Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. C. Helmberg, A. Lau

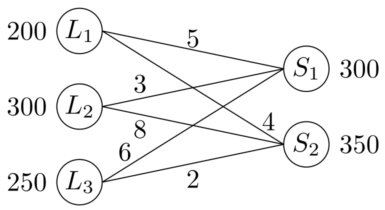
Chemnitz, 2.11.2009

Optimierung für Nichtmathematiker
Übung 4

Achtung! Neben der Übung werden am 2.11. und am 9.11. jeweils 7.30 Uhr im Raum 2/39/733 Konsultationen angeboten. In diesen Veranstaltungen haben Sie die Möglichkeit, Fragen zu stellen, und es werden einige Grundlagen aufgefrischt.

Diese Übung dient dazu, praktische Fragestellungen als mathematisches Optimierungsmodell zu formulieren. Dabei stehen Flussprobleme (vgl. Vorlesung 3) im Mittelpunkt.

1. **Wiederholung Transportproblem**
   Gegeben seien drei Lager L_1, L_2, L_3 und zwei Supermärkte S_1, S_2. In jedem Lager befindet sich eine vorgegebene Anzahl an Produkten, mit denen die vorgegebenen Bedarfe der Supermärkte gedeckt werden sollen. Durch den Transport der Produkte von einem Lager zum Supermarkt entstehen Kosten in Abhängigkeit von den Positionen und damit von der Länge des Weges. Ziel ist es nun, die Gesamttransportkosten zu minimieren, wobei die Bedarfe gedeckt und die Lagerkapazitäten eingehalten werden müssen.

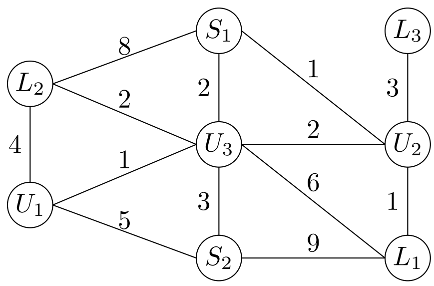


$c_{i,j}$	S_1	S_2
L_1	5	4
L_2	3	8
L_3	6	2

   Stellen Sie ein Optimierungsmodell für die Fragestellung auf.

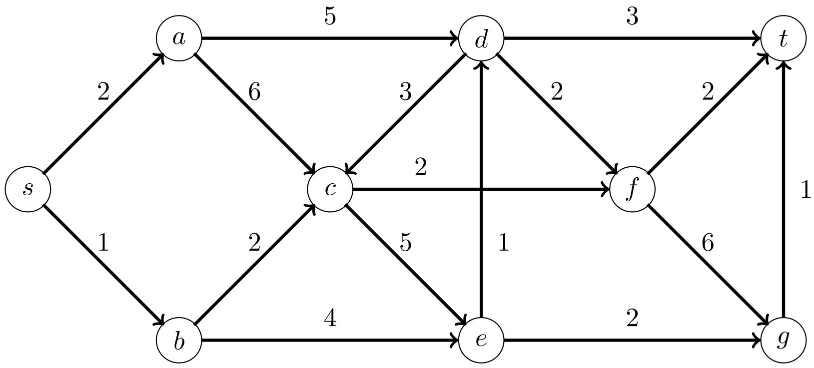
   Wie muss das Problem angepasst werden, wenn auch Lagerkosten in Abhängigkeit der Anzahl der Produkte und des Standortes betrachtet werden sollen?

2. **Umladeproblem**
   Wir befinden uns in einer ähnlichen Situation wie in Aufgabe 1, nur dass diesmal nicht jeder Supermarkt von jedem Lager aus erreichbar ist, sondern es zusätzliche Umladeknoten U_1, U_2, U_3 gibt. Die Aufgabe ist es wiederum, alle Supermärkte möglichst kostengünstig zu beliefern (NB von Aufgabe 1 bleiben erhalten).



   Stellen Sie ein Optimierungsmodell für die Fragestellung auf.

3. **Min-Cost-Flow-Problem**
Gegeben sei der folgende Digraph $D = (V, E)$ mit Knotenmenge V, Kantenmenge E und Kantengewichten c_E. Stellen Sie ein Modell auf, mit dem man den kürzesten Weg vom Knoten s zum Knoten t bestimmen kann.

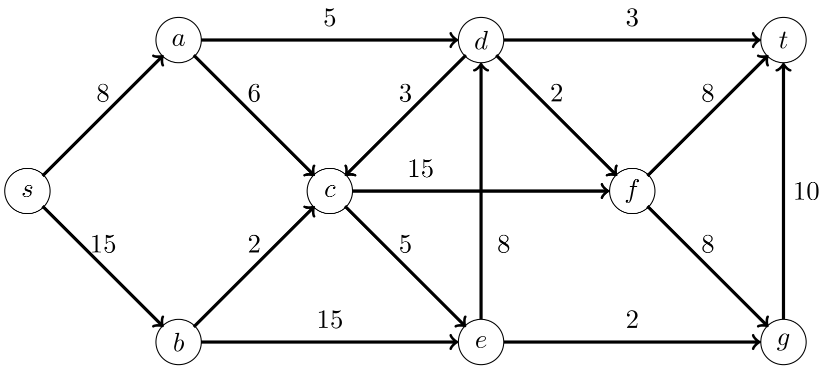


Zur Vorstellung: Der vorliegende Graph stellt eine stilisierte Landkarte dar und die Gewichte entsprechen den Abständen zwischen den Orten. Gesucht wird die kürzeste Verbindung vom Start- zum Zielort.

Wie muss das Modell angepasst werden, wenn die Summe der kürzesten Wege von s nach t, von s nach f und von s nach c minimiert werden soll?

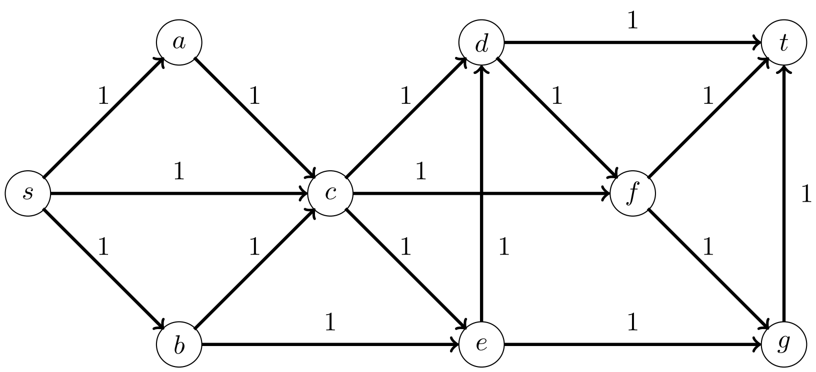
Ist es mit einem ähnlichen Modell auch möglich, die Summe der kürzesten Wege von s nach d und von a nach e zu bestimmen?

4. **Max-Flow-Problem**
Gegeben sei das folgende Netzwerk $D = (V, E, w)$ mit Knotenmenge V, Kantenmenge E und Kantenkapazitäten w_E. Stellen Sie ein Modell auf, mit dem man den maximalen Fluss vom Knoten s zum Knoten t bestimmen kann.



Zur Vorstellung: Sie wollen möglichst viel Wasser von Ort s nach Ort t transportieren, wobei die Rohre nur eine bestimmte Menge an Wasser fassen können (wird durch den Rohrdurchmesser vorgegeben).

5. **Multi-Commodity-Flow-Problem**
Gegeben ist ein Netzwerk $D = (V, E, w)$ mit Knotenmenge V, Kantenmenge E und Kantenkapazitäten $w = \mathbf{1}$.

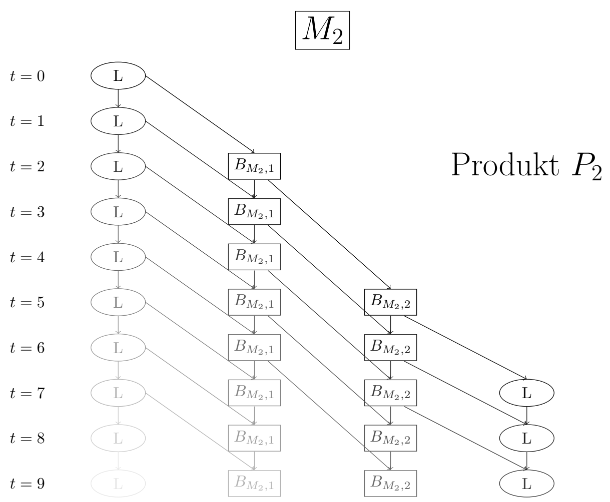


Die Knoten stellen Märkte dar und die Kanten stehen für Transportwege zwischen den Märkten. Es sollen nun drei unterschiedliche Produkte (jeweils Menge 1) transportiert werden und zwar P_1 von s nach e, P_2 von s nach t und P_3 von c nach g. Bei diesen Transporten sollen die Kapazitäten der Transportwege eingehalten werden. Durch den Transport entstehen unabhängig von der Produktart Kosten, Kosten von 1 auf horizontal und vertikal verlaufenden Kanten, Kosten von 2 auf diagonal verlaufenden Kanten.

Stellen Sie ein Modell auf, welches die Gesamtkosten unter den beschriebenen Nebenbedingungen minimiert.

6. **Zeitdiskretisiertes Netzwerk**
Die Produkte P_1, P_2 sollen auf den Maschinen M_1, M_2 hergestellt werden. Die Ausgangsstoffe für P_1 werden vom Lager in einer Minute zu M_1 geschafft, dort werden sie in zwei Minuten verarbeitet, werden dann in einer Minute zu Maschine M_2 transportiert, dort eine Minute verarbeitet und als fertiges Produkt in zwei Minuten wieder zum Lager transportiert. Bei P_2 braucht man für den Transport der Ausgangsstoffe zu M_2 zwei Minuten, alles wird drei Minuten dort bearbeitet und dann fertig in zwei Minuten ins Lager gebracht. Hinweis: Vor und hinter jeder Maschine befindet sich ein Eingangs- bzw. Ausgangspuffer, in denen die (Zwischen-) Produkte zwischengelagert werden können.

P_1 : Lager $\xrightarrow{\text{1 min}}$ M_1 2 min $\xrightarrow{\text{1 min}}$ M_2 1 min $\xrightarrow{\text{2 min}}$ Lager
P_2 : Lager $\xrightarrow{\text{2 min}}$ M_2 3 min $\xrightarrow{\text{2 min}}$ Lager



Frage: Welche Konflikte treten auf, wenn eine Maschine gleichzeitig maximal ein Produkt bearbeiten kann? Stellen Sie ein Modell auf, bei dem die Gesamtzeit für die Erstellung der beiden Produkte minimiert wird.