Technische Universität Chemnitz
Dr. F. Göring

Chemnitz, 8. Juni 2005
Abgabe zur letzten Vorlesung

Zelluläre Automaten, Aufgabe 3

In einem eindimensionalen Zellulären Automaten mögen zwei Partikel P_1 und P_2 zu demselben Hintergrund existieren. P_1 hat die Periode p_1 und wandert innerhalb einer Periode um s_1 Zellen nach rechts. P_2 hat die Periode p_2 und wandert innerhalb einer Periode um s_2 Zellen nach rechts.
a) Ziehen Sie aus der Existenz dieser Partikel Rückschlüsse auf die Art des Hintergrundes.
b) In wieviel verschiedenen Varianten können die Partikel aufeinandertreffen? Begründen Sie Ihre Antworten!

Lösung(Detaillierter Ansatz)

Die Zeitperiode z des Hintergrundes sei die Zahl der Updates des Zellautomaten, bis er - bis auf Verschiebung - den gleichen Zustand hat wie zuvor, wenn die Anfangsgeneration nur den Hintergrund enthielt. Die Raumperiode r des Hintergrundes sei die kleinste Periode dieser Startgeneration.

Die Periode eines Teilchens ist die Zahl der Updates, bis der Zellautomat - wieder bis auf Verschiebung - den gleichen Zustand wie zuvor hat, wobei die Startgeneration hier aus diesem Teilchen auf seinem Hintergrund besteht.

Damit ist z stets ein Teiler von p_1 und p_2.

Für beide Teilchen legen wir uns Referenzpunkte fest, die sich exakt mit der Geschwindigkeit der Zellen bewegen (die Zellen mögen eine lineare Ausdehnung von 1 haben).

Zwei Möglichkeiten des Aufeinandertreffens der Teilchen sehen wir als gleich an, wenn eine der beiden zugehörigen Evolutionen des Zellautomaten (jene mit kleinerem Startabstand) in der anderen enthalten ist.

Halten wir P_1 in Zustand und Position bei der Startgeneration fest, und zählen die Positionen (wobei Positionen nur als gleich gelten, wenn sowohl Referenzpunkt als auch Zustand des Teilchens übereinstimmen) des zweiten Teilchens, bei denen die Referenzpunkte die Seiten tauschen, bevor P_1 eine volle Periode durchschritten hat, so haben wir die Anzahl der möglichen Arten des Aufeinandertreffens bestimmt, da die Referenzpunkte bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten die Seite tauschen, und ansonsten kein Aufeinandertreffen erfolgt.

Der Raumbereich, in dem sich bei der Startgeneration der Referenzpunkt des zweiten Teilchens befinden darf, ist damit $p_1 \left(\frac{s_1}{p_1} - \frac{s_2}{p_2} \right)$, also $\frac{p_1}{r} \left(\frac{s_1}{p_1} - \frac{s_2}{p_2} \right)$ Raumperioden des Hintergrundes. Betrachten wir das $r \cdot p_1 \cdot p_2$-fache dieses Raumbereichs, so haben wir jede Möglichkeit auch $r \cdot p_1 \cdot p_2$ mal gezählt, aber nun ist der Raumbereich ein ganzzahliges Vielfaches der Raumperiode, was das Zählen erleichtert.

Innerhalb einer Raumperiode kann P_2 offenbar genau $\frac{p_2}{z}$ Zustände annehmen, da während seiner Periode sein Referenzpunkt immer in irgendeinem Raumbereich der Periodenlänge liegt, aber der Hintergrund nur alle z Generationen im gleichen Zustand ist, wie in der Startgeneration. Innerhalb von $p_1(s_1p_2 - s_2p_1)$ Raumperioden kann P_2 damit $p_1\frac{p_2}{z}(s_1p_2 - s_2p_1)$ verschiedene Positionen einnehmen. Da wir aber jede Art des Aufeinandertreffens $r \cdot p_1 \cdot p_2$ mal gezählt haben, Erhalten wir als gesuchte Anzahl exakt $\frac{s_1p_2-s_2p_1}{r \cdot z}$, was b beantwortet mit: Es gibt höchstens $s_1p_2 - s_2p_1$ mögliche Arten des Auftreffens (sofern $r = z = 1$ gilt, was nicht auszuschliessen ist.) Zu a) erhalten wir die Bedingungen: $z|\mathrm{ggT}(p_1, p_2)$ und $r|\frac{s_1p_2-s_2p_1}{z}$.