Inhaltsübersicht für heute:

Inhaltsübersicht für heute:

Dualität

Mit jedem konvexen Minimierungsproblem löst man automatisch ein verwandtes konvexes Maximierungsproblem, das als die Bestimmung einer besten Schranke für den Optimalwert des Originalproblems interpretiert werden kann.

Die duale Optimallösung (wenn sie existiert) gibt wichtige Zusatzinforamtion über das Originalproblem.

Für Lineare Optimierung ist das besonders einfach und anschaulich.

Untere Schranken, algebraisch

Eine Ungleichung $a^T x \geq \alpha$ heißt gültig für ein Optimierungsproblem mit zulässiger Menge $\mathcal{X}$, wenn sie für alle $x \in \mathcal{X}$ erfüllt ist.

Betrachte $\mathcal{X} := \{x : Ax \geq b\}$ mit $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$.

Nichtneg. Linearkombination der Zeilen $Ax \geq b$ und r.S. vergrößern

$$\begin{array}{rrcll} & a_1^T x & \geq & b_1 & \quad | \cdot y_1 (\geq 0) \\ & \vdots & & & \\ & a_m^T x & \geq & b_m & \quad | \cdot y_m (\geq 0) \\ & 0^T x & \geq & -1 & \quad | \cdot \eta (\geq 0) \\ \hline \oplus : & (y^T A) x & \geq & y^T b - \eta & \end{array}$$

liefert eine gültige Ungleichung für $\mathcal{X}$ (und man erhält alle so!).

Untere Schranken, algebraisch

Eine Ungleichung $a^T x \geq \alpha$ heißt gültig für ein Optimierungsproblem mit zulässiger Menge $\mathcal{X}$, wenn sie für alle $x \in \mathcal{X}$ erfüllt ist.

Betrachte $\mathcal{X} := \{x : Ax \geq b\}$ mit $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$.

Nichtneg. Linearkombination der Zeilen $Ax \geq b$ und r.S. vergrößern

$$\begin{array}{rrcll} & a_1^T x & \geq & b_1 & \mid \cdot\, y_1 (\geq 0) \\ & \vdots & & & \\ & a_m^T x & \geq & b_m & \mid \cdot\, y_m (\geq 0) \\ & 0^T x & \geq & -1 & \mid \cdot\, \eta (\geq 0) \\ \hline \oplus : & (y^T A) x & \geq & y^T b - \eta & \end{array}$$

liefert eine gültige Ungleichung für $\mathcal{X}$ (und man erhält alle so!).

Für ein $\bar{y} \geq 0$ mit $A^T \bar{y} = c$ folgt $\min\{c^T x : Ax \geq b\} \geq b^T \bar{y}$.
Die größte untere Schranke?

Untere Schranken, algebraisch

Eine Ungleichung $a^T x \geq \alpha$ heißt gültig für ein Optimierungsproblem mit zulässiger Menge $\mathcal{X}$, wenn sie für alle $x \in \mathcal{X}$ erfüllt ist.

Betrachte $\mathcal{X} := \{x : Ax \geq b\}$ mit $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$.

Nichtneg. Linearkombination der Zeilen $Ax \geq b$ und r.S. vergrößern

$$\begin{array}{rrcll} & a_1^T x & \geq & b_1 & \mid \cdot\, y_1 (\geq 0) \\ & \vdots & & & \\ & a_m^T x & \geq & b_m & \mid \cdot\, y_m (\geq 0) \\ & 0^T x & \geq & -1 & \mid \cdot\, \eta (\geq 0) \\ \hline \oplus : & (y^T A) x & \geq & y^T b - \eta & \end{array}$$

liefert eine gültige Ungleichung für $\mathcal{X}$ (und man erhält alle so!).

Für ein $\bar{y} \geq 0$ mit $A^T \bar{y} = c$ folgt $\min\{c^T x : Ax \geq b\} \geq b^T \bar{y}$.
Die größte untere Schranke? $\max\{b^T y : A^T y = c, y \geq 0\}$

Das Duale in Normalform

Betrachte $\min c^T x$ s.t. $Ax = b,\ x \geq 0$.

Erlaubte Linearkombionation der Zeilen $Ax = b$ und $Ix \geq 0$

$$\begin{array}{rrcll}
 & a_1^T x & = & b_1 & \mid \cdot\, y_1 (\in \mathbb{R}) \\
 & \vdots & & & \\
 & a_m^T x & = & b_m & \mid \cdot\, y_m (\in \mathbb{R}) \\
 & e_1^T x & \geq & 0 & \mid \cdot\, z_1 (\geq 0) \\
 & \vdots & & & \\
 & e_n^T x & \geq & 0 & \mid \cdot\, z_n (\geq 0) \\
\hline
\oplus : & (y^T A + z^T I) x & \geq & y^T b &
\end{array}$$

Das Duale in Normalform

Betrachte $\min c^T x$ s.t. $Ax = b, \; x \geq 0.$

Erlaubte Linearkombination der Zeilen $Ax = b$ und $Ix \geq 0$

$$
\begin{array}{rcll}
 & a_1^T x & = & b_1 & \mid \cdot y_1 (\in \mathbb{R}) \\
 & & \vdots & & \\
 & a_m^T x & = & b_m & \mid \cdot y_m (\in \mathbb{R}) \\
 & e_1^T x & \geq & 0 & \mid \cdot z_1 (\geq 0) \\
 & & \vdots & & \\
 & e_n^T x & \geq & 0 & \mid \cdot z_n (\geq 0) \\
\hline
\oplus : & (y^T A + z^T I) x & \geq & y^T b &
\end{array}
$$

Die beste untere Schranke liefert das Duale LP in Normalform:

$$
\begin{array}{ll}
\max & b^T y \\
\text{s.t.} & A^T y + z = c \\
 & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0
\end{array}
\qquad
\left[\Leftrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max & b^T y \\
\text{s.t.} & A^T y \geq 0 \\
 & y \in \mathbb{R}^m,
\end{array}
\right]
$$

y und z sind die Dualvariablen.

Dualisierungsregeln

Nach dem gleichen Muster ergibt sich

$$\begin{array}{ccc} \min c^T x & \leftrightarrow & \max b^T y \\ Ax \geq b & \leftrightarrow & y \geq 0 \\ Ax \leq b & \leftrightarrow & y \leq 0 \\ Ax = b & \leftrightarrow & y \text{ frei} \\ x \geq 0 & \leftrightarrow & A^T y \leq c \\ x \leq 0 & \leftrightarrow & A^T y \geq c \\ x \text{ frei} & \leftrightarrow & A^T y = c \end{array}$$

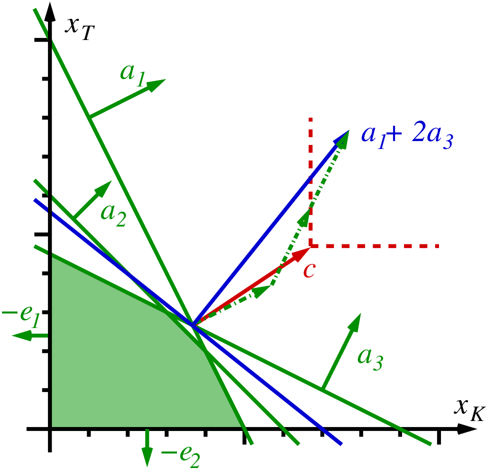
Insbesondere ist das Duale des Dualen LPs wieder das Primale LP.

Mozart: das Duale geometrisch

$$(P_M) \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$(D_M) \quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \to A^T \bar{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \geq c, \; b^T \bar{y} = 28$$

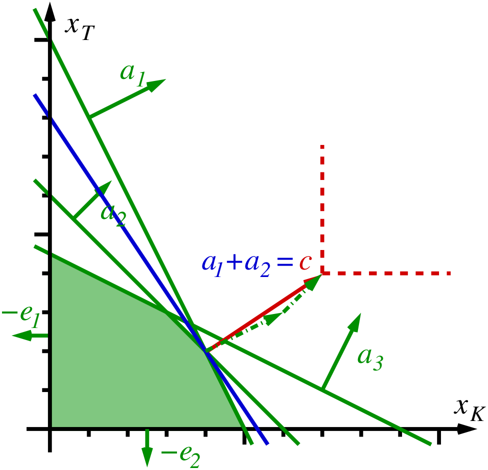
Mozart: das Duale optimal

$$(P_M)\quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array}$$

$$(D_M)\quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$\bar{y}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to A^T\bar{y}^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = c,\ b^T\bar{y}^* = 16, \qquad \bar{x}^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Wo ist das Duale im Simplex-Algorithmus?

Input: zulässige Basis B, $\bar{x}_B = A_B^{-1} b$

1. BTRAN: Bestimme $\bar{y} := A_B^{-T} c_B$ durch Lösen von $A_B^T y = c_B$.
2. PRICE: $\bar{z}_N := c_N - A_N^T \bar{y}$, ist $\bar{z}_N \geq 0$, STOP (Optimallösung), sonst wähle $\hat{\imath} \in N$ mit $\bar{z}_{\hat{\imath}} < 0$.

$\vdots$

$$
(P) \quad \begin{array}{ll} & \min c^T x \\ \text{s.t.} & [A_B, A_N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \\ & x \geq 0 \end{array}
\qquad
(D) \quad \begin{array}{ll} & \max b^T y \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} A_B^T \\ A_N^T \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} z_B \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix} \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}
$$

1. Schritt: Setze $\bar{z}_B = 0$ und löse 1. duale Block-Zeile $\rightarrow \bar{y}$
2. Schritt: Bestimme $\bar{z}_N$ aus der 2. dualen Block-Zeile

Wo ist das Duale im Simplex-Algorithmus?

Input: zulässige Basis B, $\bar{x}_B = A_B^{-1} b$

1. BTRAN: Bestimme $\bar{y} := A_B^{-T} c_B$ durch Lösen von $A_B^T y = c_B$.
2. PRICE: $\bar{z}_N := c_N - A_N^T \bar{y}$, ist $\bar{z}_N \geq 0$, STOP (Optimallösung), sonst wähle $\hat{\imath} \in N$ mit $\bar{z}_{\hat{\imath}} < 0$.

$\vdots$

$$(P) \quad \begin{array}{ll} & \min c^T x \\ \text{s.t.} & [A_B, A_N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} & \max b^T y \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} A_B^T \\ A_N^T \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} z_B \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix} \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

1. Schritt: Setze $\bar{z}_B = 0$ und löse 1. duale Block-Zeile $\rightarrow \bar{y}$
2. Schritt: Bestimme $\bar{z}_N$ aus der 2. dualen Block-Zeile

Ist die duale Lösung zulässig ($\bar{z}_N \geq 0$), ergibt das die Schranke

$$\min_{x \in \mathcal{X}} c^T x \;\geq\; \bar{y}^T b \;=\; c_B^T A_B^{-1} \;=\; c_B \bar{x}_B \;=\; c^T \bar{x} \qquad [\Rightarrow \text{OL}]$$

Wo ist das Duale im Simplex-Algorithmus?

Input: zulässige Basis B, $\bar{x}_B = A_B^{-1} b$

1. BTRAN: Bestimme $\bar{y} := A_B^{-T} c_B$ durch Lösen von $A_B^T y = c_B$.
2. PRICE: $\bar{z}_N := c_N - A_N^T \bar{y}$, ist $\bar{z}_N \geq 0$, STOP (Optimallösung), sonst wähle $\hat{\imath} \in N$ mit $\bar{z}_{\hat{\imath}} < 0$.

$\vdots$

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & [A_B, A_N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} A_B^T \\ A_N^T \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} z_B \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix} \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

1. Schritt: Setze $\bar{z}_B = 0$ und löse 1. duale Block-Zeile $\rightarrow \bar{y}$
2. Schritt: Bestimme $\bar{z}_N$ aus der 2. dualen Block-Zeile

Ist die duale Lösung zulässig ($\bar{z}_N \geq 0$), ergibt das die Schranke

$$\min_{x \in \mathcal{X}} c^T x \;\geq\; \bar{y}^T b \;=\; c_B^T A_B^{-1} \;=\; c_B \bar{x}_B \;=\; c^T \bar{x} \qquad [\Rightarrow \text{OL}]$$

Beachte: PRICE sucht einfach ein dual unzulässiges z_i mit $i \in N$!

Das duale Simplex-Verfahren

$$(D)\ \max\ b^T y \text{ s.t. } \begin{bmatrix} A_B^T \\ A_N^T \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} z_B \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix},\ y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0$$

Dual zulässige Basis: $z_B = 0$, $y = A_B^{-T}(c_B - z_B)$, $z_N = c_N - A_N^T y \geq 0$
Kostenänderung in Abh. von z_B: $y^T b = c_B^T c_B - z_B^T \underbrace{A_B^{-1} b}_{=:\bar{x}_B}$

Das duale Simplex-Verfahren

$$(D)\ \max\ b^T y \text{ s.t. } \begin{bmatrix} A_B^T \\ A_N^T \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} z_B \\ z_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix},\ y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0$$

Dual zulässige Basis: $z_B = 0$, $y = A_B^{-T}(c_B - z_B)$, $z_N = c_N - A_N^T y \geq 0$
Kostenänderung in Abh. von z_B: $y^T b = c_B^T c_B - z_B^T \underbrace{A_B^{-1} b}_{=:\bar{x}_B}$

Input: dual zulässige Basis B, $\bar{y} = A_B^{-T} c_b$, $\bar{z}_N = c_N - A_N^T \bar{y} \geq 0$

1. FTRAN: Bestimme $\bar{x}_B := A_B^{-1} b$ durch Lösen von $A_B x_B = b$.
2. PRICE: Ist $\bar{x}_B \geq 0$, STOP (Optimallösung), sonst wähle $\hat{\jmath} \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\bar{x}_{B(\hat{\jmath})} < 0$.
3. BTRAN: Bestimme $\bar{w} := A_B^{-T} e_{\hat{\jmath}}$ und berechne $\bar{\omega}_N := -A_N^T \bar{w}$
4. RATIO: Ist $\bar{\omega}_N \leq 0$ STOP (Duales unbeschränkt), sonst wähle $\hat{\imath} \in \mathrm{Argmin}_{i \in N}\{\frac{\bar{z}_i}{\bar{\omega}_i} : \bar{\omega}_i > 0\}$, $\zeta := \frac{\bar{z}_{\hat{\imath}}}{\bar{\omega}_{\hat{\imath}}}$
5. Update: $\bar{y} := \bar{y} - \zeta \bar{w}$, $\bar{z}_N := \bar{z}_N - \zeta \bar{\omega}$, $\bar{z}_{B(\hat{\jmath})} := \zeta$
   $N := N \setminus \{\hat{\imath}\} \cup B(\hat{\jmath})$, $B(\hat{\jmath}) := \hat{\imath}$, GOTO 1.

Schwache und Starke Dualität

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

Ist x primal zulässig und (y, z) dual zulässig, dann gilt

$$c^T x - b^T y = (A^T y + z)^T x - b^T y = (Ax - b)^T y + z^T x = z^T x \geq 0$$

Schwache und Starke Dualität

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

Ist x primal zulässig und (y, z) dual zulässig, dann gilt

$$c^T x - b^T y = (A^T y + z)^T x - b^T y = (Ax - b)^T y + z^T x = z^T x \geq 0$$

Schwache Dualität: Der Wert jeder zulässigen Lösung beschränkt den Optimalwert des jeweils Dualen. [gilt immer!]

$\Rightarrow$ *Ist ein LP unbeschränkt, ist dessen Duales unzulässig.*

Schwache und Starke Dualität

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

Ist x primal zulässig und (y, z) dual zulässig, dann gilt

$$c^T x - b^T y = (A^T y + z)^T x - b^T y = (Ax - b)^T y + z^T x = z^T x \geq 0$$

Schwache Dualität: Der Wert jeder zulässigen Lösung beschränkt den Optimalwert des jeweils Dualen. [gilt immer!]

$\Rightarrow$ *Ist ein LP unbeschränkt, ist dessen Duales unzulässig.*

Dualitätslücke: Differenz aus primalem und dualem Optimalwert.

Schwache und Starke Dualität

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

Ist x primal zulässig und (y, z) dual zulässig, dann gilt

$$c^T x - b^T y = (A^T y + z)^T x - b^T y = (Ax - b)^T y + z^T x = z^T x \geq 0$$

Schwache Dualität: Der Wert jeder zulässigen Lösung beschränkt den Optimalwert des jeweils Dualen. [gilt immer!]

$\Rightarrow$ *Ist ein LP unbeschränkt, ist dessen Duales unzulässig.*

Dualitätslücke: Differenz aus primalem und dualem Optimalwert.

Starke Dualität: Primaler und dualer Optimalwert sind gleich, (beide werden angenommen). [gilt i.A. nicht für Konv. Opt.]

Schwache und Starke Dualität

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^Tx \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^Ty \\ \text{s.t.} & A^Ty + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

Ist x primal zulässig und (y, z) dual zulässig, dann gilt

$$c^Tx - b^Ty = (A^Ty + z)^Tx - b^Ty = (Ax - b)^Ty + z^Tx = z^Tx \geq 0$$

Schwache Dualität: Der Wert jeder zulässigen Lösung beschränkt den Optimalwert des jeweils Dualen. [gilt immer!]
$\Rightarrow$ *Ist ein LP unbeschränkt, ist dessen Duales unzulässig.*
Dualitätslücke: Differenz aus primalem und dualem Optimalwert.
Starke Dualität: Primaler und dualer Optimalwert sind gleich, (beide werden angenommen). [gilt i.A. nicht für Konv. Opt.]

Satz (Starke Dualität in der Linearen Optimierung)

Hat ein LP einen endlichen Optimalwert, so wird dieser sowohl primal als auch dual angenommen.

Beweis: Simplex-Alg. mit Auswahlregeln von Bland. $\square$

Es können beide unzulässig sein!

$$(P_u)\quad \begin{array}{lrl} \max & x_1 & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 \leq & -1 \\ & -x_1 + x_2 \leq & 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq & 0 \end{array} \qquad (D_u)\quad \begin{array}{lrl} \max & -y_1 & \\ \text{s.t.} & y_1 - y_2 \geq & 1 \\ & -y_1 + y_2 \geq & 0 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq & 0 \end{array}$$

(P_u) Es kann nicht $x_2 \geq 1 + x_1$ und $x_2 \leq x_1$ sein.

(D_u) Es kann nicht $y_1 \geq 1 + y_2$ und $y_1 \leq y_2$ sein.

Inhaltsübersicht für heute:

Anwendung: Spieltheorie

2-Personen Matrix-Spiel: Für eine gegebene Auszahlungsmatrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wählt Spieler 1 (S1) eine Zeile i und Spieler 2 (S2) eine Spalte j. Spieler 1 zahlt an Spieler 2 den Betrag M_{ij}.

Anwendung: Spieltheorie

2-Personen Matrix-Spiel: Für eine gegebene Auszahlungsmatrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wählt Spieler 1 (S1) eine Zeile i und Spieler 2 (S2) eine Spalte j. Spieler 1 zahlt an Spieler 2 den Betrag M_{ij}.

Wenn S2 weiß, dass S1 Zeile i wählt, wählt S2 $\max_{j=1,\ldots,n}(A^T e_i)_j$.

Anwendung: Spieltheorie

2-Personen Matrix-Spiel: Für eine gegebene Auszahlungsmatrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wählt Spieler 1 (S1) eine Zeile i und Spieler 2 (S2) eine Spalte j. Spieler 1 zahlt an Spieler 2 den Betrag M_{ij}.

Wenn S2 weiß, dass S1 Zeile i wählt, wählt S2 $\max_{j=1,\ldots,n}(A^T e_i)_j$.

S1 bestimmt eine optimale Wahrscheinlichkeits-Verteilung für eine zufällige Zeilenwahl, um nicht so leicht voraussagbar zu sein:

$$\begin{array}{ll} \min & \max_{j=1,\ldots,n}(M^T x)_j \\ \text{s.t.} & \mathbf{1}^T x = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Anwendung: Spieltheorie

2-Personen Matrix-Spiel: Für eine gegebene Auszahlungsmatrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wählt Spieler 1 (S1) eine Zeile i und Spieler 2 (S2) eine Spalte j. Spieler 1 zahlt an Spieler 2 den Betrag M_{ij}.

Wenn S2 weiß, dass S1 Zeile i wählt, wählt S2 $\max_{j=1,\dots,n}(A^T e_i)_j$.

S1 bestimmt eine optimale Wahrscheinlichkeits-Verteilung für eine zufällige Zeilenwahl, um nicht so leicht voraussagbar zu sein:

$$\begin{array}{ll} \min & \max_{j=1,\dots,n}(M^T x)_j \\ \text{s.t.} & \mathbf{1}^T x = 1 \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow (P_1) \quad \begin{array}{lll} \min & s & \\ \text{s.t.} & s \geq (M^T x)_j & j = 1, \dots, n \\ & \mathbf{1}^T x = 1 & \\ & x \geq 0, s \in \mathbb{R} & \end{array}$$

Anwendung: Spieltheorie

2-Personen Matrix-Spiel: Für eine gegebene Auszahlungsmatrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wählt Spieler 1 (S1) eine Zeile i und Spieler 2 (S2) eine Spalte j. Spieler 1 zahlt an Spieler 2 den Betrag M_{ij}.

Wenn S2 weiß, dass S1 Zeile i wählt, wählt S2 $\max_{j=1,\dots,n}(A^T e_i)_j$.

S1 bestimmt eine optimale Wahrscheinlichkeits-Verteilung für eine zufällige Zeilenwahl, um nicht so leicht voraussagbar zu sein:

$$\begin{array}{ll} \min & \max_{j=1,\dots,n}(M^T x)_j \\ \text{s.t.} & \mathbf{1}^T x = 1 \\ & x \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow (P_1) \quad \begin{array}{lll} \min & s & \\ \text{s.t.} & s \geq (M^T x)_j & j = 1, \dots, n \\ & \mathbf{1}^T x = 1 & \\ & x \geq 0, s \in \mathbb{R} & \end{array}$$

S2 tut das gleiche für sich

$$\begin{array}{ll} \max & \min_{i=1,\dots,m}(My)_i \\ \text{s.t.} & \mathbf{1}^T y = 1 \\ & y \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow (P_2) \quad \begin{array}{lll} \max & t & \\ \text{s.t.} & t \leq (My)_j & i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{1}^T y = 1 & \\ & y \geq 0, t \in \mathbb{R} & \end{array}$$

(P_2) ist das Duale zu (P_1), beide sind zul., also ist $v(P_1) = v(P_2)$.
Man muss die Strategie des Gegners gar nicht kennen!

Inhaltsübersicht für heute:

Komplementarität

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

$c^T x - b^T y = z^T x \geq 0$ gilt für bel. primal und dual zul. Lösungen.

Satz (vom komplementären Schlupf)

Primal und dual zulässige Lösungen $\bar{x}$ und $(\bar{y}, \bar{z})$ sind genau dann optimal, wenn $\bar{x}_i \bar{z}_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Komplementarität

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

$c^T x - b^T y = z^T x \geq 0$ gilt für bel. primal und dual zul. Lösungen.

Satz (vom komplementären Schlupf)

Primal und dual zulässige Lösungen $\bar{x}$ und $(\bar{y}, \bar{z})$ sind genau dann optimal, wenn $\bar{x}_i \bar{z}_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Eine Ungleichung heißt aktiv in einem Punkt, wenn sie in dem Punkt mit Gleichheit erfüllt ist, sonst nicht aktiv oder inaktiv.

Komplementarität

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

$c^T x - b^T y = z^T x \geq 0$ gilt für bel. primal und dual zul. Lösungen.

Satz (vom komplementären Schlupf)

Primal und dual zulässige Lösungen $\bar{x}$ und $(\bar{y}, \bar{z})$ sind genau dann optimal, wenn $\bar{x}_i \bar{z}_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Eine Ungleichung heißt aktiv in einem Punkt, wenn sie in dem Punkt mit Gleichheit erfüllt ist, sonst nicht aktiv oder inaktiv.

Folgerungen:

- Ist in einer OL eine Variable in x^* oder $z^* > 0$, ist deren duale Ungleichung in jeder OL des jeweiligen dualen aktiv!

Komplementarität

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

$c^T x - b^T y = z^T x \geq 0$ gilt für bel. primal und dual zul. Lösungen.

Satz (vom komplementären Schlupf)

Primal und dual zulässige Lösungen $\bar{x}$ und $(\bar{y}, \bar{z})$ sind genau dann optimal, wenn $\bar{x}_i \bar{z}_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Eine Ungleichung heißt aktiv in einem Punkt, wenn sie in dem Punkt mit Gleichheit erfüllt ist, sonst nicht aktiv oder inaktiv.

Folgerungen:

- Ist in einer OL eine Variable in x^* oder $z^* > 0$, ist deren duale Ungleichung in jeder OL des jeweiligen dualen aktiv!
- Ist in einer OL eine Unglg. des LPs inaktiv, ist deren Dualvariable in jeder OL des jeweiligen dualen gleich Null!

Komplementarität

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

$c^T x - b^T y = z^T x \geq 0$ gilt für bel. primal und dual zul. Lösungen.

Satz (vom komplementären Schlupf)

Primal und dual zulässige Lösungen $\bar{x}$ und $(\bar{y}, \bar{z})$ sind genau dann optimal, wenn $\bar{x}_i \bar{z}_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

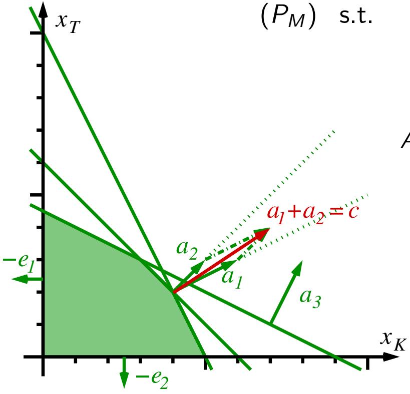
Eine Ungleichung heißt aktiv in einem Punkt, wenn sie in dem Punkt mit Gleichheit erfüllt ist, sonst nicht aktiv oder inaktiv.

Folgerungen:

- Ist in einer OL eine Variable in x^* oder $z^* > 0$, ist deren duale Ungleichung in jeder OL des jeweiligen dualen aktiv!
- Ist in einer OL eine Unglg. des LPs inaktiv, ist deren Dualvariable in jeder OL des jeweiligen dualen gleich Null!

Tatsächlich gibt die Größe der Dualvariablen wesentliche Information über den Einfluss der Unglg. auf den Optimalwert . . .

Geometrische Interpretation der Komplementarität



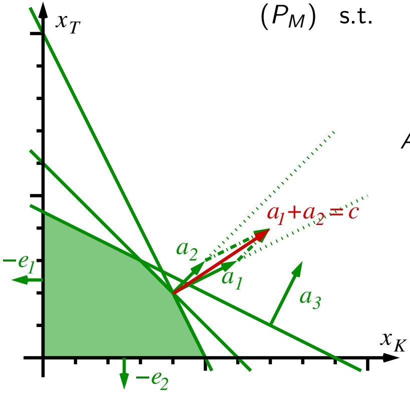
$$(P_M)\quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad (D_M)\quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \ge c \\ & y \ge 0 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Inaktive Ungleichungen können nicht zur besten Schranke beitragen, die aktiven Restr. „halten“ die OL. (Gleichungen sind immer aktiv!)

$y_j \|a_j\|$ (bzw. z_i) ist „Kraftanteil“ von Restriktion i im „Kräftegleichgewicht“.

Geometrische Interpretation der Komplementarität



$$(P_M)\quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D_M)\quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Inaktive Ungleichungen können nicht zur besten Schranke beitragen, die aktiven Restr. „halten“ die OL. (Gleichungen sind immer aktiv!)

$y_j \|a_j\|$ (bzw. z_i) ist „Kraftanteil“ von Restriktion i im „Kräftegleichgewicht“.

„Der Gradient der Zielfunktion liegt im Kegel der Gradienten der aktiven Restriktionen.“

(Die Vorzeichen sind je nach Richtungen anzupassen!)

Sensitivitätsanalyse

Wie sensibel reagiert die OL auf Änderungen in welchen Daten?

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

Wie weit ist b veränderbar bei gleicher optimaler Basis B?

$$x_B^* = A_B^{-1} b \geq 0, \quad y^* = A_B^{-T} c_B, \quad z_N^* = c_N - A_N^T y^* \geq 0$$

Sensitivitätsanalyse

Wie sensibel reagiert die OL auf Änderungen in welchen Daten?

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

Wie weit ist b veränderbar bei gleicher optimaler Basis B?

$$x_B^* = A_B^{-1} b \geq 0, \quad y^* = A_B^{-T} c_B, \quad z_N^* = c_N - A_N^T y^* \geq 0$$

$b(t) := b + t\Delta b$ erhält duale Zul. für $t \in \mathbb{R}$, primale aber nur wenn

$$x_B(t) = x_B^* + t \underbrace{A_B^{-1} \Delta b}_{=:\Delta x_B} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \max_{[\Delta x_B]_i > 0} -\frac{[x_B^*]_i}{[\Delta x_B]_i} \leq t \leq \max_{[\Delta x_B]_i < 0} -\frac{[x_B^*]_i}{[\Delta x_B]_i}$$

Sensitivitätsanalyse

Wie sensibel reagiert die OL auf Änderungen in welchen Daten?

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

Wie weit ist b veränderbar bei gleicher optimaler Basis B?

$$x_B^* = A_B^{-1} b \geq 0, \quad y^* = A_B^{-T} c_B, \quad z_N^* = c_N - A_N^T y^* \geq 0$$

$b(t) := b + t\Delta b$ erhält duale Zul. für $t \in \mathbb{R}$, primale aber nur wenn

$$x_B(t) = x_B^* + t \underbrace{A_B^{-1} \Delta b}_{=:\Delta x_B} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \max_{[\Delta x_B]_i > 0} -\frac{[x_B^*]_i}{[\Delta x_B]_i} \leq t \leq \max_{[\Delta x_B]_i < 0} -\frac{[x_B^*]_i}{[\Delta x_B]_i}$$

Für diese t ist der Optimalwert $= b^T y^* + t\Delta b^T y^*$ (Kompl.!), sonst ist dieser Wert auf jeden Fall eine untere Schranke.

Sensitivitätsanalyse

Wie sensibel reagiert die OL auf Änderungen in welchen Daten?

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + z = c \\ & y \in \mathbb{R}^m, z \geq 0 \end{array}$$

Wie weit ist b veränderbar bei gleicher optimaler Basis B?

$$x_B^* = A_B^{-1} b \geq 0, \quad y^* = A_B^{-T} c_B, \quad z_N^* = c_N - A_N^T y^* \geq 0$$

$b(t) := b + t\Delta b$ erhält duale Zul. für $t \in \mathbb{R}$, primale aber nur wenn

$$x_B(t) = x_B^* + t \underbrace{A_B^{-1} \Delta b}_{=:\Delta x_B} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \max_{[\Delta x_B]_i > 0} -\frac{[x_B^*]_i}{[\Delta x_B]_i} \leq t \leq \max_{[\Delta x_B]_i < 0} -\frac{[x_B^*]_i}{[\Delta x_B]_i}$$

Für diese t ist der Optimalwert $= b^T y^* + t\Delta b^T y^*$ (Kompl.!), sonst ist dieser Wert auf jeden Fall eine untere Schranke.

Für $\Delta b = e_j$ beziffert y_j^* die marginalen Kosten der Veränderung, $\rightarrow$ bei Ressourcennebenbed. heißen die y_j^* oft Schattenpreise.

Sensitivitätsanalyse für die Kostenkoeffizienten

Wie weit ist c veränderbar bei gleicher optimaler Basis B?

$$x_B^* = A_B^{-1} b \geq 0, \quad y^* = A_B^{-T} c_B, \quad z_N^* = c_N - A_N^T y^* \geq 0$$

$c(t) := c + t\Delta c$ erhält primale Zul. für $t \in \mathbb{R}$, duale aber nur wenn

$$z_N(t) = z_N^* + t \underbrace{(\Delta c_N - A_N^T A_B^{-T} \Delta c_B)}_{=:\Delta z_N} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \max_{[\Delta z_N]_i > 0} -\frac{[z_N^*]_i}{[\Delta z_N]_i} \leq t \leq \max_{[\Delta z_N]_i < 0} -\frac{[z_N^*]_i}{[\Delta z_N]_i}$$

Für diese t ist der Optimalwert $= c^T x^* + t\Delta c^T x^*$ (Kompl.), sonst ist dieser Wert eine obere Schranke.

Inhaltsübersicht für heute:

Spaltengenerierung

Was tun, wenn es zu viele Variablen gibt um das LP aufzustellen?

Das Simpex-Verfahren benötigt je Iteration nur die Basis-Variablen ($x_N = 0!$), solange eine verbessernde Nichtbasis-Spalte in PRICE erzeugt werden kann. Das nutzt die Spaltengenerierung.

Spaltengenerierung

Was tun, wenn es zu viele Variablen gibt um das LP aufzustellen?

Das Simpex-Verfahren benötigt je Iteration nur die Basis-Variablen ($x_N = 0!$), solange eine verbessernde Nichtbasis-Spalte in PRICE erzeugt werden kann. Das nutzt die Spaltengenerierung.

Am Beispiel:

Zuschnittproblem: Aus möglichst wenigen Metern von Standardblechrollen der Breite ($b_0 = 1000$mm) sollen kleinere Breiten b_j (in mm) mit Gesamtlänge h_j, $j = 1, \ldots, m$ geschnitten werden.

Modellierung des Zuschnittproblems

Daten: Länge h_j der Breite $b_j \in \mathbb{N}$ ($j = 1, \dots, m$) aus Breite b_0
Modell: Schnittmuster $s \in \mathbb{N}_0^m$ enthält die Breite b_j genau s_j mal.

Menge der zul. Schnittmuster: $S = \left\{ s \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{j=0}^m s_j b_j \le b_0 \right\}$

Modellierung des Zuschnittproblems

Daten: Länge h_j der Breite $b_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1, \ldots, m)$ aus Breite b_0
Modell: Schnittmuster $s \in \mathbb{N}_0^m$ enthält die Breite b_j genau s_j mal.

Menge der zul. Schnittmuster: $S = \left\{ s \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{j=0}^m s_j b_j \leq b_0 \right\}$

Variable x_s gibt die Länge an, mit der $s \in S$ geschnitten wird.
$[s x_s]_j$ ist der Beitrag von Schnittmuster s zum Bedarf l_j.

Modellierung des Zuschnittproblems

Daten: Länge h_j der Breite $b_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1, \ldots, m)$ aus Breite b_0
Modell: Schnittmuster $s \in \mathbb{N}_0^m$ enthält die Breite b_j genau s_j mal.

Menge der zul. Schnittmuster: $S = \left\{ s \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{j=0}^m s_j b_j \le b_0 \right\}$

Variable x_s gibt die Länge an, mit der $s \in S$ geschnitten wird.
$[s x_s]_j$ ist der Beitrag von Schnittmuster s zum Bedarf l_j.

$$
(P_S) \quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{s \in S} x_s \\ \text{s.t.} & \sum_{s \in S} s x_s \ge h \\ & x \ge 0 \end{array}
\qquad\qquad
(D_S) \quad \begin{array}{lll} \max & h^T y & \\ \text{s.t.} & s^T y \le 1 & s \in S \\ & y \ge 0 & \end{array}
$$

sucht die minimal notwendige Gesamtlänge um alle l_j zu erfüllen.
Schwierigkeit: $|S|$ ist riesig!

Modellierung des Zuschnittproblems

Daten: Länge h_j der Breite $b_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1, \ldots, m)$ aus Breite b_0
Modell: Schnittmuster $s \in \mathbb{N}_0^m$ enthält die Breite b_j genau s_j mal.

Menge der zul. Schnittmuster: $S = \left\{ s \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{j=0}^m s_j b_j \leq b_0 \right\}$

Variable x_s gibt die Länge an, mit der $s \in S$ geschnitten wird.
$[sx_s]_j$ ist der Beitrag von Schnittmuster s zum Bedarf l_j.

$$(P_S) \quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{s \in S} x_s \\ \text{s.t.} & \sum_{s \in S} s x_s \geq h \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D_S) \quad \begin{array}{lll} \max & h^T y & \\ \text{s.t.} & s^T y \leq 1 & s \in S \\ & y \geq 0 & \end{array}$$

sucht die minimal notwendige Gesamtlänge um alle l_j zu erfüllen.
Schwierigkeit: $|S|$ ist riesig!
Idee: Starte mit $\hat{S} = \{e_j : j = 1, \ldots, m\}$, löse $(P_{\hat{S}}) \to \hat{y}^*$,
bestimme, wie in PRICE, $s \in S$ mit kleinsten red. Kosten
$\underbrace{\bar{s} \in Argmin_{s \in S} \hat{z}_s}_{\text{Pricingproblem}} := 1 - s^T \hat{y}^* \to$ setze $\hat{S} := \hat{S} \cup \{\bar{s}\}$, iteriere.

Das Pricingproblem des Zuschnittproblems

Für $\hat{y} \geq 0$, $b_j \in \mathbb{N}$ $(j = 0, \ldots, m)$, bestimme $\bar{s} \in \operatorname{Argmin}_{s \in S}\{1 - s^T \hat{y}\}$

$$\max \ \hat{y}^T s \quad \text{s.t.} \quad b^T s \leq b_0, \ s \in \mathbb{N}_0^m$$

Dieses ganzzahlige Optimierungsproblem heißt Rucksackproblem.

Das Pricingproblem des Zuschnittproblems

Für $\hat{y} \geq 0$, $b_j \in \mathbb{N}$ $(j = 0, \ldots, m)$, bestimme $\bar{s} \in \operatorname{Argmin}_{s \in S}\{1 - s^T \hat{y}\}$

$$\max \ \hat{y}^T s \quad \text{s.t.} \quad b^T s \leq b_0, \ s \in \mathbb{N}_0^m$$

Dieses ganzzahlige Optimierungsproblem heißt Rucksackproblem.

Falls b_0 nicht zu groß, gut rekursiv lösbar (dynamic programming).
Die beste Füllung bis Kapazität $\bar{b}$ mit Objekten $1, \ldots, \bar{k}$ hat den Wert

$$F(\bar{b}, \bar{k}) := \max \left\{ \sum_{j=1}^{\bar{k}} \hat{y}_j s_j : \sum_{j=1}^{\bar{k}} b_j s_j \leq \bar{b}, s_j \in \mathbb{N}_0 \right\} \text{ für } \begin{array}{l} \bar{b} = 0, \ldots, b_0, \\ \bar{k} = 0, \ldots, m, \end{array}$$

wobei $F(0,0) := 0$ und $F(\bar{b}, \bar{k}) := -\infty$ für $(-\bar{b}) \in \mathbb{N}$, $\bar{k} = 0, \ldots, m$.

Das Pricingproblem des Zuschnittproblems

Für $\hat{y} \geq 0$, $b_j \in \mathbb{N}$ ($j = 0, \ldots, m$), bestimme $\bar{s} \in \operatorname{Argmin}_{s \in S}\{1 - s^T \hat{y}\}$

$$\max \ \hat{y}^T s \quad \text{s.t.} \quad b^T s \leq b_0, \ s \in \mathbb{N}_0^m$$

Dieses ganzzahlige Optimierungsproblem heißt Rucksackproblem.

Falls b_0 nicht zu groß, gut rekursiv lösbar (dynamic programming).
Die beste Füllung bis Kapazität $\bar{b}$ mit Objekten $1, \ldots, \bar{k}$ hat den Wert

$$F(\bar{b}, \bar{k}) := \max \left\{ \sum_{j=1}^{\bar{k}} \hat{y}_j s_j : \sum_{j=1}^{\bar{k}} b_j s_j \leq \bar{b}, s_j \in \mathbb{N}_0 \right\} \text{ für } \begin{array}{l} \bar{b} = 0, \ldots, b_0, \\ \bar{k} = 0, \ldots, m, \end{array}$$

wobei $F(0,0) := 0$ und $F(\bar{b}, \bar{k}) := -\infty$ für $(-\bar{b}) \in \mathbb{N}$, $\bar{k} = 0, \ldots, m$.
Nun gilt

$$F(\bar{b}, \bar{k}) = \max \left\{ F(\bar{b}, \bar{k} - 1), F(\bar{b} - b_{\bar{k}}, \bar{k}) + \hat{y}_{\bar{k}} \right\} \text{ für } \begin{array}{l} \bar{b} = 1, \ldots, b_0, \\ \bar{k} = 1, \ldots, m. \end{array}$$

(Entweder $\bar{k}$ nicht verwenden oder $\bar{k}$ einmal verwenden und Rest bestmöglich füllen)

Beispiel Rucksackproblem

$b_0 = 10,\ b_1 = 3,\ b_2 = 5,\ b_3 = 6,\ \hat{y}_1 = 2,\ \hat{y}_2 = 4,\ \hat{y}_3 = 5$

$$F(\bar{b}, \bar{k}) = \max\left\{F(\bar{b}, \bar{k}-1), F(\bar{b}-b_{\bar{k}}, \bar{k}) + \hat{y}_{\bar{k}}\right\} \text{ für } \begin{array}{l} \bar{b} = 1, \ldots, b_0, \\ \bar{k} = 1, \ldots, m. \end{array}$$

$\bar{b}$	$F(\bar{b}, 0)$	$F(\bar{b}, 1)$	$F(\bar{b}, 2)$	$F(\bar{b}, 3)$
10	0	6(1)	8 (2)	8 (2)
9	0	6(1)	6 (1)	7 (3)
8	0	4(1)	6 (2)	6 (2)
7	0	4(1)	4 (1)	5 (3)
6	0	4(1)	4 (1)	5 (3)
5	0	2(1)	4 (2)	4 (2)
4	0	2(1)	2 (1)	2 (1)
3	0	2(1)	2 (1)	2 (1)
2	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
-1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Rekonstruktion der Lösung durch Objektindices.

Zusammenfassung Spaltengenerierung Zuschnittproblem

Daten: Länge h_j der Breite b_j ($j = 1, \ldots, m$) aus Breite b_0

0. Schritt: $\hat{S} = \{e_j : j = 1, \ldots, m\}$ (pro j: Breite j einmal)

1. Schritt Ermittle OLen $\hat{x}^*$, $\hat{y}^*$ von

$$(P_{\hat{S}}) \quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{s \in \hat{S}} x_s \\ \text{s.t.} & \sum_{s \in \hat{S}} s x_s \geq h \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D_{\hat{S}}) \quad \begin{array}{lll} \max & h^T y & \\ \text{s.t.} & s^T y \leq 1 & s \in \hat{S} \\ & y \geq 0 & \end{array}$$

2. Schritt: Löse das Pricingprobelm als Rucksack

$$\max\ (\hat{y}^*)^T s \quad \text{s.t.} \quad b^T s \leq b_0,\ s \in \mathbb{N}_0^m \qquad \to \bar{s}$$

3. Schritt: Ist $1 - \bar{s}^T \hat{y}^* \geq 0$ (oder beinahe) STOP (gut genug)
sonst $\hat{S} := \hat{S} \cup \{\bar{s}\}$, GOTO 1.
(auch Entfernen ungebrauchter Muster möglich)

Zusammenfassung Spaltengenerierung Zuschnittproblem

Daten: Länge h_j der Breite b_j ($j = 1, \dots, m$) aus Breite b_0

0. Schritt: $\hat{S} = \{e_j : j = 1, \dots, m\}$ (pro j: Breite j einmal)

1. Schritt Ermittle OLen $\hat{x}^*$, $\hat{y}^*$ von

$$(P_{\hat{S}}) \quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{s \in \hat{S}} x_s \\ \text{s.t.} & \sum_{s \in \hat{S}} s x_s \geq h \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D_{\hat{S}}) \quad \begin{array}{lll} \max & h^T y & \\ \text{s.t.} & s^T y \leq 1 & s \in \hat{S} \\ & y \geq 0 & \end{array}$$

2. Schritt: Löse das Pricingprobelm als Rucksack

$$\max\ (\hat{y}^*)^T s \quad \text{s.t.} \quad b^T s \leq b_0,\ s \in \mathbb{N}_0^m \qquad \to \bar{s}$$

3. Schritt: Ist $1 - \bar{s}^T \hat{y}^* \geq 0$ (oder beinahe) STOP (gut genug)

sonst $\hat{S} := \hat{S} \cup \{\bar{s}\}$, GOTO 1.

(auch Entfernen ungebrauchter Muster möglich)

Bemerkungen zur Praxis:

- Anfangsmenge $\hat{S}$ muss Zul. und endl. OL garantieren
- Verwendet m verschiedene Schnittmuster (# Basisvar.), oft zuviel
- Längen $\hat{x}_S$ nicht ganzzahlig, oft wenige lange, einige sehr kurze
- Anfangs gute Verbesserung, dann SEHR langsam (tailing off effect)

Inhaltsübersicht für heute:

Schnittebenenverfahren

Gleiche Idee, wenn es zu viele Ungleichungen $a_j^T x \geq b_j$, $j \in \mathcal{I}$ gibt:

0. Schritt: Wähle $\hat{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}$, die endliche OL garantiert
1. Schritt Ermittle OLen $\hat{x}^*$, $\hat{y}^*$ von

$$(P_{\hat{\mathcal{I}}}) \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & a_j^T x \geq b_j \quad j \in \hat{\mathcal{I}} \end{array} \qquad (D_{\hat{\mathcal{I}}}) \begin{array}{ll} \max & \sum_{j \in \hat{\mathcal{I}}} b_j y_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j \in \hat{\mathcal{I}}} a_j y_j \leq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

2. Schritt: Löse das Separierungsproblem: Finde eine (maximal) verletzte Ungleichung $\bar{\jmath} \in \operatorname{Argmax}_{j \in \mathcal{I}} \{b_j - a_j^T \hat{x}^*\}$
3. Schritt: Ist $b_{\bar{\jmath}} - a_{\bar{\jmath}}^T \hat{x}^* \leq 0$ (oder beinahe) STOP (gut genug) sonst $\hat{\mathcal{I}} := \hat{\mathcal{I}} \cup \{\bar{\jmath}\}$, GOTO 1.
(auch Entfernen inaktiver Ungleichungen möglich)

Schnittebenenverfahren

Gleiche Idee, wenn es zu viele Ungleichungen $a_j^T x \geq b_j$, $j \in \mathcal{I}$ gibt:

0. Schritt: Wähle $\hat{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}$, die endliche OL garantiert

1. Schritt Ermittle OLen $\hat{x}^*$, $\hat{y}^*$ von

$$(P_{\hat{\mathcal{I}}}) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & a_j^T x \geq b_j \quad j \in \hat{\mathcal{I}} \end{array} \qquad (D_{\hat{\mathcal{I}}}) \quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{j \in \hat{\mathcal{I}}} b_j y_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j \in \hat{\mathcal{I}}} a_j y_j \leq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

2. Schritt: Löse das Separierungsproblem: Finde eine (maximal) verletzte Ungleichung $\bar{\jmath} \in \operatorname{Argmax}_{j \in \mathcal{I}} \{b_j - a_j^T \hat{x}^*\}$

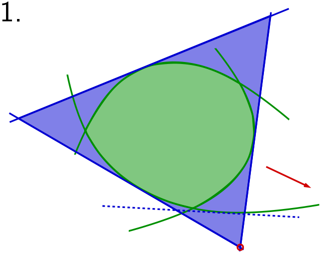
3. Schritt: Ist $b_j - a_j^T \hat{x}^* \leq 0$ (oder beinahe) STOP (gut genug) sonst $\hat{\mathcal{I}} := \hat{\mathcal{I}} \cup \{\bar{\jmath}\}$, GOTO 1.
(auch Entfernen inaktiver Ungleichungen möglich)

Bemerkungen:

- Schnittebenenvefahren = Spaltengenerierung im Dualen
- gute Erfolge in kombinatorischer/ganzz. Optimierung
- Linearisierung konvexer Nebenbedingungen (oft gibt es besseres!)
- Je nach separierter Unglg.-Klasse starker tailing off effect

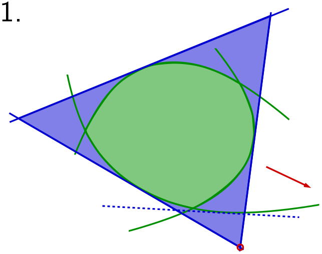
Konvexe Nebenbedindungen mit Schnittebenen

1.

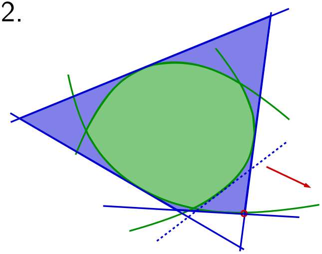


Konvexe Nebenbedindungen mit Schnittebenen

1.

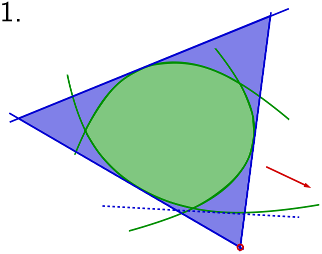


2.

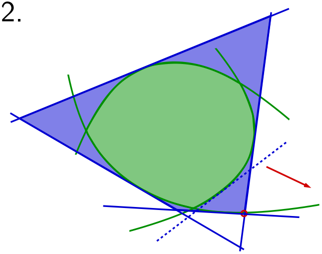


Konvexe Nebenbedindungen mit Schnittebenen

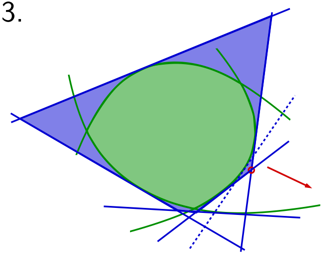
1.



2.

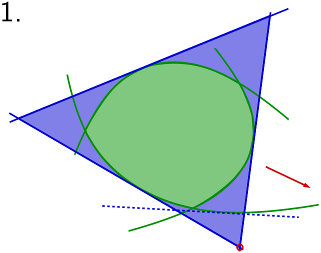


3.

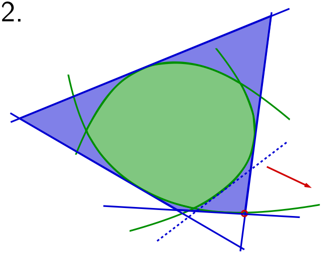


Konvexe Nebenbedindungen mit Schnittebenen

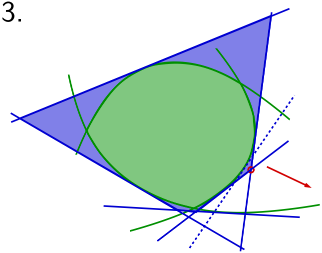
1.



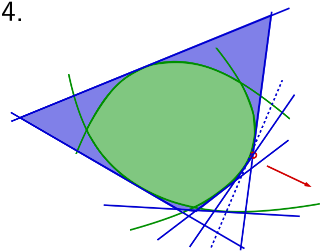
2.



3.



4.



Problem: Schleifende Schnitte numerisch ungünstig, ungenau

Inhaltsübersicht für heute:

Wann den primalen, wann den dualen Simplex verwenden?

Für ein festes LP:

Für viele LPs aus der Praxis scheint der duale Simplex etwas schneller zu sein (vermutlich weil viele LPs nach ähnlichen Denkmustern erstellt werden).

Innere-Punkte-Verfahren (s. später) sind bei großen Instanzen oft schneller und weniger anfällig bzgl. Degeneriertheit, aber ein Test lohnt sich.

Wann den primalen, wann den dualen Simplex verwenden?

Für ein festes LP:

Für viele LPs aus der Praxis scheint der duale Simplex etwas schneller zu sein (vermutlich weil viele LPs nach ähnlichen Denkmustern erstellt werden).
Innere-Punkte-Verfahren (s. später) sind bei großen Instanzen oft schneller und weniger anfällig bzgl. Degeneriertheit, aber ein Test lohnt sich.

Spaltengenerierung: Nach Einfügen von Variablen bleibt die primale Basis zulässig (die alte Duale Lösung nicht), also setzt man mit dem primalen Simplex direkt fort!
(Innere-Punkte-Verfahren sind dafür ungeeignet)

Wann den primalen, wann den dualen Simplex verwenden?

Für ein festes LP:
Für viele LPs aus der Praxis scheint der duale Simplex etwas schneller zu sein (vermutlich weil viele LPs nach ähnlichen Denkmustern erstellt werden).
Innere-Punkte-Verfahren (s. später) sind bei großen Instanzen oft schneller und weniger anfällig bzgl. Degeneriertheit, aber ein Test lohnt sich.

Spaltengenerierung: Nach Einfügen von Variablen bleibt die primale Basis zulässig (die alte Duale Lösung nicht), also setzt man mit dem primalen Simplex direkt fort!
(Innere-Punkte-Verfahren sind dafür ungeeignet)

Schnittebenen-Verfahren:
Nach Einfügen einer Schnittebene bleibt die duale Basis zulässig (die alte primale Lösung nicht), also setzt man mit dem dualen Simplex direkt fort!
(Innere-Punkte-Verfahren sind dafür ungeeignet)