschränkungen. Auch diese können sehr effizient gelöst werden (z. B. mittels der Programmbibliothek [24], welche wir verwendet haben).

Bemerkung 3.4 Durch die Einführung der Unzulässigkeits-Variablen und -Kanten existiert stets eine zulässige Lösung des primalen Problems. Bei dieser setzen wir

$$\begin{aligned} \forall\, (o,t,v) \in \mathfrak{X}^b \colon x_{o,t,v} &= 0 \\ \forall\, (0,(0,0,0),v) \in \mathfrak{X}^U \colon x_{0,(0,0,0),v} &= 1 \\ \forall\, (s,w,d,a) \in \mathfrak{X}^G \colon \hat{x}_{s,w,d,a} &= \begin{cases} 1 & a \in A_{qs} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ x_E &\equiv 0, \end{aligned}$$

wobei man beachten muss, dass der zulässige Bereich X_E der Variablen von x_E auch die Null umfasst. Wegen der schwachen Dualität folgt daraus auch, dass der Zielfunktionswert von (D_L^{spopt}) beschränkt ist.

Damit haben wir jetzt zwei Möglichkeiten beschrieben, wie wir zu Lösungen bzw. approximierten Lösungen von **RSPOPT**, Relaxationen von **SPOPT**, bei denen die Ganzzahligkeitsbedingung für $x_b, b \in \tilde{\mathfrak{X}}^b$, nicht berücksichtigt wird, gelangen können. Die nächsten beiden Abschnitten zeigen nun auf, wie man daraus ganzzahlige Werte für die Binärvariablen und damit Lösungen von **SPOPT** ableiten kann.

3.2.7 Einfache Rundungsheuristik

In diesem Abschnitt stellen wir einige Heuristiken vor, die uns helfen, aus einer (approximierten) Lösung von **RSPOPT** Lösungen von **SPOPT** abzuleiten. Anschließend wird versucht, diese zu verbessern.

Algorithmus 2 beschreibt, wie ein gewisser Prozentsatz $a \in (0,1]$ der Variablen $x_{o,t,v}$, $(o,t,v) \in \mathfrak{X}^b$, gerundet wird. Wir gehen dazu iterativ vor und betrachten in jedem Iterationsschritt in mehreren Abschnitten alle noch nicht fixierten Veranstaltungen in der bisher besten (gebrochenen) Lösung.

1. Zunächst untersuchen wir, ob es für eine Veranstaltung $v \in V$ eine Variable gibt, die einen gewissen Wert $\overline{\alpha}_v$ übersteigt und deshalb auf eins gerundet wird. Alle weiteren

Variablen dieser Veranstaltung können im gleichen Schritt auf null fixiert werden. Ist beispielsweise für eine Veranstaltung $v \in V$

$$x_{1,(1,1,1),v} = 0.9, x_{1,(1,1,2),v} = 0.09, x_{1,(1,1,3),v} = 0.01,$$

so gilt danach

$$x_{1,(1,1,1),v} = 1, x_{1,(1,1,2),v} = 0, x_{1,(1,1,3),v} = 0.$$

Allerdings muss $\overline{\alpha}_v$ so gewählt werden, dass $\overline{\alpha}_v \geq 0.5 + \varepsilon, \varepsilon > 0$, weil es sonst passieren könnte, dass für v mehr als eine Variable auf eins gesetzt wird und dadurch Nebenbedingung (2) verletzt wird. Gilt jedoch $\overline{\alpha}_v \geq 0.5 + \varepsilon, \varepsilon > 0$, so sind alle anderen Variablen zu einer Veranstaltung echt kleiner als dieser Wert.

2. Im zweiten Schritt betrachten wir, ob die Summen der Variablenwerte einer Veranstaltung $v \in V$
   a) an einem bestimmten Tag,
   b) an einem bestimmten Ort oder
   c) zu einer bestimmten Tageszeit (früh, mittags, abends)

   höher als bestimmte Werte sind. Ist dies der Fall, so deutet das darauf hin, dass die Veranstaltung bevorzugt an diesem Tag, Ort bzw. zu dieser Tageszeit stattfinden soll und wir setzen die Variablen an den anderen Tagen, Orten bzw. Tageszeiten auf null. Genauer heißt das:
   a) Für jeden Tag $d \in D$ berechnen wir $s_{D,d} := \sum_{o \in O, w \in W, e \in E} x_{o,t,v}$ und schauen, ob ein bestimmter Tag $\hat{d}$ in der Lösung stark bevorzugt wird und damit $s_{D,\hat{d}} \geq \overline{\alpha}_d$ ist. Ist das der Fall, so schließen wir alle anderen Tage $\tilde{d} \in D \setminus \{\hat{d}\}$ in den zukünftigen Lösungen durch $x_{o,(w,\tilde{d},e),v} \leftarrow 0, \forall\, o \in O, \forall\, w \in W, \forall\, \tilde{d} \in D \setminus \{\hat{d}\}$, $\forall\, e \in E$ aus.
   b) Ähnlich verfahren wir bei den Orten $o \in O$ und den Variablensummen $s_{O,o} := \sum_{t \in T} x_{o,t,v}$.
   c) Bei den Einheiten zur Veranstaltung $v \in V$ gehen wir etwas anders vor und fassen die Variablen, die zur gleichen Tageszeit gehören, zusammen. Entsprechend erhalten wir $s_{E,e} := \sum_{o \in O, w \in W, d \in D} x_{o,(w,d,e),v}$ und für früh $s^f_{E,e} = s_{E,1} + s_{E,2}$, für mittags $s^m_{E,e} = s_{E,3} + s_{E,4} + s_{E,5}$ und für abends $s^a_{E,e} = s_{E,6} + s_{E,7}$ (dabei beziehen sich die Einheiten 1-7 auf die Situation an der TU Chemnitz; dies lässt sich leicht an andere Universitäten anpassen). Dazu wieder ein Beispiel: Seien

   $$x_{1,(1,1,1),v} = 0.1, x_{1,(1,1,2),v} = 0.4, x_{1,(1,1,3),v} = 0.3, x_{1,(1,2,1)} = 0.2,$$

   und gilt $\overline{\alpha}_e = 0.7$, so fixieren wir $x_{1,(1,1,3),v}$ auf null. Betrachtet man zusätzlich den Tag, so können wir bei $\overline{\alpha}_d = 0.7$ auch $x_{1,(1,2,1),v}$ auf null setzen, da $s_{D,1} = 0.8$.

Bemerkung 3.5 Ähnliche Überlegungen wie zu $\overline{\alpha}_v$ führen zu $\overline{\alpha}_d \geq 0.5 + \varepsilon, \overline{\alpha}_o \geq 0.5 + \varepsilon, \overline{\alpha}_e \geq 0.5 + \varepsilon, \varepsilon > 0$. In numerischen Experimenten sollten die Schranken aber vor allem dann höher angesetzt werden, wenn wir mit einer approximierten Lösung von **RSPOPT** arbeiten, d. h., dass die Nebenbedingungen leicht verletzt werden dürfen.

3. Bisher sind wir stets davon ausgegangen, dass die Variablensummen gewisse Schranken $\overline{\alpha}_*$ überschreiten. Allerdings ist dies nicht immer der Fall, aber man kann trotzdem in der Lösung erkennen, dass einige Tage, Orte bzw. Tageszeiten kaum für Veranstaltung $v \in V$ genutzt werden und damit die zugehörigen Variablen auf null fixiert werden können. Die unteren Schranken bezeichen wir im Folgenden mit $\underline{\alpha}_d, \underline{\alpha}_o, \underline{\alpha}_e$.
   a) Betrachten wir dazu erneut die Tage $d \in D$ und die Summen $s_{D,d}, d \in D$. Ist beispielsweise $s_{D,1} \leq \underline{\alpha}_d$, so werden alle Variablen von Tag 1 (an der TU Chemnitz vom Montag) auf null gesetzt. Die Behandlung der Orte folgt analog.
   b) Bei den $s_{E,e}$ muss man außerdem beachten, dass man stets die Variablen zu allen Einheiten, die zu einer Tageszeit, etwa 1 *und* 2 (früh), gehören, gemeinsam fixiert.

   Bemerkung 3.6 Auch $\underline{\alpha}_d, \underline{\alpha}_o, \underline{\alpha}_e$ müssen bestimmten Kriterien genügen. Sie sollten so gewählt werden, dass ihr Wert kleiner ist, als wenn man durch die jeweilige Alternativenanzahl teilt, z. B. $\underline{\alpha}_d < \frac{1}{|D|}$, an der TU Chemnitz $\underline{\alpha}_d < \frac{1}{5}$. Sonst besteht die Gefahr, dass alle Variablen einer Veranstaltung auf null fixiert werden und wiederum Nebenbedingung (2) verletzt wird.

   Wir können jedoch trotzdem nicht ausschließen, dass es zu Unzulässigkeiten kommt. Aus diesem Grund haben wir in Abschnitt 2.4 die künstlichen Variablen $x_{0,(0,0,0),v}$, $(0, (0, 0, 0), v) \in \mathcal{X}^U$, eingeführt, deren obere Schranken im Zuge der Rundungsheuristik nicht verändert werden sollten.

4. Sollten in den letzten drei Schritten keine neuen Variablen fixiert worden sein, so suchen wir uns die Variable mit dem größten Wert und runden diese auf eins auf.

5. Nach jedem Durchlauf berechnen wir den neuen Zielfunktionswert von **RSPOPT**, wobei alle Fixierungen beachtet werden.

Bemerkung 3.7 Es hat sich in den numerischen Tests herausgestellt, dass man für die Schranken zunächst relativ zurückhaltende Werte wählen kann, da am Anfang sehr viele Variablen fixiert werden. Damit sind anfangs Schranken von $\overline{\alpha}_v \gg 0.5 + \varepsilon, \overline{\alpha}_d \gg 0.5 + \varepsilon, \overline{\alpha}_o \gg 0.5 + \varepsilon, \overline{\alpha}_e \gg 0.5 + \varepsilon, \underline{\alpha}_d \ll \frac{1}{|D|}, \underline{\alpha}_o \ll \frac{1}{|O|}, \underline{\alpha}_e \ll \frac{1}{|E|}$ denkbar. Danach kann man die Werte, um die Iterationszahl zu verkleinern, anpassen, indem man $\overline{\alpha}_v, \overline{\alpha}_d, \overline{\alpha}_o, \overline{\alpha}_e$ in jedem Schritt verringert und $\underline{\alpha}_d, \underline{\alpha}_o, \underline{\alpha}_e$ erhöht. Auf diese Weise ist es möglich, frühzeitige Pflichtfixierungen, bei denen nur *eine* weitere Variable festgesetzt wird, vgl. Zeile 34, zu umgehen. Diese sind aus dem Grund problematisch, weil jeweils der neue Zielfunktionswert bestimmt werden muss und wir kaum an Informationen dazugewinnen.

Algorithmus 2 Rundungsheuristik für Startlösung

Require: (approximierte) Lösung von **RSPOPT**
Require: Angaben zu $\overline{\alpha}_v, \overline{\alpha}_d, \overline{\alpha}_o, \overline{\alpha}_e, \underline{\alpha}_d, \underline{\alpha}_o, \underline{\alpha}_e$ {Werte ab denen gerundet werden soll}
while $|\{x_{o,t,v} \colon (o,t,v) \in \mathcal{X}^b, x_{o,t,v} \in \{0,1\}\}| \leq a \cdot |\mathcal{X}^b|$, $a \in (0,1]$ {Abbruchkrit.} **do**
  for $v \in V$, Veranstaltung v noch nicht fixiert **do**
    if $\exists\, x_{o,t,v} \geq \overline{\alpha}_v$ $(o \in O, t \in T)$ {Variablenwert groß} **then**
      $x_{o,t,v} \leftarrow 1$ **and** $x_{\hat{o},\hat{t},v} \leftarrow 0, \forall\, (\hat{o},\hat{t}) \in (O \times T) \setminus (o,t)$
    else
      Berechne $s_d, s_o, s_e, \forall\, d \in D, o \in O, e \in E$:
      $s_{D,d} = \sum_{o \in O, w \in W, e \in E} x_{o,(w,d,e),v}$ {Tag}, $s_{O,o} = \sum_{t \in T} x_{o,t,v}$ {Ort}
      $s_{E,e} = \sum_{o \in O, w \in W, d \in D} x_{o,(w,d,e),v}$ {Einheit}
      $s^f_{E,e} = s_{E,1} + s_{E,2}$ {früh}, $s^m_{E,e} = s_{E,3} + s_{E,4} + s_{E,5}$ {mittags}, $s^a_{E,e} = s_{E,6} + s_{E,7}$ {abends}
      if $s_{D,d} \geq \overline{\alpha}_d$ {Wird ein bestimmter Tag bevorzugt?} **then**
        $x_{o,(w,\tilde{d},e),v} \leftarrow 0, \forall\, o \in O, \forall\, w \in W, \tilde{d} \in D \setminus \{d\}, \forall\, e \in E$
      end if
      if $s_{O,o} \geq \overline{\alpha}_o$ {Wird ein bestimmter Ort bevorzugt?} **then**
        $x_{\tilde{o},t,v} \leftarrow 0, \forall\, \tilde{o} \in O \setminus \{o\}, \forall\, t \in T$
      end if
      if $s^f_{E,e} \geq \overline{\alpha}_e$ {Wird eine bestimmte Tageszeit (früh (1,2), mittag (3,4,5), abends (6,7)) bevorzugt?} **then**
        $x_{o,(w,d,\tilde{e}),v} \leftarrow 0, \forall\, o \in O, \forall\, w \in W, \forall\, d \in D, \tilde{e} \in E \setminus \{1,2\}$
      end if
      analog für $s^m_{E,e} \geq \overline{\alpha}_e$ und $s^a_{E,e} \geq \overline{\alpha}_e$
      if $s_{D,d} \leq \underline{\alpha}_d$ {Werden einige Tage beinahe nicht genutzt?} **then**
        $x_{o,(w,d,e),v} \leftarrow 0, \forall\, o \in O, \forall\, w \in W, \forall\, e \in E, (d \in D)$
      end if
      if $s_{O,o} \leq \underline{\alpha}_o$ {Werden einige Orte beinahe nicht genutzt?} **then**
        $x_{o,t,v} = 0\ \forall\, t \in T, (o \in O)$
      end if
      if $s^f_{E,e} \leq \underline{\alpha}_e$ {Werden einige Tageszeiten beinahe nicht genutzt?} **then**
        $x_{o,(w,d,\tilde{e}),v} \leftarrow 0, \forall\, o \in O, \forall\, w \in W, \forall\, d \in D, \tilde{e} \in E \setminus \{3, \ldots, 7\}$
      end if
      analog für $s^m_{E,e} \leq \underline{\alpha}_e$ und $s^a_{E,e} \leq \underline{\alpha}_e$
    end if
  end for
  Anpassung von $\overline{\alpha}_v, \overline{\alpha}_d, \overline{\alpha}_o, \overline{\alpha}_e, \underline{\alpha}_d, \underline{\alpha}_o, \underline{\alpha}_e$
  if Keine zusätzlichen Fixierungen **then**
    Pflichtfixierung von $\tilde{x}_{\tilde{o},\tilde{t},\tilde{v}} = \max\{x_{o,t,v} \colon x_{o,t,v} \in (0,1)\}$
    $\tilde{x}_{\tilde{o},\tilde{t},\tilde{v}} \leftarrow 1$ **and** $x_{o,t,\tilde{v}} \leftarrow 0, \forall\, (o,t) \in O \times T \setminus (\tilde{o},\tilde{t})$
  end if
  Berechne neuen Funktionswert mit Fixierungen
end while
return Lösung von **SPOPT**

Wir haben uns in den numerischen Tests für das Vorgehen, die Schranken in jedem Schritt anzupassen, entschieden. Außerdem runden wir damit nur 90 Prozent der Variablen $x_B, B \in \tilde{\mathcal{X}}^b$, und nutzen dann das im nächsten Abschnitt beschriebene Verfahren.

3.2.8 Matrixrunden

Eine weitere Möglichkeit zu ganzzahligen Lösungen zu gelangen, besteht in der Technik des *Matrixrundens* [3]. Die Idee dahinter ist allgemein, dass man eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{n,m}$ mit nichtganzzahligen Einträgen x_{ij} aber ganzzahligen Zeilen- und Spaltensummen erhält und diese so rundet, dass die ganzzahligen Zeilen- und die Spaltensummen erhalten bleiben. Unter all diesen Rundungen sucht man dabei die mit der geringsten Summe aller Abweichungen.

$$\begin{aligned}
\min_{\text{s.t.}} & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |y_{ij} - x_{ij}| \\
& \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \forall\, j = 1, \ldots, m \\
& \sum_{j=1}^{m} y_{ij} = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}, \forall\, i = 1, \ldots, n \\
& y_{ij} \in \{\lfloor x_{ij} \rfloor, \lceil x_{ij} \rceil\}, \forall\, i, j
\end{aligned}$$

Da jede Variable y_{ij} nur zwei Werte annehmen kann, können wir jeden Summanden der Zielfunktion $|y_{ij} - x_{ij}|$ durch eine affin-lineare Funktion $d_{ij} + c_{ij} \cdot y_{ij}$ interpolieren. Die Werte von c_{ij}, d_{ij} ergeben sich als Lösung des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
d_{ij} + c_{ij} \cdot \lfloor x_{ij} \rfloor &= x_{ij} - \lfloor x_{ij} \rfloor \\
d_{ij} + c_{ij} \cdot \lceil x_{ij} \rceil &= \lceil x_{ij} \rceil - x_{ij}
\end{aligned}$$

mit $c_{ij} = 1 - 2 \cdot (x_{ij} - \lfloor x_{ij} \rfloor)$ und $d_{ij} = x_{ij} - \lfloor x_{ij} \rfloor - c_{ij} \cdot \lfloor x_{ij} \rfloor$. Dies führt auf das äquivalente Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}
\min_{\text{s.t.}} & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot y_{ij} \\
& \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \forall\, j = 1, \ldots, m \\
& \sum_{j=1}^{m} y_{ij} = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}, \forall\, i = 1, \ldots, n \\
& y_{ij} \in \{\lfloor x_{ij} \rfloor, \lceil x_{ij} \rceil\}, \forall\, i, j.
\end{aligned}$$

Das Problem des Matrixrundens lässt sich mittels eines Min-Cost-Flow-Problems modellieren und lösen, was erneut effizient möglich ist.

Wir wollen diese Methode leicht verändert auf unseren Binärvariablen $x_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathcal{X}^b$, anwenden. Dabei repräsentieren die Spalten die Nebenbedingungen, dass eine Veranstaltung genau einmal stattfindet. Für die Zeilen nutzen wir, dass bestimmte Mengen von Lehrveranstaltungen nicht gleichzeitig möglich sind. Dafür gibt es mehrere Gründe, wie zum Beispiel, dass mehrere Veranstaltungen den gleichen Dozenten haben oder den gleichen Raum anfordern. Leider können wir nicht alle dieser Bedingungen aufnehmen, da jede Variable nur einmal in der Matrix vorkommen darf. Aus diesem Grund beschränken wir uns auf zwei Gruppen. Auf der einen Seite fassen wir obligatorische Veranstaltungen zusammen, wobei wir jeweils die Nebenbedingung der Studiengruppe aufnehmen, die am meisten derartige hat. Für die anderen beachten wir, dass ein Dozent zu einer Planungseinheit maximal eine Veranstaltung halten kann. Diese Informationen werden über einen Graphen $G_M = (V_M, A_M)$ dargestellt. Die Knotenmenge V_M setzt sich dabei zusammen aus:

- V_{LV} : Für jede Veranstaltung gibt es einen Knoten.
- V_N : Für jede Planungseinheit steht $v_n \in V_N$ für eine zu erfüllende Nebenbedingung n.
- v_q als Quelle von der aus ein Fluss vom Wert $|V|$ zur Senke v_s geschickt wird.

Zwischen diesen Knoten fügen wir die folgenden gerichteten Kanten ein, wobei alle eine Kapazität von eins haben.

- $(v_q, v_l), \forall\, v \in V_{LV}$
- (v_l, v_n), falls Veranstaltung l und die zugehörige Variable $x_{o,t,l}, (o,t,l) \in \mathcal{X}^b$, zu Nebenbedingung n gehört
- $(v_n, v_s), \forall\, v_n \in V_N$

Abbildung 9 zeigt beispielhaft an vier Veranstaltungen $v_1, \ldots, v_4$, zwei Planungseinheiten und einem Ort den entsprechenden Graphen. Die Variablen sind dabei $x_{1,t,v_i}, t \in \{1,2\}, i \in \{1,2,3,4\}$, und als Nebenbedingungen in den Zeilen dienen $x_{1,t,v_1} + x_{1,t,v_2} \leq 1, x_{1,t,v_3} + x_{1,t,v_4} \leq 1, t \in \{1,2\}$.

Bemerkung 3.8 Bisher haben wir jede Binärvariable $x_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathcal{X}^b$, einzeln betrachtet. Man hat allerdings auch die Möglichkeit, für eine Veranstaltung die Variablen zu einer festen Planungseinheit zusammenzufassen, indem man die Summe über alle Orte $x_{t,v} = \sum_{o \in O} x_{o,t,v}$ nimmt. Das hat mehrere Vorteile:

- Die Anzahl der Variablen für das Matrixrunden nimmt dadurch ab.
- Die betrachteten Nebenbedingungen sind alle ortsunabhängig, d. h., falls eine Variable zu einer Veranstaltung in einer Nebenbedingung vorkommt, so auch die Variablen zu den anderen Orten.

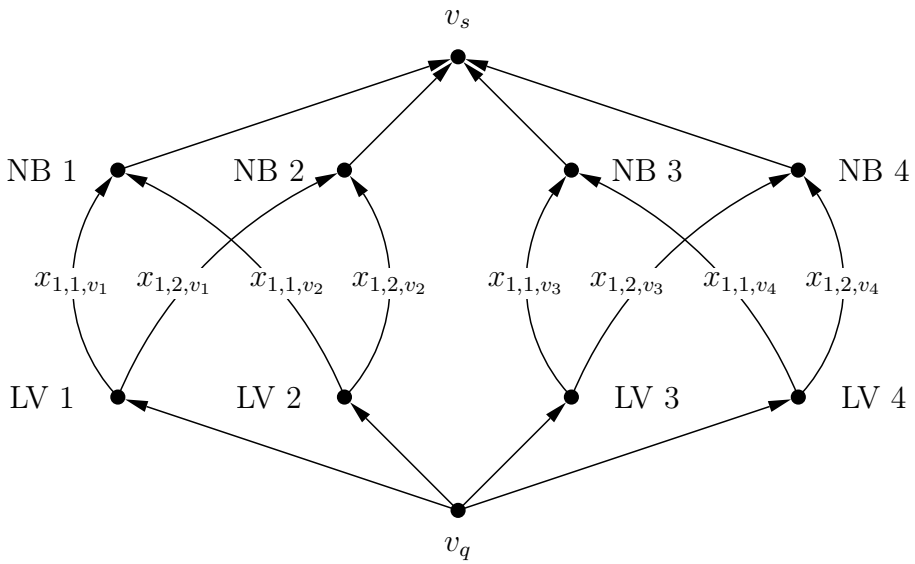


Abbildung 9: Matrixrunden am Beispiel von vier Veranstaltungen und zwei Planungseinheiten

- Außerdem kann man, wenn man die Planungseinheiten für die Veranstaltungen festgelegt hat, schnell berechnen, welches der jeweils günstigste Standort ist. Damit geht man zusätzlich dem Problem aus dem Weg, dass durch ein schlechtes Runden unnötige Wechsel notwendig sind bzw. hintereinanderliegende obligatorische Veranstaltungen an unterschiedlichen Standorten eingeplant werden, obwohl im ursprünglichen Sinne, ohne Unzulässigkeits-Kanten, kein Wechsel möglich ist.

- Wenn einige Veranstaltungen keinen besonders bevorzugten Ort haben, so kann es passieren, dass sie in der gebrochenen Lösung auf mehrere Orte aufgeteilt sind (bei der TU Chemnitz könnte eine Veranstaltung beispielsweise je zur Hälfte in der Reichenhainer Straße und in der Straße der Nationen stattfinden). Da im Matrixrunden keine Nebenbedingungen enthalten sind, die die Ortsproblematik berücksichtigen, ist dann nicht klar, welcher der Standorte für die Veranstaltung gewählt wird. Betrifft dies mehrere Veranstaltungen, so kann die gerundete Lösung auch sehr leicht die Raumnebenbedingungen verletzen, da möglicherweise sehr viele der Veranstaltungen in denselben Ort „gerundet“ werden.

Leider kann man auch bei dieser Heuristik nicht garantieren, dass sie am Ende zu einer zulässigen Lösung (alle Unzulässigkeits-Variablen und -kanten gleich null) führt. Aus diesem Grund muss man nach dem Matrixrunden die Schranke der $x_{0,(0,0,0),v}, (0,(0,0,0),v) \in \mathcal{X}^U$, wieder freigeben und kann beispielsweise mit einem **MIP**-Löser eine Lösung von **SPOPT** unter Verwendung von Unzulässigkeitsvariablen und -kanten finden. Durch ein iteratives Vorgehen, bei dem jeweils nur einen Teil der Variablen fixiert wird und danach der neue Zielfunktionswert bestimmt wird, kann man eventuell die Anzahl der Unzulässigkeiten verringern im Gegensatz zum sofortigen Runden aller Variablen.

Bemerkung 3.9 Es hat sich in den numerischen Test gezeigt, dass vor allem Veranstaltungen, die in bestimmten Nebenbedingungen gebunden sind, nach dem Matrixrunden unzulässig sind. Dazu gehören zum einen Veranstaltungen, die in Mengen aus V_{Par} vorkommen, und zum anderen Veranstaltungsgruppen aus Menge F. Man kann versuchen, diese Veranstaltungen bereits vor dem Matrixrunden festzusetzen bzw. bei einem schrittweisen Vorgehen stets die gesamte Gruppe zu behandeln.

3.2.9 Verbesserungsheuristiken

Mit den vorigen beiden Algorithmen kann man zu einer Lösung von **SPOPT** gelangen. Allerdings wird in der Regel diese Lösung noch nicht sehr gut sein und es gibt meist offensichtliche Verbesserungsmöglichkeiten. Wir wollen in diesem Abschnitt einige Heuristiken vorstellen, die versuchen, die bisherigen Lösungen zu verbessern. Dabei gehen wir stets ähnlich vor:

1. Zunächst fixieren wir alle Variablen auf den Werten der aktuell besten Lösung.
2. Dann heben wir die Schranken einiger Variablen wieder auf und
3. berechnen die Lösung dieses stark reduzierten **MIP**.

(Zurzeit benutzen wir dafür den **MIP**-Löser von **Cplex**, um uns die lokale Suche zu vereinfachen. Dies ist in der Regel in wenigen Sekunden möglich. Vermutlich ist es aber bei den meisten Heuristiken sogar schneller, alle sinnvollen Möglichkeiten zu testen und für jede Belegung der Variablen die Flüsse neu zu berechnen.)

Bisher haben wir uns nur um die Berechnung einer Lösung von **SPOPT** gekümmert, wobei wir nicht garantieren können, dass die Unzulässigkeitsvariablen alle einen Wert von null haben. Unsere erste Heuristik beruht nun darauf, vgl. *Algorithmus 3*, zu testen, ob für einige dieser Veranstaltungen noch eine zulässige Planungseinheit und ein zulässiger Ort gefunden werden kann.

Algorithmus 3 Verbesserungsheuristik - Unzulässigkeiten

Require: Lösung von **SPOPT**

Fixiere die Binärvariablen (Indexmenge $\tilde{\mathfrak{X}}^b$) der bisher besten Lösung
for $v \in V$ **do**
  if $x_{0,(0,0,0),v} > 0, (0,(0,0,0),v) \in \mathfrak{X}^U$, (LV unzulässig) **then**
    Lösche die Schranken von $x_{o,t,v}, \forall\, o \in O, \forall\, t \in T$ und $x_{0,(0,0,0),v}$
    Berechne die Optimallösung dieses Problems $\Rightarrow x^* \in \{0,1\}^{|\tilde{\mathfrak{X}}^b|}$
    Fixiere $x^*_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathfrak{X}^b$ und $x^*_{0,(0,0,0),v}, (0,(0,0,0),v) \in \mathfrak{X}^U$
  end if
end for
return (verbesserte) Lösung von **SPOPT**

In Kapitel 2.4 wird noch eine weitere Quelle von Unzulässigkeiten beschrieben, der mit der Einführung von Unzulässigkeits-Kanten entgegengewirkt wird. Zur besseren Ausrichtung der unterschiedlichen Orte an einem Tag und der damit verbundenen Wechsel

dient *Algorithmus 4*. Dazu heben wir für alle Orte $o \in O$ die Fixierungen der Variablen $x_{o,\hat{t},v}, (o, \hat{t}, v) \in \mathcal{X}^b$, auf, wenn es $\hat{o}, \hat{t}$, gibt, so dass $x_{\hat{o},\hat{t},v} = 1$ in der bisherigen Lösung. Damit sind für die gewählte Planungseinheit alle Orte wieder zulässig. Erweitert wird das **MIP** durch alle Variablen zu den bisher unzulässigen Veranstaltungen $v \in V$, bei denen $x_{0,(0,0,0),v}, (0, (0, 0, 0), v) \in \mathcal{X}^U$, gleich eins ist, denn durch eine Anpassung der Orte, sind nun vielleicht weitere Veranstaltungen erreichbar.

Algorithmus 4 Verbesserungsheuristik - Orte

Require: Lösung von **SPOPT**

1: Fixiere die Binärvariablen (Indexmenge $\tilde{\mathcal{X}}^b$) der bisher besten Lösung
2: **for** $x_{\hat{o},t,v}, (\hat{o}, t, v) \in \mathcal{X}^b$ **do**
3: **if** $x_{\hat{o},t,v} = 1$ $\{v$ findet in Planungseinheit $t \in T$ statt$\}$ **then**
4: Lösche die Schranken von $x_{o,t,v}, \forall\, o \in O$ und lösche die Schranke von $x_{0,(0,0,0),v}$
5: **end if**
6: **end for**
7: **for** $x_{0,(0,0,0),v}, (0, (0, 0, 0), v) \in \mathcal{X}^U$ **do**
8: **if** $x_{0,(0,0,0),v} = 1$ $\{v$ unzulässig$\}$ **then**
9: Lösche die Schranken von $x_{o,t,v}, \forall\, o \in O, \forall\, t \in T, (o, t, v) \in \mathcal{X}^b$
10: **end if**
11: **end for**
12: Berechne die Optimallösung dieses Problems $\Rightarrow x^* \in \{0, 1\}^{|\tilde{\mathcal{X}}^b|}$
13: Fixiere $x^*_{o,t,v}, (o, t, v) \in \mathcal{X}^b$ und $x^*_{0,(0,0,0),v}, (0, (0, 0, 0), v) \in \mathcal{X}^U$
14: **return** (verbesserte) Lösung von **SPOPT**

In eine Gruppe lassen sich die *Algorithmen 5 und 6* zusammenfassen, wobei sie darauf beruhen für eine spezielle Veranstaltung (Algorithmus 5) oder Veranstaltungsgruppe (Algorithmus 6) eine bessere Planungseinheit oder einen besseren Ort zu finden. Dabei werden vor allem solche Schwächen in der bisherigen Lösung beseitigt, bei denen eine Veranstaltung auf beispielsweise eine zu späte Einheit gelegt worden ist, obwohl nur eine Studiengruppe betroffen ist und diese sogar Wartezeiten in Kauf nehmen muss. In einer früheren Phase der Optimierung mag dieser Termin aber durchaus günstig gewesen sein. Ein weiteres Beispiel besteht darin, dass eine fakultative oder wahlobligatorische Veranstaltung nun parallel zu einer obligatorischen liegt. In diesem Fall kann nicht einmal der steile Anstieg der stückweise linearen Zielfunktion für die entsprechenden Graphenvariablen genutzt werden. Hier lohnt sich dann im Allgemeinen das Verlegen auf eine andere Planungseinheit.

Algorithmus 5 versucht dabei *eine* konkrete Veranstaltung $v \in V$ zu verbessern. Damit ist man aber nicht in der Lage, Veranstaltungen zu verschieben, deren Variablen in den Nebenbedingungen (5), (6) oder (7) gebunden sind, da die Variablen der (wochenversetzt) parallel liegenden bzw. der vor-/nachfolgenden Veranstaltungen nicht mit gelöst werden. Dazu dient nun *Algorithmus 6*, der jeweils mit allen (wochenversetzt) parallelen (V_{Par}, V_{WPar}) bzw. allen Veranstaltungen einer Veranstaltungsgruppe (F) arbeitet.

Wir können die Lösung weiter verbessern, wenn wir uns speziell die obligatorischen Veranstaltungen anschauen. Diese haben den Vorteil, dass sie sich nicht überschneiden

Algorithmus 5 Verbesserungsheuristik - einzelne LV

Require: Lösung von **SPOPT**

for $v \in V$ **do**
  Fixiere die Binärvariablen (Indexmenge $\tilde{\mathcal{X}}^b$) der bisher besten Lösung
  Lösche die Schranken von $x_{o,t,v}, \forall\, o \in O, t \in T$ und $x_{0,(0,0,0),v}$
  Berechne die Optimallösung dieses Problems $\Rightarrow x^* \in \{0,1\}^{|\tilde{\mathcal{X}}^b|}$ {Wenige Variablen}
  Fixiere $x^*_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathcal{X}^b$ und $x^*_{0,(0,0,0),v}, (0,(0,0,0),v) \in \mathcal{X}^U$
end for
return (verbesserte) Lösung von **SPOPT**

Algorithmus 6 Verbesserungsheuristiken - zusammengehörende LV

Require: Lösung von **SPOPT**

Fixiere die Binärvariablen (Indexmenge $\tilde{\mathcal{X}}^b$) der bisher besten Lösung
Parallele LV
for $\{v_1, \ldots, v_n\} \in V_{Par}$ **do**
  Lösche die Schranken von $x_{o,t,v_i}, \forall\ i \in \{1,\ldots,n\}, \forall\ o \in O, \forall\ t \in T$ und $x_{0,(0,0,0),v_i}, \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$
  Berechne die Optimallösung dieses Problems $\Rightarrow x^* \in \{0,1\}^{|\tilde{\mathcal{X}}^b|}$
  Fixiere $x^*_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathcal{X}^b$ und $x^*_{0,(0,0,0),v}, (0,(0,0,0),v) \in \mathcal{X}^U$
end for
Wochen-Parallele LV
for $\{(v_1,w_1),\ldots,(v_n,w_n)\} \in V_{WPar}$ **do**
  Lösche die Schranken von $x_{o,t,v_i}, \forall\ i \in \{1,\ldots,n\}, \forall\ o \in O, \forall\ t \in T$ und $x_{0,(0,0,0),v_i}, \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$
  Berechne die Optimallösung dieses Problems $\Rightarrow x^* \in \{0,1\}^{|\tilde{\mathcal{X}}^b|}$
  Fixiere $x^*_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathcal{X}^b$ und $x^*_{0,(0,0,0),v}, (0,(0,0,0),v) \in \mathcal{X}^U$
end for
Veranstaltungsgruppen - aufeinanderfolgende LV
for $(v_1,\ldots,v_n) \in F$ **do**
  Lösche die Schranken von $x_{o,t,v_i}, \forall\ i \in \{1,\ldots,n\}, \forall\ o \in O, \forall\ t \in T$ und $x_{0,(0,0,0),v_i}, \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$
  Berechne die Optimallösung dieses Problems $\Rightarrow x^* \in \{0,1\}^{|\tilde{\mathcal{X}}^b|}$
  Fixiere $x^*_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathcal{X}^b$ und $x^*_{0,(0,0,0),v}, (0,(0,0,0),v) \in \mathcal{X}^U$
end for
return (verbesserte) Lösung von **SPOPT**

dürfen, falls sie für die gleiche Studiengruppe verbindlich sind. *Algorithmus 7* nutzt dies und löscht jeweils für einen Tag die Schranken der Variablen aller Veranstaltungen $v \in V$ mit $v \in \bigcup_{s \in S} V_s^{obl}$. Das dient für zur besseren Anordnung der Veranstaltungen an diesem Tag und der Abstimmung auf die Kosten der Binärvariablen. Außerdem sind wir in der Lage, die Anzahl der Überschneidungen obligatorischer mit fakultativen und wahlobligatorischen Veranstaltungen zu verringern.

Bei *Algorithmus 8* untersuchen wir hingegen für eine Studiengruppe $s \in S$ die Lage aller obligatorischen Veranstaltungen $v \in V_s^{obl}$ an allen Tagen. Leider lässt sich dieses Prinzip nicht erweitern, beispielsweise, dass man für eine Studiengruppe alle Veranstaltungen betrachtet. Dies führt zu einer zu großen Variablenanzahl, bei der schon die Lösung des relaxierten Problems mit **Cplex** sehr lang dauert.

Algorithmus 7 Verbesserungsheuristik - obligatorische LV eines Tages

Require: Lösung von **SPOPT**

Fixiere die Binärvariablen (Indexmenge $\tilde{\mathcal{X}}^b$) der bisher besten Lösung
for $d \in D$ **do**
  for $v \in V$ **do**
    if $v \in \bigcup_{s \in S} V_s^{obl} \cup \{w \colon x_{0,(0,0,0),w} = 1, w \in V\}$ **then**
      Lösche die Schranken von $x_{o,(w,d,e),v}, \forall\, o \in O, \forall\, w \in W, \forall\, e \in E$ und $x_{0,(0,0,0),v}$
    end if
  end for
  Berechne die Optimallösung dieses Problems $\Rightarrow x^* \in \{0,1\}^{|\tilde{\mathcal{X}}^b|}$
  Fixiere $x^*_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathcal{X}^b$ und $x^*_{0,(0,0,0),v}, (0,(0,0,0),v) \in \mathcal{X}^U$
end for
return (verbesserte) Lösung von **SPOPT**

Algorithmus 8 Verbesserungsheuristik - obligatorische LV jeweils einer Studiengruppe

Require: Lösung von **SPOPT**

Fixiere die Binärvariablen (Indexmenge $\tilde{\mathcal{X}}^b$) der bisher besten Lösung
for $s \in S$ **do**
  for $v \in V_s^{obl}$ **do**
    Lösche die Schranken von $x_{o,t,v}, \forall\, o \in O, \forall\, t \in T$ und $x_{0,(0,0,0),v}$
  end for
  Berechne die Optimallösung dieses Problems $\Rightarrow x^* \in \{0,1\}^{|\tilde{\mathcal{X}}^b|}$
  Fixiere $x^*_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathcal{X}^b$ und $x^*_{0,(0,0,0),v}, (0,(0,0,0),v) \in \mathcal{X}^U$
end for
return (verbesserte) Lösung von **SPOPT**

3.3 Implementierung und numerische Ergebnisse

Es werden nun die Ergebnisse der numerischen Tests vorgestellt. Wir haben unser Modell angepasst auf die TU Chemnitz in C++ implementiert. Als Löser für die entstehenden Probleme wurden dabei **Cplex** [1] sowie das Bündelverfahren der **ConicBundle** Bibliothek [18] verwendet.

In einer ersten Variante wurde versucht, das ganzzahlige Problem (IP) (mit linearisierter Zielfunktion analog zu (IPR')) mittels des **MIP**-Lösers von **Cplex** zu lösen. Es zeigte sich aber, dass bereits das Lösen der linearen Relaxation (d. h. das Lösen von (IPR'))

sehr viel Zeit benötigte. Damit wies auch eine weitere Variante, die lineare Relaxation als Startlösung für die Rundungsheuristiken zu benutzen, nur bei kleineren Beispielen gute Laufzeiten auf. Als **LP**-Lösungsverfahren haben wir dabei zunächst den primalen sowie den dualen Simplex-Algorithmus [10] eingesetzt, die bei Betrachtung des Stundenplans für die gesamte TU Chemnitz auch nach mehreren Tagen nicht terminierten. Besser verhielt sich die Laufzeit bei der Nutzung des Innere-Punkte-Verfahrens [28] in **Cplex**, wobei dies den Nachteil hatte, dass sehr viel Speicher benötigt wurde und evtl. auf die Festplatte ausgelagert werden musste. Aber auch hier dauerten die Rechnungen teilweise länger als zehn Stunden.

In der dritten Variante wurde die **ConicBundle** Bibliothek zur Lösung des Problems (D_L^{spopt}) benutzt. Dabei wurden die Min-Cost-Flow Unterprobleme mittels der Bibliothek **MCF** [24] gelöst, die auf einem Netzwerk-Simplex-Algorithmus basiert. Die anderen Unterprobleme stellten keine Schwierigkeit dar und wurden direkt berechnet.

Es wurden Testläufe mit den Daten der TU Chemnitz für das Wintersemester 2007/08 und dem Sommersemester 2008 durchgeführt. Diese lagen in Form einer Datenbank vor, aus welcher die benötigten Informationen gewonnen werden konnten. Dabei war es auch möglich, nur einen Teil der Daten zu betrachten, etwa alle mathematischen Studiengruppen und die dazugehörigen Veranstaltungen. Insgesamt wurden für die beiden Semester die folgenden Teile untersucht:

A. alle Chemie-Studiengruppen,

B. alle mathematischen Studiengruppen,

C. alle Informatik-Studiengruppen,

D. alle Maschinenbau-, Elektrotechnik-Studiengruppen,

E. alle Mathematik-, Informatik-, Maschinenbau-Studiengruppen,

F. alle Mathematik-, Informatik-, Maschinenbau-, Physik-, Chemie-Studiengruppen,

G. alle Studiengruppen.

Bemerkung 3.10 Es hat sich gezeigt, dass gewisse Angaben in den vorliegenden Daten nicht erfüllbar waren und damit zu Unzulässigkeiten führten. Dazu gehörten beispielsweise, dass ein Dozent zu einer festgelegten Planungseinheit mehrere Veranstaltungen halten sollte oder dass es für einige Studiengruppen mehr obligatorische Veranstaltungen gab als überhaupt Planungseinheiten vorhanden waren. In diesen Fällen haben wir bei den Dozenten zusätzliche virtuelle Dozenten eingeführt, denen wir dann die entsprechenden Veranstaltungen zugewiesen haben. Bei den Studiengruppen haben wir die Priorität von obligatorisch auf wahlobligatorisch verändert. Neben diesen Manipulationen haben wir jedoch nichts verändert.

Tabelle 2 gibt einen Überblick über die Problemgrößen, die Anzahl der zu planenden Veranstaltungen $|V|$, der Studiengruppen $|S|$ und der Dozenten $|P|$. Die verschiedenen Variablenanzahlen der entsprechenden Modelle werden in Tabelle 3 dargestellt (siehe auch Bemerkung 3.11).

	WS 2007/08			SS 2008		
	$\|V\|$	$\|S\|$	$\|P\|$	$\|V\|$	$\|S\|$	$\|P\|$
A	102	7	28	99	6	26
B	224	34	128	158	30	88
C	252	48	167	229	48	148
D	733	75	297	802	74	325
E	896	138	401	902	133	412
F	1 239	178	479	1 264	169	494
G	2 070	291	751	2 073	263	766

Tabelle 2: Zahl der Veranstaltungen, Studiengruppen und Dozenten bei den Testläufen

	WS 2007/08				SS 2008			
	$\|\tilde{\mathcal{X}}^b\|$	$\|\mathcal{X}^G\|$	$\|\mathcal{X}^E\|$	gesamt	$\|\tilde{\mathcal{X}}^b\|$	$\|\mathcal{X}^G\|$	$\|\mathcal{X}^E\|$	gesamt
A	925	16 559	140	17 624	2 352	16 112	130	18 594
B	12 508	227 350	780	240 638	10 450	192 230	690	203 370
C	16 387	191 244	1 020	208 651	16 345	238 056	990	255 391
D	39 550	242 038	1 427	283 015	33 690	223 162	1 370	258 222
E	52 426	592 562	2 802	647 790	47 510	592 875	2 641	643 026
F	63 845	723 060	3 581	790 486	59 390	704 957	3 375	767 722
G	92 788	1 213 690	5 452	1 311 930	81 307	1 071 567	4 970	1 157 844

Tabelle 3: Variablenanzahl bei den Testläufen

Bemerkung 3.11 Die Angaben zur Variablenanzahl bei den Rechenbeispielen beziehen sich auf die Anzahl der Binärvariablen nach bestimmten vorbereitenden Schritten (Preprocessing). So haben wir, um die Zahl der Symmetrien im Problem zu reduzieren, Veranstaltungsgruppen (ein Dozent hält für die gleichen Studiengruppen zusammengehörende Veranstaltungen, z. B. bei 4-SWS-Veranstaltungen) zusammengefasst und zu jeder Planungseinheit nur eine Variable erzeugt. Ebenso verfahren wir mit wöchentlich stattfindenden Veranstaltungen, die wir in unserem Modell in $|W|$ Veranstaltungen zerlegen, vgl. Abschnitt 2.1.1. Außerdem erstellen wir nur Extravariablen $x_{s,i,w,d}, (s,i,w,d) \in \mathcal{X}^{E_1}, i \in \{1,2\}$, falls die Studiengruppe s in Woche w am Tag d überhaupt (obligatorische) Veranstaltungen besuchen kann.

Werden einer Veranstaltung mehrere Räume zugewiesen und wird diese daher im Modell in mehrere Veranstaltungen zerlegt (siehe Abschnitt 2.1.1), so können diese in der Implementierung wieder zusammengefasst werden. Man muss lediglich beachten, dass man bei der Berechnung der Anzahl der Veranstaltungen an einem Ort und in einer Raumgruppe diese Veranstaltung mehrfach zählt, entsprechend der Anzahl der Räume.

Weiterhin wird ein großer Anteil an Nebenbedingungen durch andere dominiert. Dazu

gehören Ungleichungen der Art

$$\forall\, t \in T\colon \sum_{o\in O, v_i \in V_i} x_{o,t,v_i} \leq 1 \text{ und } \forall\, t \in T\colon \sum_{o\in O, v_j \in V_j} x_{o,t,v_j} \leq 1$$

mit $V_i \subset V, V_j \subset V$, wie sie in (3) und (4) vorkommen. Gilt $V_i \subset V_j$, so kann man die linke Nebenbedingung löschen. Da $x_{o,t,v}, (o,t,v) \in \mathcal{X}^b$, Binärvariablen sind, werden außerdem Nebenbedingungen gelöscht, bei denen $|V_i| \leq 1$ gilt, da diese für zulässige Werte von $x_{o,t,v}$ stets erfüllt sind.

Wir beschreiben nun noch, wie wir die Güte unserer Lösungen abschätzen. Leider ist im Allgemeinen der exakte Zielfunktionswert nicht bekannt und damit auch nicht die relative Abweichung einer Lösung von der Optimallösung (siehe auch Bemerkung 3.12). Allerdings ist es möglich statt des exakten Optimalwertes jede untere Schranke dafür zu verwenden, was dazu führt, dass die *Gap* (Lücke) größer wird. Unter Gap versteht man dabei die relative Abweichung des Funktionswertes einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \to f(x)$, an einer Stelle x von einer unteren Schranke u. Sie berechnet sich als

$$gap(x,u) = \frac{|f(x) - u|}{|f(x)| + 10^{-10}},$$

wobei der Term 10^{-10} die Division durch null verhindert und den Gap-Wert nur geringfügig verändert.

Als untere Schranke für den Zielfunktionswert von **SPOPT** kommen der Wert der linearen Relaxation (IPR') und der Wert der Lagrange-Relaxation (D_L^{spopt}) in Frage. Wir werden beide Werte als Vergleichswerte in den Tabellen 4 und 5 nutzen und die jeweilige Gap als $gap_{(IPR')}$ bzw. $gap_{(D_L^{spopt})}$ berechnen. Die in den Tabellen angegebenen Zeitwerte stehen für

I. die Zeit der Relaxation,

II. die Zeit für die Bestimmung einer ganzzahligen Lösung,

III. die Zeit bis zu einer zulässigen Lösung (alle Unzulässigkeits-Variablen $x_{0,(0,0,0),v}$, $(0,(0,0,0),v) \in \mathcal{X}^U$ gleich null),

IV. die Gesamtzeit (inklusive Heuristiken)

jeweils in Minuten. Tabelle 4 stellt Rechenzeit und Gap für Lösungen dar, die mittels Rundungsheuristiken auf Basis der mit **Cplex** berechneten Relaxation erzeugt wurden und Tabelle 5 zeigt die Ergebnisse für dieselben Testinstanzen, wobei den Heuristiken die vom Bündelverfahren berechneten primalen Aggregierten zugrunde lagen. Die Berechnungen wurden alle auf einem Rechner mit Intel Xeon Dual Core (3.0 GHz) Prozessor, 64 GB RAM und 4 SATA Festplatten (250 GB) durchgeführt.

In den Tabellen 4, 5 ist deutlich zu erkennen, das $gap_{(IPR')}$ bedeutend kleiner ist im Vergleich zu $gap_{(D_L^{spopt})}$. Das ist damit zu erklären, dass bei der linearen Relaxation der exakte Wert berechnet wurde und mithilfe des Bündelverfahrens und der Lagrange-Relaxation

		$gap_{(D_L^{spopt})}$	$gap_{(IPR')}$	Zeit I	Zeit II	Zeit III	Gesamtzeit
A	WS 2007/08	0.025	0.000	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1
	SS 2008	0.179	0.009	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1
B	WS 2007/08	0.076	0.030	6.1	6.5	4.7	14.4
	SS 2008	0.115	0.023	4.9	6.1	6.5	10.0
C	WS 2007/08	0.121	0.062	5.4	5.9	6.5	9.5
	SS 2008	0.092	0.020	6.4	6.9	7.3	15.3
D	WS 2007/08	0.103	0.063	10.1	11.2	13.7	19.6
	SS 2008	0.091	0.058	7.2	8.0	9.8	15.1
E	WS 2007/08	0.098	0.071	77.4	88.8	94.1	114.6
	SS 2008	0.078	0.052	176.5	182.6	187.1	207.7
F	WS 2007/08	-	-	> 720	-	-	-
	SS 2008	0.080	0.054	169.5	176.1	182.9	211.0
G	WS 2007/08	0.086	0.068	572.8	660.5	688.1	786.3
	SS 2008	0.064	0.048	258.6	281.2	295.4	357.9

Tabelle 4: Übersicht über die numerischen Ergebnisse bei Verwendung des Innere-Punkte-Verfahrens

		$gap_{(D_L^{spopt})}$	$gap_{(IPR')}$	Zeit I	Zeit II	Zeit III	Gesamtzeit
A	WS 2007/08	0.025	0.000	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1
	SS 2008	0.179	0.009	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1
B	WS 2007/08	0.084	0.038	0.4	1.3	1.4	9.0
	SS 2008	0.123	0.031	0.3	1.3	1.4	5.1
C	WS 2007/08	0.104	0.048	0.3	0.9	1.5	4.7
	SS 2008	0.093	0.021	0.4	1.6	1.8	7.4
D	WS 2007/08	0.118	0.078	0.7	2.1	4.6	10.4
	SS 2008	0.093	0.060	0.6	2.4	4.3	9.5
E	WS 2007/08	0.099	0.072	2.1	6.9	13.8	35.1
	SS 2008	0.088	0.061	2.5	9.9	14.2	37.8
F	WS 2007/08	0.090	-	3.5	10.7	20.0	52.1
	SS 2008	0.083	0.057	3.6	10.6	21.3	50.6
G	WS 2007/08	0.096	0.078	6.8	23.1	50.5	130.0
	SS 2008	0.064	0.048	7.0	24.8	40.8	104.1

Tabelle 5: Übersicht über die numerischen Ergebnisse bei Verwendung des Bündelverfahrens

lediglich eine Approximation des Wertes der linearen Relaxation. Allerdings zeigt sich beim Vergleich der Gap-Werte, dass die Güte der gefundenen Lösungen der beiden Varianten trotzdem vergleichbar ist und damit die Berechnung der exakten Relaxation nicht notwendig erscheint. Außerdem ist gut zu erkennen, dass bei der Berechnung von (D_L^{spopt}) bedeutend weniger Zeit benötigt wird.

Weiterhin sind die Gap-Werte bei zunehmender Problemgröße meist schlechter. Hierzu ist zu beachten, dass es sich dabei nur um eine garantierte Güte der Lösungen handelt. Leider können wir nichts darüber aussagen, wie gut wir tatsächlich sind, d. h., wie hoch die Gap bei Vergleich mit der Optimallösung von **SPOPT** ist.

Bemerkung 3.12 Außer bei Betrachtung von Aufgabe A war es mit dem **MIP**-Löser von **Cplex** nicht möglich, eine Optimallösung von **SPOPT** zu bestimmen. Selbst bei Betrachtung von Problem B konnte nach fünf Tagen nur Lösungen gefunden werden, die schlechter als die von uns berechneten Lösungen waren. Aus diesem Grund haben wir auf weitere Berechnungen auf diesem Weg verzichtet.

Für A können wir die Gap unserer Lösungen zur Optimallösung angeben:

		gap mit Innere-Punkte-Verfahren	*gap* mit Bündelverfahren
A	WS 2007/08	0.000	0.000
	SS 2008	0.001	0.004

Sie ist damit bei den Werten für das Sommersemester noch etwas besser wie die vorher berechneten Gap-Werte in den Tabellen 4 und 5.

4 Ausblick

Wir stellen in dieser Arbeit ein Modell zur Stundenplanung an universitären Einrichtungen vor, wobei besonders auf die Umsetzung der Ziele für die Studierenden und Wechselmöglichkeiten zwischen verschiedenen Standorten eingegangen wird. Daneben werden Lösungsansätze angegeben, die in den numerischen Tests zu guten Ergebnissen geführt haben. Dabei sei hier vor allem auf die Lösung unter Nutzung eines Bündelverfahren verwiesen, womit selbst bei großen Problemen bereits nach kurzer Zeit zulässige Stundenpläne gefunden werden konnten.

Verbesserungsmöglichkeiten ergeben sich unter anderem bei den Heuristiken. So verwenden wir dort für die lokalen Verbesserungen **Cplex** für stark reduzierte **MIP**. Man könnte die lokale Suche aber auch ohne **Cplex** durchführen und stattdessen problemangepasste Strategien verwenden. Dabei kann explizit nach Konflikten bzw. Schwächen im Stundenplan gesucht werden, die dann gezielt verbessert werden. Ein Beispiel hierfür sind Studiengänge, die eine sehr hohe Anzahl an Wechseln aufweisen. In diesem Fall kann versucht werden durch gezielte Verlegungen von Veranstaltungen die Anzahl der Wechsel zu minimieren.

Bisher sind die Wechselnebenbedingungen für die Dozenten nur angesprochen worden. Es gilt diese noch effizient einzubauen, ohne die Zahl der Variablen zu stark zu erhöhen, vgl. Abschnitt 2.8. Weiterhin ist bisher nicht klar, wie sich die Lösungsverfahren bei einer höheren Anzahl an Raumgruppen verhalten bzw. welchen Einfluss eine geringere Raumanzahl hat. Werden Raumgruppen nur nach der Größe der Räume unterschieden, so lassen sich die entsprechenden Nebenbedingungen gut separieren, was eine größere Anzahl an Raumgruppen ermöglicht, siehe auch Bemerkung 2.1.

Für die Anwender interessant sind Stundenpläne, die bei kleinen Veränderungen an den Ausgangsdaten nur wenig von der bisherigen Lösung abweichen, weil z. B. eine einzelne Veranstaltung explizit verlegt werden soll. So würde man in diesem Fall hoffen, dass sich möglichst nur die Stundenpläne der betreffenden Studiengruppen verändern, die diese besuchen. Es kann außerdem in der Planung stets vorkommen, dass erst später bestimmte Informationen bekannt werden, die im Konflikt zu den erstellten Stundenplänen stehen. Dann sollte es möglich sein, die aktuelle Lösung schnell an die neuen Vorgaben anzupassen ohne den gesamten Plan neu berechnen zu müssen.

In den vorangegangenen Betrachtungen sind wir stets davon ausgegangen, dass wir nicht wissen, wie sich die Studierenden auf die Lehrveranstaltungen verteilen, sondern nur bekannt ist, welche Veranstaltungen für eine Studiengruppe in Frage kommen. Da es sehr schwer ist, hierfür genaue Daten zu ermitteln, könnte man einen anderen Weg wählen. So ist davon auszugehen, dass der prozentuale Anteil der Studierenden in einer Veranstaltung über die Jahre hinweg ungefähr gleich bleibt. Aus diesem Grund kann man versuchen, das Verhalten der Studierenden statistisch zu untersuchen und Stundenpläne aufzustellen, die im Mittel recht gut sind. Als Informationsgrundlage könnte man dafür die Anzahl der in den Veranstaltungen abgelegten Prüfungen heranziehen.

Interessant ist weiterhin eine Anpassung unseres Modells an Schulstundenpläne und besonders der Einsatz des Bündelverfahrens für die Lösung. Man kann vermuten, dass hier Lösungen ebenfalls in kurzer Zeit gefunden werden können, insbesondere da es an

Schulen häufig bedeutend weniger (Wahl-) Möglichkeiten und Veranstaltungen insgesamt gibt.

Literatur

[1] *ILOG CPLEX 9.1, Reference Manual*, 2005.

[2] D. Abramson, *Constructing school timetables using simulated annealing: Sequential and parallel algorithms*, Management Science, 37, 1 (1991), pp. 98–113.

[3] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, *Network flows: theory, algorithms, and applications*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1993.

[4] G. N. Beligiannis, C. N. Moschopoulos, G. P. Kaperonis, and S. D. Likothanassis, *Applying evolutionary computation to the school timetabling problem: The greek case*, Comput. Oper. Res., 35 (2008), pp. 1265–1280.

[5] D. P. Bertsekas, A. Nedić, and A. E. Ozdaglar, *Convex Analysis and Optimization*, Athena Scientific, Belmont, MA, 2003.

[6] N. Boland, B. D. Hughes, L. T. G. Merlot, and P. J. Stuckey, *New integer linear programming approaches for course timetabling*, Comput. Oper. Res., 35 (2008), pp. 2209–2233.

[7] A. J. Cole, *The preparation of examination timetables using a small-store computer*, The Computer Journal, 7 (1964), pp. 117–121.

[8] T. B. Cooper and J. H. Kingston, *The complexity of timetable construction problems*, in Selected papers from the First International Conference on Practice and Theory of Automated Timetabling, London, UK, 1996, Springer-Verlag, pp. 283–295.

[9] J. Csima and C. C. Gotlieb, *Tests on a computer method for constructing school timetables*, Commun. ACM, 7 (1964), pp. 160–163.

[10] G. B. Dantzig, *Lineare Programmierung und Erweiterungen*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1966.

[11] S. Even, A. Itai, and A. Shamir, *On the complexity of timetable and multicommodity flow problems*, SIAM Journal on Computing, 5 (1976), pp. 691–703.

[12] S. Feltenmark and K. C. Kiwiel, *Dual applications of proximal bundle methods, including lagrangian relaxation of nonconvex problems*, SIAM J. on Optimization, 10 (1999), pp. 697–721.

[13] E. Foxley and K. Lockyer, *The construction of examination timetables by computer*, The Computer Journal, 11 (1968), pp. 264–268.

[14] P. Fragkou, S. Kazarlis, and V. Petridis, *Solving university timetabling problems using advanced genetic algorithms*, in Proceedings of the ICTA'05, Oct. 2005, pp. 131–136.

[15] M. Gavanelli, *University timetabling in eclipse*, ALP Newsletter, 19 (2006).

[16] A. Ghoniem and H. D. Sherali, *Defeating symmetry via objective perturbations and hierarchical constraints.* to be revised, Jan. 2008.

[17] C. Gotlieb, *The construction of class-teacher time-tables*, in Inf. Process., Proc. IFIP Congr. Munich 62, 1963, pp. 73–77.

[18] C. Helmberg, *The ConicBundle Library for Convex Optimization*, http://www-user.tu-chemnitz.de/∼helmberg/ConicBundle/, 2008.

[19] R. M. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, in Complexity of Computer Computations, R. E. Miller and J. W. Thatcher, eds., Plenum Press, 1972, pp. 85–103.

[20] K. C. Kiwiel, *Proximity control in bundle methods for convex nondifferentiable minimization*, Math. Prog., 46 (1990), pp. 105–122.

[21] A. Kreczmar, *Algorithm for constructing of university timetables and criterion of consistency of requirements*, Acta Cybernetica, (1973).

[22] Y. C. Law and J. H. Lee, *Symmetry breaking constraints for value symmetries in constraint satisfaction*, Constraints, 11 (2006), pp. 221–267.

[23] J. Lions, *Matrix reduction using the hungarian method for the generation of school timetables*, Commun. ACM, 9 (1966), pp. 349–354.

[24] A. M. Löbel, *MCF - A network simplex implementation*, http://www.zib.de/Optimization/Software/Mcf/, 1.3 ed., May 2008.

[25] M. Marte, *Towards constraint-based school timetabling*, Annals of Operations Research, 155 (2007), pp. 207–225.

[26] A. R. Mushi, *Tabu search heuristic for university course timetabling problem*, African Journal of Science and Technology, Science and Engineering Series, 7 (2006), pp. 34–40.

[27] M. Norberciak, *Universal method for timetable construction based on evolutionary approach*, International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences, 3 (2006).

[28] C. Roos, T. Terlaky, and J.-P. Vial, *Interior Point Methods for Linear Optimization*, Springer, 2nd ed., 2006.

[29] I. Wegener, *Theoretische Informatik - eine algorithmenorientierte Einführung*, Teubner, 2. ed., 1999.

Danksagung

Ich möchte mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Christoph Helmberg für seine hilfreichen Ratschläge und seine kompetente Unterstützung bedanken. Außerdem danke ich den Mitarbeitern des Dezernates Planung, Statistik, Steuerung der TU Chemnitz für ihre Zusammenarbeit.
Abschließend möchte ich meinen Eltern danken, dass sie mich während meines gesamten Mathematikstudiums unterstützt haben.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Chemnitz, den 2. Juni 2008

Anja Lau