Inhaltsübersicht für heute:

Quadratische Optimierung

Konvexe quadratische Optimierung

Gleichungsbeschränkte Quadratische Optimierung

Aktive-Mengen-Verfahren für Quadratische Optimierung

Inhaltsübersicht für heute:

Quadratische Optimierung (Quadratic Programming)

QPs sind die typischen Unterprobleme der restringierten Optimierung (wie das quadratische Modell in der freien Optimierung)

$$\left.\begin{array}{lllll} \min & f(x) := \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x & & & \\ \text{s.t.} & b_i - h_i^T x = 0 & i \in \mathcal{E} & [h_i \in \mathbb{R}^n] & \\ & b_i - g_i^T x \leq 0 & i \in \mathcal{I} & [g_i \in \mathbb{R}^n] & \\ & x \in \mathbb{R}^n & & & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} b_i - h_i^T x = 0 \\ b_i - g_i^T x \leq 0 \end{array}\right\} \to Ax \geq b$$

Allgemeine quadratische Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.
$\Rightarrow$ Lagrange-Multiplikatoren existieren für jedes lokale Minimum.

Quadratische Optimierung (Quadratic Programming)

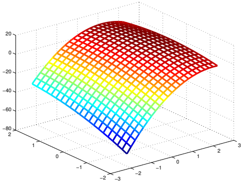
QPs sind die typischen Unterprobleme der restringierten Optimierung (wie das quadratische Modell in der freien Optimierung)

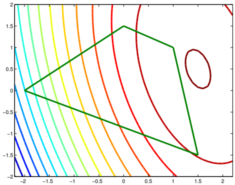
$$\left.\begin{array}{lllll} \min & f(x) := \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x & & & \\ \text{s.t.} & b_i - h_i^T x = 0 & i \in \mathcal{E} & [h_i \in \mathbb{R}^n] \\ & b_i - g_i^T x \leq 0 & i \in \mathcal{I} & [g_i \in \mathbb{R}^n] \\ & x \in \mathbb{R}^n & & \end{array}\right\} \to Ax \geq b$$

Allgemeine quadratische Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.
$\Rightarrow$ Lagrange-Multiplikatoren existieren für jedes lokale Minimum.

Einige typische Fälle:

$f(\cdot)$ konkav ($Q \prec 0$):
Alle OL werden in Ecken (bzw. auf minimalen Seiten) angenommen.





Quadratische Optimierung (Quadratic Programming)

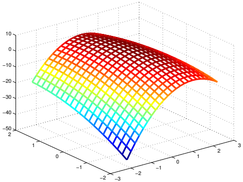
QPs sind die typischen Unterprobleme der restringierten Optimierung (wie das quadratische Modell in der freien Optimierung)

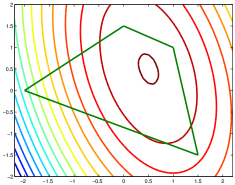
$$\begin{array}{lllll} \min & f(x) := \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx & & & \\ \text{s.t.} & b_i - h_i^T x = 0 & i \in \mathcal{E} & [h_i \in \mathbb{R}^n] & \left.\right\} \to Ax \geq b \\ & b_i - g_i^T x \leq 0 & i \in \mathcal{I} & [g_i \in \mathbb{R}^n] & \\ & x \in \mathbb{R}^n & & & \end{array}$$

Allgemeine quadratische Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.
$\Rightarrow$ Lagrange-Multiplikatoren existieren für jedes lokale Minimum.

Einige typische Fälle:

$f(\cdot)$ konkav ($Q \prec 0$):
Alle OL werden in Ecken (bzw. auf minimalen Seiten) angenommen.





Quadratische Optimierung (Quadratic Programming)

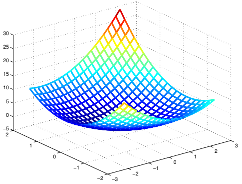
QPs sind die typischen Unterprobleme der restringierten Optimierung (wie das quadratische Modell in der freien Optimierung)

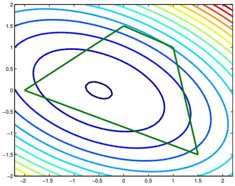
$$
\begin{array}{lll}
\min & f(x) := \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x & \\
\text{s.t.} & \left.\begin{array}{lll} b_i - h_i^T x = 0 & i \in \mathcal{E} & [h_i \in \mathbb{R}^n] \\ b_i - g_i^T x \le 0 & i \in \mathcal{I} & [g_i \in \mathbb{R}^n] \end{array}\right\} \to Ax \ge b & \\
 & x \in \mathbb{R}^n &
\end{array}
$$

Allgemeine quadratische Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.
⇒ Lagrange-Multiplikatoren existieren für jedes lokale Minimum.

Einige typische Fälle:

$f(\cdot)$ konvex ($Q \succ 0$):
OL in der Mitte, oder





Quadratische Optimierung (Quadratic Programming)

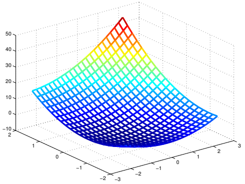
QPs sind die typischen Unterprobleme der restringierten Optimierung (wie das quadratische Modell in der freien Optimierung)

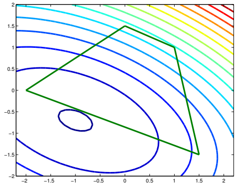
$$
\left.\begin{array}{lll}
\min & f(x) := \frac{1}{2} x^T Q x + q^T x & \\
\text{s.t.} & b_i - h_i^T x = 0 \qquad i \in \mathcal{E} & [h_i \in \mathbb{R}^n] \\
 & b_i - g_i^T x \leq 0 \qquad i \in \mathcal{I} & [g_i \in \mathbb{R}^n] \\
 & x \in \mathbb{R}^n &
\end{array}\right\} \rightarrow Ax \geq b
$$

Allgemeine quadratische Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.
$\Rightarrow$ Lagrange-Multiplikatoren existieren für jedes lokale Minimum.

Einige typische Fälle:

$f(\cdot)$ konvex ($Q \succ 0$):
OL auf einer Seite, oder





Quadratische Optimierung (Quadratic Programming)

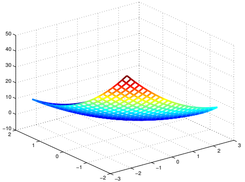
QPs sind die typischen Unterprobleme der restringierten Optimierung (wie das quadratische Modell in der freien Optimierung)

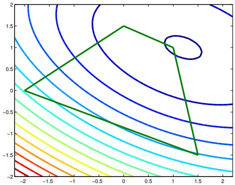
$$
\begin{array}{lll}
\min & f(x) := \frac{1}{2} x^T Q x + q^T x & \\
\text{s.t.} & b_i - h_i^T x = 0 \qquad i \in \mathcal{E} \qquad [h_i \in \mathbb{R}^n] & \left.\right\} \\
 & b_i - g_i^T x \leq 0 \qquad i \in \mathcal{I} \qquad [g_i \in \mathbb{R}^n] & \left.\right\} \rightarrow Ax \geq b \\
 & x \in \mathbb{R}^n &
\end{array}
$$

Allgemeine quadratische Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.
$\Rightarrow$ Lagrange-Multiplikatoren existieren für jedes lokale Minimum.

Einige typische Fälle:

$f(\cdot)$ konvex ($Q \succ 0$):
OL in einer Ecke





Quadratische Optimierung (Quadratic Programming)

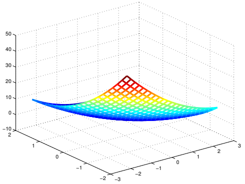
QPs sind die typischen Unterprobleme der restringierten Optimierung (wie das quadratische Modell in der freien Optimierung)

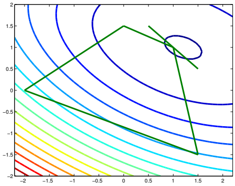
$$
\begin{array}{lllll}
\min & f(x) := \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x & & & \\
\text{s.t.} & b_i - h_i^T x = 0 & i \in \mathcal{E} & [h_i \in \mathbb{R}^n] & \multirow{2}{*}{$\Big\} \to Ax \geq b$} \\
 & b_i - g_i^T x \leq 0 & i \in \mathcal{I} & [g_i \in \mathbb{R}^n] & \\
 & x \in \mathbb{R}^n & & &
\end{array}
$$

Allgemeine quadratische Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.
$\Rightarrow$ Lagrange-Multiplikatoren existieren für jedes lokale Minimum.

Einige typische Fälle:

degenerierte Lösung: aktive Nebenbedingungen sind linear abhängig, oder





Quadratische Optimierung (Quadratic Programming)

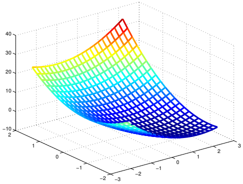
QPs sind die typischen Unterprobleme der restringierten Optimierung (wie das quadratische Modell in der freien Optimierung)

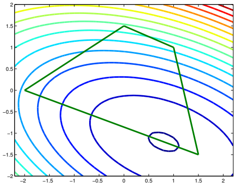
$$
\left.
\begin{array}{lllll}
\min & f(x) := \frac{1}{2} x^T Q x + q^T x & & & \\
\text{s.t.} & b_i - h_i^T x = 0 & i \in \mathcal{E} & [h_i \in \mathbb{R}^n] & \\
 & b_i - g_i^T x \le 0 & i \in \mathcal{I} & [g_i \in \mathbb{R}^n] & \\
 & x \in \mathbb{R}^n & & &
\end{array}
\right.
\quad
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \rightarrow Ax \ge b
$$

Allgemeine quadratische Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen.
$\Rightarrow$ Lagrange-Multiplikatoren existieren für jedes lokale Minimum.

Einige typische Fälle:

degenerierte Lösung: aktive Nebenbedingungen sind linear abhängig, oder die unrestringierte OL liegt auf einer Seite





Inhaltsübersicht für heute:

Konvexe quadratische Optimierung

Für $Q \succeq 0$ ist das QP ein konvexes Optimierungsproblem und es gibt ein konvexes Lagrange-Duales.

Herleitung für

$$\text{(PQP)} \quad \min \ \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \ \text{ s.t. } \ Ax \geq b$$

Konvexe quadratische Optimierung

Für $Q \succeq 0$ ist das QP ein konvexes Optimierungsproblem und es gibt ein konvexes Lagrange-Duales.

Herleitung für

$$\text{(PQP)} \quad \min \ \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \ \text{ s.t. } \ Ax \geq b$$

Lagrange-Funktion: $\mathcal{L}(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x + \lambda^T(b - Ax)$, $(\lambda \geq 0)$

primales Problem: $\inf_x \sup_{\lambda \geq 0} \mathcal{L}(x, \lambda)$ [Für x^*: $\exists\ \lambda^*$ mit $(b - Ax^*)^T \lambda^* = 0$]

Konvexe quadratische Optimierung

Für $Q \succeq 0$ ist das QP ein konvexes Optimierungsproblem und es gibt ein konvexes Lagrange-Duales.

Herleitung für

$$\text{(PQP)} \quad \min\ \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \ \text{ s.t. } \ Ax \geq b$$

Lagrange-Funktion: $\mathcal{L}(x,\lambda) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x + \lambda^T(b - Ax)$, $(\lambda \geq 0)$

primales Problem: $\inf_x \sup_{\lambda \geq 0} \mathcal{L}(x,\lambda)$ [Für x^*: $\exists\ \lambda^*$ mit $(b-Ax^*)^T\lambda^* = 0$]

duales Problem: $\sup\limits_{\lambda \geq 0} \inf\limits_x \mathcal{L}(x,\lambda) = \sup\limits_{\lambda \geq 0} \left(b^T\lambda + \underbrace{\inf_x [\frac{1}{2}x^T Qx + (q - A^T\lambda)^T x]}_{\nabla_x = 0 \ \Rightarrow\ Qx + q - A^T\lambda = 0,\ \text{sonst } -\infty} \right)$

Konvexe quadratische Optimierung

Für $Q \succeq 0$ ist das QP ein konvexes Optimierungsproblem und es gibt ein konvexes Lagrange-Duales.

Herleitung für

$$\text{(PQP)} \quad \min \ \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx \ \text{ s.t. } \ Ax \geq b$$

Lagrange-Funktion: $\mathcal{L}(x,\lambda) = \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx + \lambda^T(b - Ax)$, $(\lambda \geq 0)$

primales Problem: $\inf_x \sup_{\lambda \geq 0} \mathcal{L}(x,\lambda)$ [Für x^*: $\exists\ \lambda^*$ mit $(b - Ax^*)^T\lambda^* = 0$]

duales Problem: $\sup\limits_{\lambda \geq 0} \inf\limits_x \mathcal{L}(x,\lambda) = \sup\limits_{\lambda \geq 0} \left(b^T\lambda + \underbrace{\inf_x [\frac{1}{2}x^TQx + (q - A^T\lambda)^Tx]}_{\nabla_x = 0 \ \Rightarrow \ Qx + q - A^T\lambda = 0, \text{ sonst } -\infty}\right)$

I.A. enthält das duale QP auch noch x-Variable(!):

$$\text{(DQP)} \quad \begin{array}{ll} \max & \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx + (b - Ax)^T\lambda \\ \text{s.t.} & Qx + q - A^T\lambda = 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n, \lambda \geq 0 \end{array}$$

[erfüllt starke Dualität!]

Konvexe quadratische Optimierung

Für $Q \succeq 0$ ist das QP ein konvexes Optimierungsproblem und es gibt ein konvexes Lagrange-Duales.

Herleitung für

$$\text{(PQP)} \quad \min \ \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx \ \text{ s.t. } \ Ax \geq b$$

Lagrange-Funktion: $\mathcal{L}(x,\lambda) = \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx + \lambda^T(b - Ax)$, $(\lambda \geq 0)$

primales Problem: $\inf_x \sup_{\lambda\geq 0} \mathcal{L}(x,\lambda)$ [Für x^*: $\exists\ \lambda^*$ mit $(b - Ax^*)^T\lambda^* = 0$]

duales Problem: $\sup\limits_{\lambda\geq 0} \inf\limits_{x} \mathcal{L}(x,\lambda) = \sup\limits_{\lambda\geq 0} \left(b^T\lambda + \underbrace{\inf_x [\frac{1}{2}x^TQx + (q - A^T\lambda)^Tx]}_{\nabla_x = 0 \ \Rightarrow\ Qx + q - A^T\lambda = 0,\ \text{sonst } -\infty}\right)$

I.A. enthält das duale QP auch noch x-Variable(!):

$$\text{(DQP)} \quad \begin{array}{ll} \max & \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx + (b - Ax)^T\lambda \\ \text{s.t.} & Qx + q - A^T\lambda = 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n, \lambda \geq 0 \end{array}$$

[erfüllt starke Dualität!]

Für $Q \succ 0$ ist x eindeutig bestimmt: $x(\lambda) = Q^{-1}(A^T\lambda - q)$,

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & -\frac{1}{2}\lambda^T(AQ^{-1}A^T)\lambda + (b + AQ^{-1}q)^T\lambda - \frac{1}{2}q^TQ^{-1}q \\ \text{s.t.} & \lambda \geq 0 \end{array}$$

Nur Vorzeichenbedingungen! Oft besonders effizient lösbar $\rightarrow \lambda^*$, $x^* = x(\lambda^*)$

Für konvexe QPs sind, wie bei LPs, Innere-Punkte-Verfahren besonders effizient.

Bsp: Ansatz für primal-duales Pfadverfolgungsverf., $A = [a_1, \ldots, a_m]^T$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \end{array} \quad \longrightarrow \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x - \gamma \sum \log(a_i^T x - b_i)$$

Für konvexe QPs sind, wie bei LPs, Innere-Punkte-Verfahren besonders effizient.

Bsp: Ansatz für primal-duales Pfadverfolgungsverf., $A = [a_1, \ldots, a_m]^T$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \end{array} \quad \rightarrow \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x - \gamma \sum \log(a_i^T x - b_i)$$

Stationarität des Barriere-Unterproblems für $\gamma > 0$ ($\nabla_x = 0$):

$$Qx + q - \gamma \sum a_i \frac{1}{a_i^T x - b_i} = 0$$

Für konvexe QPs sind, wie bei LPs, Innere-Punkte-Verfahren besonders effizient.

Bsp: Ansatz für primal-duales Pfadverfolgungsverf., $A = [a_1, \ldots, a_m]^T$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \end{array} \quad \rightarrow \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x - \gamma \sum \log(a_i^T x - b_i)$$

Stationarität des Barriere-Unterproblems für $\gamma > 0$ ($\nabla_x = 0$):

$$Qx + q - \gamma \sum a_i \frac{1}{a_i^T x - b_i} = 0$$

Führt man Schlupfvariablen $s_i := a_i^T x - b_i \geq 0$
und Dualvariablen (Lagrange-Multiplikatoren) $\lambda_i := \gamma \frac{1}{s_i}$
ein, erhält man ein primal-duales KKT-System:

$$\begin{array}{rcll} Qx + q - A^T\lambda & = & 0 & \text{„duale Zulässigkeit"} \\ Ax - s & = & b & \text{„primale Zulässigkeit"} \\ s \circ \lambda & = & \gamma \mathbf{1} & \text{„perturb. Kompl."} \end{array}$$

Für konvexe QPs sind, wie bei LPs, Innere-Punkte-Verfahren besonders effizient.

Bsp: Ansatz für primal-duales Pfadverfolgungsverf., $A = [a_1, \dots, a_m]^T$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \end{array} \quad \rightarrow \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x - \gamma \sum \log(a_i^T x - b_i)$$

Stationarität des Barriere-Unterproblems für $\gamma > 0$ ($\nabla_x = 0$):

$$Qx + q - \gamma \sum a_i \frac{1}{a_i^T x - b_i} = 0$$

Führt man Schlupfvariablen $s_i := a_i^T x - b_i \geq 0$
und Dualvariablen (Lagrange-Multiplikatoren) $\lambda_i := \gamma \frac{1}{s_i}$
ein, erhält man ein primal-duales KKT-System:

$$\begin{array}{rcll} Qx + q - A^T\lambda & = & 0 & \text{„duale Zulässigkeit“} \\ Ax - s & = & b & \text{„primale Zulässigkeit“} \\ s \circ \lambda & = & \gamma\mathbf{1} & \text{„perturb. Kompl.“} \end{array}$$

Starte mit $s, \lambda > 0$, löse das System näherungsweise mit Newton, bewahre Positivität durch Line-Search, verkleinere γ, etc.
(wie in LP, ε-OL in gleicher polynomialer Anzahl an Iterationen).

Für konvexe QPs sind, wie bei LPs, Innere-Punkte-Verfahren besonders effizient.

Bsp: Ansatz für primal-duales Pfadverfolgungsverf., $A = [a_1, \dots, a_m]^T$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \end{array} \quad \rightarrow \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x - \gamma \sum \log(a_i^T x - b_i)$$

Stationarität des Barriere-Unterproblems für $\gamma > 0$ ($\nabla_x = 0$):

$$Qx + q - \gamma \sum a_i \frac{1}{a_i^T x - b_i} = 0$$

Führt man Schlupfvariablen $s_i := a_i^T x - b_i \geq 0$
und Dualvariablen (Lagrange-Multiplikatoren) $\lambda_i := \gamma \frac{1}{s_i}$
ein, erhält man ein primal-duales KKT-System:

$$\begin{array}{rcll} Qx + q - A^T\lambda & = & 0 & \text{„duale Zulässigkeit"} \\ Ax - s & = & b & \text{„primale Zulässigkeit"} \\ s \circ \lambda & = & \gamma\mathbf{1} & \text{„perturb. Kompl."} \end{array}$$

Starte mit $s, \lambda > 0$, löse das System näherungsweise mit Newton, bewahre Positivität durch Line-Search, verkleinere γ, etc.
(wie in LP, ε-OL in gleicher polynomialer Anzahl an Iterationen).

Innere-Punkte-Verf. sind auch auf nicht-konvexe QPs recht gut anwendbar.

Inhaltsübersicht für heute:

Gleichungsbeschränkte Quadratische Optimierung

$$\text{(EQP)} \quad \min \; \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \;\; \text{s.t.} \;\; Ax = b$$

$\mathcal{X} = \{x : Ax = b\}$ ist ein affiner Unterraum, auf diesem kann das Minimum jeder quadratischen Funktion explizit bestimmt werden.

Gleichungsbeschränkte Quadratische Optimierung

$$\text{(EQP)} \quad \min \ \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \ \text{ s.t. } \ Ax = b$$

$\mathcal{X} = \{x : Ax = b\}$ ist ein affiner Unterraum, auf diesem kann das Minimum jeder quadratischen Funktion explizit bestimmt werden.

Berechnung der quadratischen Funktion über dem affinen Unterraum:

Gibt es ein $\bar{x} \in \mathcal{X}$ ($A\bar{x} = b$), ist jedes $x \in \mathcal{X}$ darstellbar als

$x = \bar{x} + d$ mit $d \in \{d : Ad = 0\} =: \ker A$ [Kern/Nullraum von A]

Gleichungsbeschränkte Quadratische Optimierung

$$\text{(EQP)} \quad \min \ \frac{1}{2} x^T Q x + q^T x \ \text{ s.t. } \ Ax = b$$

$\mathcal{X} = \{x : Ax = b\}$ ist ein affiner Unterraum, auf diesem kann das Minimum jeder quadratischen Funktion explizit bestimmt werden.

Berechnung der quadratischen Funktion über dem affinen Unterraum:

Gibt es ein $\bar{x} \in \mathcal{X}$ ($A\bar{x} = b$), ist jedes $x \in \mathcal{X}$ darstellbar als

$x = \bar{x} + d$ mit $d \in \{d : Ad = 0\} =: \ker A$ [Kern/Nullraum von A]

Der lineare Unterraum $\ker A$ habe Dim. k und die Spalten von $Z \in \mathbb{R}^{n \times k}$ als Basis, dann ist $\ker A = \{Zu : u \in \mathbb{R}^k\}$,

Gleichungsbeschränkte Quadratische Optimierung

$$\text{(EQP)} \quad \min \ \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \ \text{ s.t. } \ Ax = b$$

$\mathcal{X} = \{x : Ax = b\}$ ist ein affiner Unterraum, auf diesem kann das Minimum jeder quadratischen Funktion explizit bestimmt werden.

Berechnung der quadratischen Funktion über dem affinen Unterraum:

Gibt es ein $\bar{x} \in \mathcal{X}$ ($A\bar{x} = b$), ist jedes $x \in \mathcal{X}$ darstellbar als

$x = \bar{x} + d$ mit $d \in \{d : Ad = 0\} =: \ker A$ [Kern/Nullraum von A]

Der lineare Unterraum $\ker A$ habe Dim. k und die Spalten von $Z \in \mathbb{R}^{n \times k}$ als Basis, dann ist $\ker A = \{Zu : u \in \mathbb{R}^k\}$, $\mathcal{X} = \{\bar{x} + Zu : u \in \mathbb{R}^k\}$

Gleichungsbeschränkte Quadratische Optimierung

$$\text{(EQP)} \quad \min \ \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \ \text{ s.t. } \ Ax = b$$

$\mathcal{X} = \{x : Ax = b\}$ ist ein affiner Unterraum, auf diesem kann das Minimum jeder quadratischen Funktion explizit bestimmt werden.

Berechnung der quadratischen Funktion über dem affinen Unterraum:

Gibt es ein $\bar{x} \in \mathcal{X}$ ($A\bar{x} = b$), ist jedes $x \in \mathcal{X}$ darstellbar als

$x = \bar{x} + d$ mit $d \in \{d : Ad = 0\} =: \ker A$ [Kern/Nullraum von A]

Der lineare Unterraum $\ker A$ habe Dim. k und die Spalten von $Z \in \mathbb{R}^{n \times k}$ als Basis, dann ist $\ker A = \{Zu : u \in \mathbb{R}^k\}$, $\mathcal{X} = \{\bar{x} + Zu : u \in \mathbb{R}^k\}$ und

$$\text{(EQP)} \quad \Leftrightarrow \quad \min_{u \in \mathbb{R}^k} \tfrac{1}{2}u^T Z^T QZu + (Q\bar{x} + q)^T Zu + \tfrac{1}{2}\bar{x}^T Q\bar{x} + q^T \bar{x}.$$

Gleichungsbeschränkte Quadratische Optimierung

$$\text{(EQP)} \quad \min \ \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx \ \text{ s.t. } \ Ax = b$$

$\mathcal{X} = \{x : Ax = b\}$ ist ein affiner Unterraum, auf diesem kann das Minimum jeder quadratischen Funktion explizit bestimmt werden.

Berechnung der quadratischen Funktion über dem affinen Unterraum:

Gibt es ein $\bar{x} \in \mathcal{X}$ ($A\bar{x} = b$), ist jedes $x \in \mathcal{X}$ darstellbar als

$x = \bar{x} + d$ mit $d \in \{d : Ad = 0\} =: \ker A$ [Kern/Nullraum von A]

Der lineare Unterraum $\ker A$ habe Dim. k und die Spalten von $Z \in \mathbb{R}^{n\times k}$ als Basis, dann ist $\ker A = \{Zu : u \in \mathbb{R}^k\}$, $\mathcal{X} = \{\bar{x} + Zu : u \in \mathbb{R}^k\}$ und

$$\text{(EQP)} \quad \Leftrightarrow \quad \min_{u\in\mathbb{R}^k} \tfrac{1}{2}u^TZ^TQZu + (Q\bar{x}+q)^TZu + \tfrac{1}{2}\bar{x}^TQ\bar{x} + q^T\bar{x}.$$

$\Rightarrow$ endliche OL nur, falls $Z^TQZ \succeq 0$ und $Z^TQZu + Z^T(Q\bar{x}+q) = 0$ lösbar,

Gleichungsbeschränkte Quadratische Optimierung

$$\text{(EQP)} \quad \min \ \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \ \text{ s.t. } \ Ax = b$$

$\mathcal{X} = \{x : Ax = b\}$ ist ein affiner Unterraum, auf diesem kann das Minimum jeder quadratischen Funktion explizit bestimmt werden.

Berechnung der quadratischen Funktion über dem affinen Unterraum:
Gibt es ein $\bar{x} \in \mathcal{X}$ ($A\bar{x} = b$), ist jedes $x \in \mathcal{X}$ darstellbar als

$x = \bar{x} + d$ mit $d \in \{d : Ad = 0\} =: \ker A$ [Kern/Nullraum von A]

Der lineare Unterraum $\ker A$ habe Dim. k und die Spalten von $Z \in \mathbb{R}^{n\times k}$ als Basis, dann ist $\ker A = \{Zu : u \in \mathbb{R}^k\}$, $\mathcal{X} = \{\bar{x} + Zu : u \in \mathbb{R}^k\}$ und

$$\text{(EQP)} \quad \Leftrightarrow \quad \min_{u\in\mathbb{R}^k} \tfrac{1}{2}u^T Z^T QZu + (Q\bar{x} + q)^T Zu + \tfrac{1}{2}\bar{x}^T Q\bar{x} + q^T \bar{x}.$$

$\Rightarrow$ endliche OL nur, falls $Z^T QZ \succeq 0$ und $Z^T QZu + Z^T(Q\bar{x} + q) = 0$ lösbar, eindeutig für $Z^T QZ \succ 0$: $u^* = -(Z^T QZ)^{-1} Z^T(Q\bar{x} + q)$ und $x^* = \bar{x} + Zu$.

Gleichungsbeschränkte Quadratische Optimierung

$$\text{(EQP)} \quad \min \ \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x \ \text{ s.t. } \ Ax = b$$

$\mathcal{X} = \{x : Ax = b\}$ ist ein affiner Unterraum, auf diesem kann das Minimum jeder quadratischen Funktion explizit bestimmt werden.

Berechnung der quadratischen Funktion über dem affinen Unterraum:
Gibt es ein $\bar{x} \in \mathcal{X}$ $(A\bar{x} = b)$, ist jedes $x \in \mathcal{X}$ darstellbar als

$x = \bar{x} + d$ mit $d \in \{d : Ad = 0\} =: \ker A$ [Kern/Nullraum von A]

Der lineare Unterraum $\ker A$ habe Dim. k und die Spalten von $Z \in \mathbb{R}^{n\times k}$ als Basis, dann ist $\ker A = \{Zu : u \in \mathbb{R}^k\}$, $\mathcal{X} = \{\bar{x} + Zu : u \in \mathbb{R}^k\}$ und

$$\text{(EQP)} \quad \Leftrightarrow \quad \min_{u\in\mathbb{R}^k} \tfrac{1}{2}u^T Z^T QZu + (Q\bar{x} + q)^T Zu + \tfrac{1}{2}\bar{x}^T Q\bar{x} + q^T\bar{x}.$$

$\Rightarrow$ endliche OL nur, falls $Z^T QZ \succeq 0$ und $Z^T QZu + Z^T(Q\bar{x} + q) = 0$ lösbar, eindeutig für $Z^T QZ \succ 0$: $u^* = -(Z^T QZ)^{-1} Z^T (Q\bar{x} + q)$ und $x^* = \bar{x} + Zu$.

Satz (QP mit Gleichungsbedingungen)

Seien die Spalten von Z eine Basis von $\ker A$, $Z^T QZ \succ 0$, und $\bar{x} \in \mathcal{X}$. Ist $x^* = \bar{x} + d^*$ die Lösung des KKT Systems zu (EQP),

$$\begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \mu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ b \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d^* \\ \mu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q + Q\bar{x} \\ A\bar{x} - b \end{bmatrix},$$

dann ist x^* die eindeutige Optimallösung von (EQP).

Inhaltsübersicht für heute:

Quadratische Optimierung

Konvexe quadratische Optimierung

Gleichungsbeschränkte Quadratische Optimierung

Aktive-Mengen-Verfahren für Quadratische Optimierung

Aktive-Mengen-Verfahren für Quadratische Optimierung

Idee wie bei Simplex: Ausgehend von einem zulässigen Punkt,

- Fixiere eine Teilmenge der Nebenbedingungen als aktive Gleichungen (alle Gleichungen und einige Ungleichungen) $\rightarrow$ active set,
- bestimme das Minimum dieses gleichungsbeschränkten QPs,
- gehe in diese Richtung, bis die nächste Ungleichung aktiv wird.
- Ist keine Bewegung möglich, teste, ob eine Ungleichung zu unrecht fixiert wurde.

Bsp: $\min \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x$ s.t. $Ax \geq b$ mit $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$

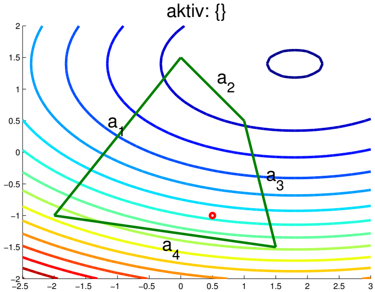
Aktive-Mengen-Verfahren für Quadratische Optimierung

Idee wie bei Simplex: Ausgehend von einem zulässigen Punkt,

- Fixiere eine Teilmenge der Nebenbedingungen als aktive Gleichungen (alle Gleichungen und einige Ungleichungen) $\rightarrow$ active set,
- bestimme das Minimum dieses gleichungsbeschränkten QPs,
- gehe in diese Richtung, bis die nächste Ungleichung aktiv wird.
- Ist keine Bewegung möglich, teste, ob eine Ungleichung zu unrecht fixiert wurde.

Bsp: $\min \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx$ s.t. $Ax \geq b$ mit $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$

$k = 0$, Punkt $x^{(0)}$,
aktive Menge: $\emptyset$,
Richtung: ?



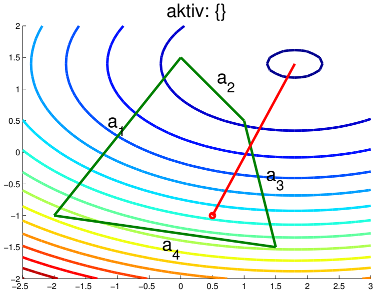
Aktive-Mengen-Verfahren für Quadratische Optimierung

Idee wie bei Simplex: Ausgehend von einem zulässigen Punkt,

- Fixiere eine Teilmenge der Nebenbedingungen als aktive Gleichungen (alle Gleichungen und einige Ungleichungen) $\rightarrow$ active set,
- bestimme das Minimum dieses gleichungsbeschränkten QPs,
- gehe in diese Richtung, bis die nächste Ungleichung aktiv wird.
- Ist keine Bewegung möglich, teste, ob eine Ungleichung zu unrecht fixiert wurde.

Bsp: $\min \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x$ s.t. $Ax \geq b$ mit $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$

$k = 0$, Punkt $x^{(0)}$,
aktive Menge: $\emptyset$,
Richtung: $d = -Q^{-1}q - x^{(0)}$,
aktiv wird ?



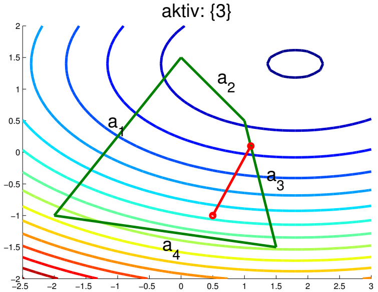
Aktive-Mengen-Verfahren für Quadratische Optimierung

Idee wie bei Simplex: Ausgehend von einem zulässigen Punkt,

- Fixiere eine Teilmenge der Nebenbedingungen als aktive Gleichungen (alle Gleichungen und einige Ungleichungen) $\rightarrow$ active set,
- bestimme das Minimum dieses gleichungsbeschränkten QPs,
- gehe in diese Richtung, bis die nächste Ungleichung aktiv wird.
- Ist keine Bewegung möglich, teste, ob eine Ungleichung zu unrecht fixiert wurde.

Bsp: $\min \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x$ s.t. $Ax \geq b$ mit $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$

$k = 1$, Punkt $x^{(1)}$,
aktive Menge: $\{3\}$,
Richtung ?



Aktive-Mengen-Verfahren für Quadratische Optimierung

Idee wie bei Simplex: Ausgehend von einem zulässigen Punkt,

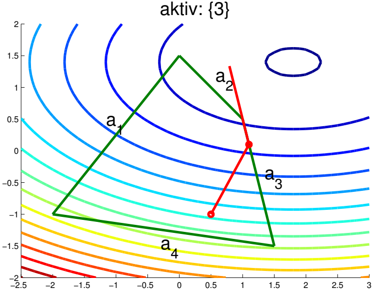
- Fixiere eine Teilmenge der Nebenbedingungen als aktive Gleichungen (alle Gleichungen und einige Ungleichungen) $\rightarrow$ active set,
- bestimme das Minimum dieses gleichungsbeschränkten QPs,
- gehe in diese Richtung, bis die nächste Ungleichung aktiv wird.
- Ist keine Bewegung möglich, teste, ob eine Ungleichung zu unrecht fixiert wurde.

Bsp: $\min \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx$ s.t. $Ax \geq b$ mit $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$

$k = 1$, Punkt $x^{(1)}$,
aktive Menge: $\{3\}$,
Richtung:

$$\begin{bmatrix} Q & a_3 \\ a_3^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q + Qx^{(1)} \\ a_3^T x^{(1)} - b_3 \end{bmatrix},$$

aktiv wird ?



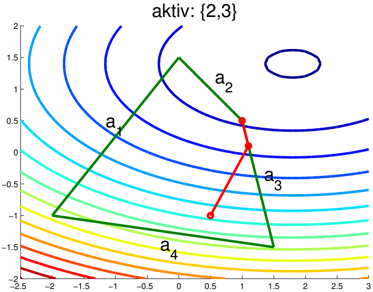
Aktive-Mengen-Verfahren für Quadratische Optimierung

Idee wie bei Simplex: Ausgehend von einem zulässigen Punkt,

- Fixiere eine Teilmenge der Nebenbedingungen als aktive Gleichungen (alle Gleichungen und einige Ungleichungen) $\rightarrow$ active set,
- bestimme das Minimum dieses gleichungsbeschränkten QPs,
- gehe in diese Richtung, bis die nächste Ungleichung aktiv wird.
- Ist keine Bewegung möglich, teste, ob eine Ungleichung zu unrecht fixiert wurde.

Bsp: $\min \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x$ s.t. $Ax \geq b$ mit $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$

$k = 2$, Punkt $x^{(2)}$,
aktive Menge: $\{2, 3\}$,
Richtung ?



Aktive-Mengen-Verfahren für Quadratische Optimierung

Idee wie bei Simplex: Ausgehend von einem zulässigen Punkt,

- Fixiere eine Teilmenge der Nebenbedingungen als aktive Gleichungen (alle Gleichungen und einige Ungleichungen) $\rightarrow$ active set,
- bestimme das Minimum dieses gleichungsbeschränkten QPs,
- gehe in diese Richtung, bis die nächste Ungleichung aktiv wird.
- Ist keine Bewegung möglich, teste, ob eine Ungleichung zu unrecht fixiert wurde.

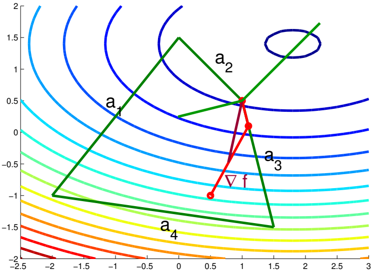
Bsp: min $\frac{1}{2}x^TQx + q^Tx$ s.t. $Ax \geq b$ mit $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$

$k = 2$, Punkt $x^{(2)}$,
aktive Menge: $\{2, 3\}$,
Richtung:

$$\begin{bmatrix} Q & a_2 & a_3 \\ a_2^T & 0 & 0 \\ a_3^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q + Qx^{(2)} \\ a_2^Tx^{(2)} - b_2 \\ a_3^Tx^{(2)} - b_3 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow d = 0$, $\lambda_3 < 0$ (!),
$x^{(3)} := x^{(2)}$,
aktiv wird ?

aktiv: {2,3}, λ2=6.4111, λ3=−3.8482



Aktive-Mengen-Verfahren für Quadratische Optimierung

Idee wie bei Simplex: Ausgehend von einem zulässigen Punkt,

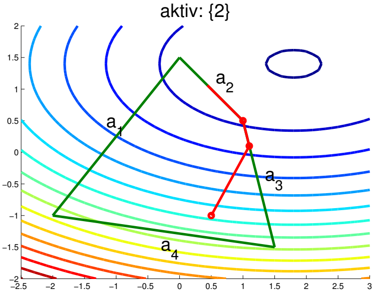
- Fixiere eine Teilmenge der Nebenbedingungen als aktive Gleichungen (alle Gleichungen und einige Ungleichungen) $\rightarrow$ active set,
- bestimme das Minimum dieses gleichungsbeschränkten QPs,
- gehe in diese Richtung, bis die nächste Ungleichung aktiv wird.
- Ist keine Bewegung möglich, teste, ob eine Ungleichung zu unrecht fixiert wurde.

Bsp: $\min \frac{1}{2}x^TQx + q^Tx$ s.t. $Ax \geq b$ mit $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$

$k = 3$, Punkt $x^{(3)}$,
aktive Menge: $\{2\}$,
Richtung:

$$\begin{bmatrix} Q & a_2 \\ a_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q + Qx^{(3)} \\ a_2^T x^{(3)} - b_2 \end{bmatrix},$$

aktiv wird ?



Aktive-Mengen-Verfahren für Quadratische Optimierung

Idee wie bei Simplex: Ausgehend von einem zulässigen Punkt,

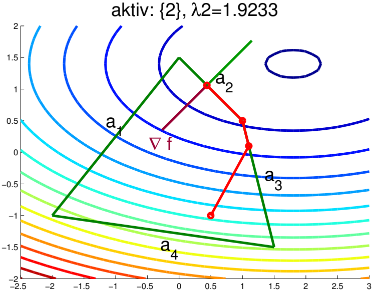
- Fixiere eine Teilmenge der Nebenbedingungen als aktive Gleichungen (alle Gleichungen und einige Ungleichungen) $\rightarrow$ active set,
- bestimme das Minimum dieses gleichungsbeschränkten QPs,
- gehe in diese Richtung, bis die nächste Ungleichung aktiv wird.
- Ist keine Bewegung möglich, teste, ob eine Ungleichung zu unrecht fixiert wurde.

Bsp: $\min \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x$ s.t. $Ax \geq b$ mit $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$

$k = 3$, Punkt $x^{(3)}$,
aktive Menge: $\{2\}$,
Richtung:

$$\begin{bmatrix} Q & a_2 \\ a_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q + Qx^{(2)} \\ a_2^T x^{(3)} - b_2 \end{bmatrix},$$

$x^{(4)} := x^{(3)} + d$,
$\nabla_x f(x^{(4)}) + \lambda_2(-a_2) = 0,\ \lambda_2 \geq 0$,
KKT erfüllt!



Algorithmisches Active-Set-Schema für konvexes QP

$Q \succeq 0$ und o.B.d.A. nur Unglgen: $\min\ x^T Qx + q^T x \quad s.t. \quad a_i^T x \geq b_i \ (i \in \mathcal{I})$

---

0. Bestimme zulässigen Startpunkt $x^{(0)} \in \{x : Ax \geq b\}$ (Simplex/IP), wähle aktive Menge $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}(x)$, setze $k := 0$.

Algorithmisches Active-Set-Schema für konvexes QP

$Q \succeq 0$ und o.B.d.A. nur Unglgen: min $x^T Qx + q^T x \ \ s.t. \ \ a_i^T x \geq b_i \ (i \in \mathcal{I})$

---

0. Bestimme zulässigen Startpunkt $x^{(0)} \in \{x : Ax \geq b\}$ (Simplex/IP), wähle aktive Menge $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}(x)$, setze $k := 0$.
1. Bestimme d, λ für (EQP) mit Gleichungsbedingungen $i \in \mathcal{A}_k$

Algorithmisches Active-Set-Schema für konvexes QP

$Q \succeq 0$ und o.B.d.A. nur Unglgen: min $x^T Qx + q^T x$ $s.t.$ $a_i^T x \geq b_i$ $(i \in \mathcal{I})$

---

0. Bestimme zulässigen Startpunkt $x^{(0)} \in \{x : Ax \geq b\}$ (Simplex/IP), wähle aktive Menge $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}(x)$, setze $k := 0$.
1. Bestimme d, λ für (EQP) mit Gleichungsbedingungen $i \in \mathcal{A}_k$
2. Falls $d = 0$:
   a) Ist $\lambda \geq 0$ (KKT erfüllt), STOP mit $x^* = x^{(k)}$.

Algorithmisches Active-Set-Schema für konvexes QP

$Q \succeq 0$ und o.B.d.A. nur Unglgen: min $x^T Qx + q^T x$ $s.t.$ $a_i^T x \geq b_i$ $(i \in \mathcal{I})$

---

0. Bestimme zulässigen Startpunkt $x^{(0)} \in \{x : Ax \geq b\}$ (Simplex/IP), wähle aktive Menge $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}(x)$, setze $k := 0$.
1. Bestimme d, λ für (EQP) mit Gleichungsbedingungen $i \in \mathcal{A}_k$
2. Falls $d = 0$:
   a) Ist $\lambda \geq 0$ (KKT erfüllt), STOP mit $x^* = x^{(k)}$.
   b) Wähle $\hat{\imath} \in \mathcal{A}_k$ mit $\lambda_{\hat{\imath}} < 0$, setze $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \setminus \{\hat{\imath}\}$, $x^{(k+1)} := x^{(k)}$.

Algorithmisches Active-Set-Schema für konvexes QP

$Q \succeq 0$ und o.B.d.A. nur Unglgen: min $x^T Qx + q^T x$ $s.t.$ $a_i^T x \geq b_i$ $(i \in \mathcal{I})$

---

0. Bestimme zulässigen Startpunkt $x^{(0)} \in \{x : Ax \geq b\}$ (Simplex/IP), wähle aktive Menge $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}(x)$, setze $k := 0$.
1. Bestimme d, λ für (EQP) mit Gleichungsbedingungen $i \in \mathcal{A}_k$
2. Falls $d = 0$:
   a) Ist $\lambda \geq 0$ (KKT erfüllt), STOP mit $x^* = x^{(k)}$.
   b) Wähle $\hat{\imath} \in \mathcal{A}_k$ mit $\lambda_{\hat{\imath}} < 0$, setze $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \setminus \{\hat{\imath}\}$, $x^{(k+1)} := x^{(k)}$.

   Sonst $(d \neq 0)$
   a) bestimme $\alpha_k := \min\{\frac{b_i - a_i^T x^{(k)}}{a_i^T d} : i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{A}_k, a_i^T d < 0\}$. [$+\infty$ für $\emptyset$]

Algorithmisches Active-Set-Schema für konvexes QP

$Q \succeq 0$ und o.B.d.A. nur Unglgen: min $x^T Qx + q^T x$ $s.t.$ $a_i^T x \geq b_i$ $(i \in \mathcal{I})$

---

0. Bestimme zulässigen Startpunkt $x^{(0)} \in \{x : Ax \geq b\}$ (Simplex/IP), wähle aktive Menge $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}(x)$, setze $k := 0$.
1. Bestimme d, λ für (EQP) mit Gleichungsbedingungen $i \in \mathcal{A}_k$
2. Falls $d = 0$:
   a) Ist $\lambda \geq 0$ (KKT erfüllt), STOP mit $x^* = x^{(k)}$.
   b) Wähle $\hat{\imath} \in \mathcal{A}_k$ mit $\lambda_{\hat{\imath}} < 0$, setze $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \setminus \{\hat{\imath}\}$, $x^{(k+1)} := x^{(k)}$.

   Sonst $(d \neq 0)$

   a) bestimme $\alpha_k := \min\{\frac{b_i - a_i^T x^{(k)}}{a_i^T d} : i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{A}_k, a_i^T d < 0\}$. [$+\infty$ für $\emptyset$]
   b) Ist $\alpha_k > 1$, setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d$, $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k$,
   sonst $x^{(k+1)} := x^{(k)} + \alpha_k d$ und $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \cup \{\hat{\imath}\}$ mit $\hat{\imath}$ erzeugt α_k.

Algorithmisches Active-Set-Schema für konvexes QP

$Q \succeq 0$ und o.B.d.A. nur Unglgen: $\min\ x^T Qx + q^T x\ \ s.t.\ \ a_i^T x \geq b_i\ (i \in \mathcal{I})$

---

0. Bestimme zulässigen Startpunkt $x^{(0)} \in \{x : Ax \geq b\}$ (Simplex/IP), wähle aktive Menge $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}(x)$, setze $k := 0$.
1. Bestimme d, λ für (EQP) mit Gleichungsbedingungen $i \in \mathcal{A}_k$
2. Falls $d = 0$:
   a) Ist $\lambda \geq 0$ (KKT erfüllt), STOP mit $x^* = x^{(k)}$.
   b) Wähle $\hat{\imath} \in \mathcal{A}_k$ mit $\lambda_{\hat{\imath}} < 0$, setze $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \setminus \{\hat{\imath}\}$, $x^{(k+1)} := x^{(k)}$.

   Sonst ($d \neq 0$)
   a) bestimme $\alpha_k := \min\{\frac{b_i - a_i^T x^{(k)}}{a_i^T d} : i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{A}_k, a_i^T d < 0\}$. [$+\infty$ für $\emptyset$]
   b) Ist $\alpha_k > 1$, setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d$, $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k$,
      sonst $x^{(k+1)} := x^{(k)} + \alpha_k d$ und $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \cup \{\hat{\imath}\}$ mit $\hat{\imath}$ erzeugt α_k.
3. Setze $k \leftarrow k + 1$, GOTO 1.

Bemerkungen:

Algorithmisches Active-Set-Schema für konvexes QP

$Q \succeq 0$ und o.B.d.A. nur Unglgen: min $x^T Qx + q^T x \;\; s.t. \;\; a_i^T x \geq b_i \; (i \in \mathcal{I})$

---

0. Bestimme zulässigen Startpunkt $x^{(0)} \in \{x : Ax \geq b\}$ (Simplex/IP), wähle aktive Menge $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}(x)$, setze $k := 0$.
1. Bestimme d, λ für (EQP) mit Gleichungsbedingungen $i \in \mathcal{A}_k$
2. Falls $d = 0$:
   a) Ist $\lambda \geq 0$ (KKT erfüllt), STOP mit $x^* = x^{(k)}$.
   b) Wähle $\hat{\imath} \in \mathcal{A}_k$ mit $\lambda_{\hat{\imath}} < 0$, setze $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \setminus \{\hat{\imath}\}$, $x^{(k+1)} := x^{(k)}$.

   Sonst ($d \neq 0$)
   a) bestimme $\alpha_k := \min\{\frac{b_i - a_i^T x^{(k)}}{a_i^T d} : i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{A}_k, a_i^T d < 0\}$. [$+\infty$ für $\emptyset$]
   b) Ist $\alpha_k > 1$, setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d$, $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k$,
      sonst $x^{(k+1)} := x^{(k)} + \alpha_k d$ und $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \cup \{\hat{\imath}\}$ mit $\hat{\imath}$ erzeugt α_k.
3. Setze $k \leftarrow k + 1$, GOTO 1.

Bemerkungen:

- Wie beim Simplex-Verfahren kann Kreisen auftreten.

Algorithmisches Active-Set-Schema für konvexes QP

$Q \succeq 0$ und o.B.d.A. nur Unglgen: min $x^T Qx + q^T x$ $s.t.$ $a_i^T x \geq b_i$ $(i \in \mathcal{I})$

---

0. Bestimme zulässigen Startpunkt $x^{(0)} \in \{x : Ax \geq b\}$ (Simplex/IP), wähle aktive Menge $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}(x)$, setze $k := 0$.
1. Bestimme d, λ für (EQP) mit Gleichungsbedingungen $i \in \mathcal{A}_k$
2. Falls $d = 0$:
   a) Ist $\lambda \geq 0$ (KKT erfüllt), STOP mit $x^* = x^{(k)}$.
   b) Wähle $\hat{\imath} \in \mathcal{A}_k$ mit $\lambda_{\hat{\imath}} < 0$, setze $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \setminus \{\hat{\imath}\}$, $x^{(k+1)} := x^{(k)}$.

   Sonst $(d \neq 0)$
   a) bestimme $\alpha_k := \min\{\frac{b_i - a_i^T x^{(k)}}{a_i^T d} : i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{A}_k, a_i^T d < 0\}$. [$+\infty$ für $\emptyset$]
   b) Ist $\alpha_k > 1$, setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d$, $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k$,
   sonst $x^{(k+1)} := x^{(k)} + \alpha_k d$ und $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \cup \{\hat{\imath}\}$ mit $\hat{\imath}$ erzeugt α_k.
3. Setze $k \leftarrow k + 1$, GOTO 1.

Bemerkungen:

- Wie beim Simplex-Verfahren kann Kreisen auftreten.
- Für $Q \succ 0$ und ohne Degeneriertheiten endet der Alg. für endliches k.

Algorithmisches Active-Set-Schema für konvexes QP

$Q \succeq 0$ und o.B.d.A. nur Unglgen: $\min \ x^T Qx + q^T x \ \ s.t. \ \ a_i^T x \geq b_i \ (i \in \mathcal{I})$

---

0. Bestimme zulässigen Startpunkt $x^{(0)} \in \{x : Ax \geq b\}$ (Simplex/IP), wähle aktive Menge $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}(x)$, setze $k := 0$.
1. Bestimme d, λ für (EQP) mit Gleichungsbedingungen $i \in \mathcal{A}_k$
2. Falls $d = 0$:
   a) Ist $\lambda \geq 0$ (KKT erfüllt), STOP mit $x^* = x^{(k)}$.
   b) Wähle $\hat{\imath} \in \mathcal{A}_k$ mit $\lambda_{\hat{\imath}} < 0$, setze $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \setminus \{\hat{\imath}\}$, $x^{(k+1)} := x^{(k)}$.

   Sonst ($d \neq 0$)
   a) bestimme $\alpha_k := \min\{\frac{b_i - a_i^T x^{(k)}}{a_i^T d} : i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{A}_k, a_i^T d < 0\}$. $[+\infty$ für $\emptyset]$
   b) Ist $\alpha_k > 1$, setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d$, $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k$,
   sonst $x^{(k+1)} := x^{(k)} + \alpha_k d$ und $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \cup \{\hat{\imath}\}$ mit $\hat{\imath}$ erzeugt α_k.
3. Setze $k \leftarrow k + 1$, GOTO 1.

Bemerkungen:

- Wie beim Simplex-Verfahren kann Kreisen auftreten.
- Für $Q \succ 0$ und ohne Degeneriertheiten endet der Alg. für endliches k.
- Effiziente Implementationen nutzen, dass sich (EQP) nur wenig ändert.

Algorithmisches Active-Set-Schema für konvexes QP

$Q \succeq 0$ und o.B.d.A. nur Unglgen: min $x^T Qx + q^T x$ s.t. $a_i^T x \geq b_i$ $(i \in \mathcal{I})$

---

0. Bestimme zulässigen Startpunkt $x^{(0)} \in \{x : Ax \geq b\}$ (Simplex/IP), wähle aktive Menge $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}(x)$, setze $k := 0$.
1. Bestimme d, λ für (EQP) mit Gleichungsbedingungen $i \in \mathcal{A}_k$
2. Falls $d = 0$:
   a) Ist $\lambda \geq 0$ (KKT erfüllt), STOP mit $x^* = x^{(k)}$.
   b) Wähle $\hat{\imath} \in \mathcal{A}_k$ mit $\lambda_{\hat{\imath}} < 0$, setze $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \setminus \{\hat{\imath}\}$, $x^{(k+1)} := x^{(k)}$.

   Sonst ($d \neq 0$)
   a) bestimme $\alpha_k := \min\{\frac{b_i - a_i^T x^{(k)}}{a_i^T d} : i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{A}_k, a_i^T d < 0\}$. [$+\infty$ für $\emptyset$]
   b) Ist $\alpha_k > 1$, setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d$, $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k$, sonst $x^{(k+1)} := x^{(k)} + \alpha_k d$ und $\mathcal{A}_{k+1} := \mathcal{A}_k \cup \{\hat{\imath}\}$ mit $\hat{\imath}$ erzeugt α_k.
3. Setze $k \leftarrow k + 1$, GOTO 1.

Bemerkungen:

- Wie beim Simplex-Verfahren kann Kreisen auftreten.
- Für $Q \succ 0$ und ohne Degeneriertheiten endet der Alg. für endliches k.
- Effiziente Implementationen nutzen, dass sich (EQP) nur wenig ändert.
- Für indefinites Q nutzt man z.B. Richtungen zu $\lambda_i(Q) < 0$.

Es gibt viele weitere Varianten für QP,
z.B. Gradienten-Projektions-Verfahren, falls $Ax \geq b$ besonders einfache Struktur hat ($x \geq 0$ oder $x \in [a, b]$) ...

Kleine QPs sind extrem effizient lösbar (im Millisekunden-Bereich), große QPs können sehr anspruchsvoll werden.

Konvexe QPs sind auch als SOCPs formulierbar (s. dort), das ist aber meist weniger effizient als passende QP-Löser zu verwenden.