Optimierung für Nichtmathematiker

(für Master)

Vorlesung: Christoph Helmberg
Übung: Anja Lau

Ziele: Einführung in

- richtige Einordnung von Optimierungsproblemen
- Modellierungstechniken
- praktische Umsetzung mit Optimierungssoftware
- grobes Verständnis für Funktionsweise und Grenzen der Optimierungsverfahren

ET/IT, MB, WiWi $\rightarrow$ Anwendungen in allen drei Gebieten
(z.B. Signalverarbeitung, Truss Topology Design, Operations Research)

Inhaltsübersicht für heute:

Inhaltsübersicht für heute:

Das Optimierungsproblem in allgemeiner Form

$$
(P) \quad \begin{array}{llll}
\text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\
\text{unter (s.t.)} & h_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\
& g_i(x) \leq 0, & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\
& x \in \Omega & & \text{Variablen, Grundmenge}
\end{array}
$$

Bei uns meist:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (geht aber auch $\mathbb{C}^n$,$\mathbb{Z}^n$, Funktionenräume ...)

$f, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (linear, konvex, hinreichend glatt, ...)

$|\mathcal{E}|$, $|\mathcal{I}|$ endliche Indexmengen (abzählbar, überabzählbar)

Das Optimierungsproblem in allgemeiner Form

$$
(P) \qquad \begin{array}{llll}
\text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\
\text{unter (s.t.)} & h_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\
 & g_i(x) \leq 0, & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\
 & x \in \Omega & & \text{Variablen, Grundmenge}
\end{array}
$$

Bei uns meist:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (geht aber auch $\mathbb{C}^n$,$\mathbb{Z}^n$, Funktionenräume ...)

$f, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (linear, konvex, hinreichend glatt, ...)

$|\mathcal{E}|$, $|\mathcal{I}|$ endliche Indexmengen (abzählbar, überabzählbar)

Beispiel

(P1) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

Das Optimierungsproblem in allgemeiner Form

$$(P) \quad \begin{array}{llll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\ \text{unter (s.t.)} & h_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\ & g_i(x) \leq 0, & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\ & x \in \Omega & & \text{Variablen, Grundmenge} \end{array}$$

Bei uns meist:
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (geht aber auch $\mathbb{C}^n$,$\mathbb{Z}^n$, Funktionenräume ...)
$f, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (linear, konvex, hinreichend glatt, ...)
$|\mathcal{E}|$, $|\mathcal{I}|$ endliche Indexmengen (abzählbar, überabzählbar)

Beispiel

(P1) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$
$(f(x) = x - x^2,\ \mathcal{E} = \emptyset,\ g_1(x) = x^2 - 1,\ \mathcal{I} = \{1\},\ \Omega = \mathbb{R})$

Das Optimierungsproblem in allgemeiner Form

$$
(P) \quad \begin{array}{lllll}
\text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\
\text{unter (s.t.)} & h_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\
& g_i(x) \leq 0, & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\
& x \in \Omega & & \text{Variablen, Grundmenge}
\end{array}
$$

Bei uns meist:
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (geht aber auch $\mathbb{C}^n$,$\mathbb{Z}^n$, Funktionenräume ...)
$f, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (linear, konvex, hinreichend glatt, ...)
$|\mathcal{E}|$, $|\mathcal{I}|$ endliche Indexmengen (abzählbar, überabzählbar)

Beispiel

(P1) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$
($f(x) = x - x^2$, $\mathcal{E} = \emptyset$, $g_1(x) = x^2 - 1$, $\mathcal{I} = \{1\}$, $\Omega = \mathbb{R}$)
(P2) $\min x - x^2$ s.t. $-1 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

Das Optimierungsproblem in allgemeiner Form

$$(P)\quad \begin{array}{llll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\ \text{unter (s.t.)} & h_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\ & g_i(x) \leq 0, & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\ & x \in \Omega & & \text{Variablen, Grundmenge} \end{array}$$

Bei uns meist:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (geht aber auch $\mathbb{C}^n$,$\mathbb{Z}^n$, Funktionenräume ...)

$f, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (linear, konvex, hinreichend glatt, ...)

$|\mathcal{E}|$, $|\mathcal{I}|$ endliche Indexmengen (abzählbar, überabzählbar)

Beispiel

(P1) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

$(f(x) = x - x^2,\ \mathcal{E} = \emptyset,\ g_1(x) = x^2 - 1,\ \mathcal{I} = \{1\},\ \Omega = \mathbb{R})$

(P2) $\min x - x^2$ s.t. $-1 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

$(f,\ \mathcal{E},\ \Omega$ *w.o.*, $g_1(x) = -1 - x,\ g_2(x) = x - 1,\ \mathcal{I} = \{1, 2\})$

Das Optimierungsproblem in allgemeiner Form

$$
(P) \qquad
\begin{array}{llll}
\text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\
\text{unter (s.t.)} & h_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\
 & g_i(x) \leq 0, & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\
 & x \in \Omega & & \text{Variablen, Grundmenge}
\end{array}
$$

Bei uns meist:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (geht aber auch $\mathbb{C}^n$,$\mathbb{Z}^n$, Funktionenräume ...)

$f, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (linear, konvex, hinreichend glatt, ...)

$|\mathcal{E}|$, $|\mathcal{I}|$ endliche Indexmengen (abzählbar, überabzählbar)

Beispiel

(P1) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

($f(x) = x - x^2$, $\mathcal{E} = \emptyset$, $g_1(x) = x^2 - 1$, $\mathcal{I} = \{1\}$, $\Omega = \mathbb{R}$)

(P2) $\min x - x^2$ s.t. $-1 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

(f, $\mathcal{E}$, Ω w.o., $g_1(x) = -1 - x$, $g_2(x) = x - 1$, $\mathcal{I} = \{1, 2\}$)

(P3) $\min x - x^2$ s.t. $x \in [-1, 1]$

Das Optimierungsproblem in allgemeiner Form

$$
(P) \quad \begin{array}{llll}
\text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\
\text{unter (s.t.)} & h_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\
& g_i(x) \leq 0, & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\
& x \in \Omega & & \text{Variablen, Grundmenge}
\end{array}
$$

Bei uns meist:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (geht aber auch $\mathbb{C}^n$,$\mathbb{Z}^n$, Funktionenräume ...)

$f, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (linear, konvex, hinreichend glatt, ...)

$|\mathcal{E}|$, $|\mathcal{I}|$ endliche Indexmengen (abzählbar, überabzählbar)

Beispiel

(P1) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

($f(x) = x - x^2$, $\mathcal{E} = \emptyset$, $g_1(x) = x^2 - 1$, $\mathcal{I} = \{1\}$, $\Omega = \mathbb{R}$)

(P2) $\min x - x^2$ s.t. $-1 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

(f, $\mathcal{E}$, Ω w.o., $g_1(x) = -1 - x$, $g_2(x) = x - 1$, $\mathcal{I} = \{1, 2\}$)

(P3) $\min x - x^2$ s.t. $x \in [-1, 1]$ *($\mathcal{I} = \mathcal{E} = \emptyset$, $\Omega = [-1, 1]$)*

Terminologie: Zulässige Menge, Optimalwert

$$
(P) \quad \begin{array}{lllll}
\text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} & \\
\text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Glgsnebenbed.} & \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \text{Restriktionen} \\
 & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Unglgsnebenbed.} & \\
 & x \in \Omega & & \text{Grundmenge} &
\end{array}
$$

Definition

- *Punkte, die alle Bedingungen erfüllen, bilden die zulässige Menge* $\mathcal{X}(P) := \{x \in \Omega : h_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}, g_j(x) \leq 0, j \in \mathcal{I}\}$

Terminologie: Zulässige Menge, Optimalwert

$$
(P) \quad
\begin{array}{llll}
\text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\
\text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Glgsnebenbed.} \\
 & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Unglgsnebenbed.} \\
 & x \in \Omega & & \text{Grundmenge}
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \text{Restriktionen}
$$

Definition

- *Punkte, die alle Bedingungen erfüllen, bilden die zulässige Menge* $\mathcal{X}(P) := \{x \in \Omega : h_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}, g_j(x) \leq 0, j \in \mathcal{I}\}$
- *Ist* $\mathcal{X}(P) = \emptyset$*, heißt das Problem* (P) *unzulässig.*

Terminologie: Zulässige Menge, Optimalwert

$$
(P) \quad \begin{array}{llll}
\text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\
\text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Glgsnebenbed.} \\
 & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Unglgsnebenbed.} \\
 & x \in \Omega & & \text{Grundmenge}
\end{array}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{Restriktionen}
$$

Definition

- *Punkte, die alle Bedingungen erfüllen, bilden die zulässige Menge* $\mathcal{X}(P) := \{x \in \Omega : h_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}, g_j(x) \leq 0, j \in \mathcal{I}\}$
- *Ist* $\mathcal{X}(P) = \emptyset$*, heißt das Problem* (P) *unzulässig.*
- $v(P) := \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ *ist der Optimalwert von* (P)*.*
  Falls $v(P) = -\infty$ *heißt das Problem* (P) *unbeschränkt.*
  Für unzulässiges (P) *ist* $v(P) = \infty$*.*

Terminologie: Zulässige Menge, Optimalwert

$$
(P) \quad \begin{array}{llll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Glgsnebenbed.} \\ & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Unglgsnebenbed.} \\ & x \in \Omega & & \text{Grundmenge} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}}\right\} \text{Restriktionen}
$$

Definition

- *Punkte, die alle Bedingungen erfüllen, bilden die zulässige Menge* $\mathcal{X}(P) := \{x \in \Omega : h_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}, g_j(x) \leq 0, j \in \mathcal{I}\}$
- *Ist* $\mathcal{X}(P) = \emptyset$, *heißt das Problem* (P) *unzulässig.*
- $v(P) := \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ *ist der Optimalwert von* (P).
  Falls $v(P) = -\infty$ *heißt das Problem* (P) *unbeschränkt.*
  Für unzulässiges (P) *ist* $v(P) = \infty$.

Beispiel

(P1) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1, \; x \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathcal{X} =$

Terminologie: Zulässige Menge, Optimalwert

$$
(P) \quad \begin{array}{lllll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} & \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Glgsnebenbed.} & \multirow{2}{*}{$\left.\right\}$ Restriktionen} \\ & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Unglgsnebenbed.} & \\ & x \in \Omega & & \text{Grundmenge} & \end{array}
$$

Definition

- *Punkte, die alle Bedingungen erfüllen, bilden die zulässige Menge* $\mathcal{X}(P) := \{x \in \Omega : h_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}, g_j(x) \leq 0, j \in \mathcal{I}\}$
- *Ist* $\mathcal{X}(P) = \emptyset$, *heißt das Problem* (P) *unzulässig.*
- $v(P) := \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ *ist der Optimalwert von* (P).
  Falls $v(P) = -\infty$ *heißt das Problem* (P) *unbeschränkt.*
  Für unzulässiges (P) *ist* $v(P) = \infty$.

Beispiel

(P1) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathcal{X} = [-1, 1],\ v(P1) =$

Terminologie: Zulässige Menge, Optimalwert

$$(P)\quad \begin{array}{llll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Glgsnebenbed.} \\ & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Unglgsnebenbed.} \\ & x \in \Omega & & \text{Grundmenge} \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}}\right\} \text{Restriktionen}$$

Definition

- *Punkte, die alle Bedingungen erfüllen, bilden die zulässige Menge* $\mathcal{X}(P) := \{x \in \Omega : h_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}, g_j(x) \leq 0, j \in \mathcal{I}\}$
- *Ist* $\mathcal{X}(P) = \emptyset$, *heißt das Problem* (P) *unzulässig.*
- $v(P) := \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ *ist der Optimalwert von* (P).
  Falls $v(P) = -\infty$ *heißt das Problem* (P) *unbeschränkt.*
  Für unzulässiges (P) *ist* $v(P) = \infty$.

Beispiel

(P1) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{X} = [-1, 1],\ v(P1) = -2,$
ebenso (P2) $(-1 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbb{R})$ *und (P3)* $(x \in [-1, 1])$.
(P4) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 = 1,\ x \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{X} =$

Terminologie: Zulässige Menge, Optimalwert

$$
(P)\quad
\begin{array}{llll}
\text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\
\text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Glgsnebenbed.} \\
 & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Unglgsnebenbed.} \\
 & x \in \Omega & & \text{Grundmenge}
\end{array}
\quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{Restriktionen}
$$

Definition

- *Punkte, die alle Bedingungen erfüllen, bilden die zulässige Menge* $\mathcal{X}(P) := \{x \in \Omega : h_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}, g_j(x) \leq 0, j \in \mathcal{I}\}$
- *Ist* $\mathcal{X}(P) = \emptyset$*, heißt das Problem* (P) *unzulässig.*
- $v(P) := \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ *ist der Optimalwert von* (P)*.*
  Falls $v(P) = -\infty$ *heißt das Problem* (P) *unbeschränkt.*
  Für unzulässiges (P) *ist* $v(P) = \infty$*.*

Beispiel

(P1) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{X} = [-1, 1],\ v(P1) = -2,$
ebenso (P2) $(-1 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbb{R})$ *und (P3)* $(x \in [-1, 1])$*.*
(P4) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 = 1,\ x \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{X} = \{-1, 1\},\ v(P4) = -2$

Terminologie: Lösungen, globale/lokale Optimallösungen

$$(P) \quad \begin{array}{llll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\ & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\ & x \in \Omega & & \text{Grundmenge} \end{array}$$

Definition

- *$x \in \mathcal{X}(P)$ ... heißt Lösung oder zulässiger Punkt*
- *Ein $x \in \mathcal{X}$ mit $f(x) = v(P)$ heißt (globale) Optimallösung (also $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X}$)*

Terminologie: Lösungen, globale/lokale Optimallösungen

$$
(P) \quad \begin{array}{llll}
\text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\
\text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\
 & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\
 & x \in \Omega & & \text{Grundmenge}
\end{array}
$$

Definition

- *$x \in \mathcal{X}(P)$ ... heißt Lösung oder zulässiger Punkt*
- *Ein $x \in \mathcal{X}$ mit $f(x) = v(P)$ heißt (globale) Optimallösung (also $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X}$)*
- *Ein $x \in \mathcal{X}$ heißt lokale Optimallösung, wenn es eine (kleine) Umgebung $U(x)$ um x gibt mit $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X} \cap U(x)$*

Terminologie: Lösungen, globale/lokale Optimallösungen

$$(P) \quad \begin{array}{llll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\ & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\ & x \in \Omega & & \text{Grundmenge} \end{array}$$

Definition

- $x \in \mathcal{X}(P)$ *... heißt Lösung oder zulässiger Punkt*
- *Ein* $x \in \mathcal{X}$ *mit* $f(x) = v(P)$ *heißt (globale) Optimallösung (also* $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X}$*)*
- *Ein* $x \in \mathcal{X}$ *heißt lokale Optimallösung, wenn es eine (kleine) Umgebung* $U(x)$ *um* x *gibt mit* $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X} \cap U(x)$

Beispiel

(P1-P3) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

globale OL:

Terminologie: Lösungen, globale/lokale Optimallösungen

$$(P) \quad \begin{array}{llll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\ & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\ & x \in \Omega & & \text{Grundmenge} \end{array}$$

Definition

- *$x \in \mathcal{X}(P)$ ... heißt Lösung oder zulässiger Punkt*
- *Ein $x \in \mathcal{X}$ mit $f(x) = v(P)$ heißt (globale) Optimallösung (also $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X}$)*
- *Ein $x \in \mathcal{X}$ heißt lokale Optimallösung, wenn es eine (kleine) Umgebung $U(x)$ um x gibt mit $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X} \cap U(x)$*

Beispiel

(P1-P3) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

globale OL: $x \in \{-1\}$, *lokale OL:*

Terminologie: Lösungen, globale/lokale Optimallösungen

$$(P) \quad \begin{array}{llll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\ & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\ & x \in \Omega & & \text{Grundmenge} \end{array}$$

Definition

- *$x \in \mathcal{X}(P)$ ... heißt Lösung oder zulässiger Punkt*
- *Ein $x \in \mathcal{X}$ mit $f(x) = v(P)$ heißt (globale) Optimallösung (also $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X}$)*
- *Ein $x \in \mathcal{X}$ heißt lokale Optimallösung, wenn es eine (kleine) Umgebung $U(x)$ um x gibt mit $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X} \cap U(x)$*

Beispiel

(P1-P3) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

globale OL: $x \in \{-1\}$, *lokale OL:* $x \in \{-1, 1\}$

Terminologie: Lösungen, globale/lokale Optimallösungen

(P)	Minimiere	$f(x)$		Zielfunktion
	unter	$h_i(x) = 0$	$i \in \mathcal{E}$	Gleichungsnebenbed.
		$g_i(x) \leq 0$	$i \in \mathcal{I}$	Ungleichungsnebenbed.
		$x \in \Omega$		Grundmenge

Definition

- $x \in \mathcal{X}(P)$ ... *heißt Lösung oder zulässiger Punkt*
- *Ein* $x \in \mathcal{X}$ *mit* $f(x) = v(P)$ *heißt (globale) Optimallösung (also* $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X}$*)*
- *Ein* $x \in \mathcal{X}$ *heißt lokale Optimallösung, wenn es eine (kleine) Umgebung* $U(x)$ *um* x *gibt mit* $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X} \cap U(x)$

Beispiel

(P1-P3) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$
globale OL: $x \in \{-1\}$, *lokale OL:* $x \in \{-1, 1\}$
(P4) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 = 1,\ x \in \mathbb{R}$ *???*

Terminologie: Lösungen, globale/lokale Optimallösungen

$$(P) \quad \begin{array}{lllll} \text{Minimiere} & f(x) & & \text{Zielfunktion} \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} & \text{Gleichungsnebenbed.} \\ & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} & \text{Ungleichungsnebenbed.} \\ & x \in \Omega & & \text{Grundmenge} \end{array}$$

Definition

- $x \in \mathcal{X}(P)$ ... *heißt Lösung oder zulässiger Punkt*
- *Ein* $x \in \mathcal{X}$ *mit* $f(x) = v(P)$ *heißt (globale) Optimallösung (also* $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X}$*)*
- *Ein* $x \in \mathcal{X}$ *heißt lokale Optimallösung, wenn es eine (kleine) Umgebung* $U(x)$ *um* x *gibt mit* $f(x) \leq f(y)\ \forall y \in \mathcal{X} \cap U(x)$

Beispiel

(P1-P3) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$
globale OL: $x \in \{-1\}$, *lokale OL:* $x \in \{-1, 1\}$
(P4) $\min x - x^2$ s.t. $x^2 = 1,\ x \in \mathbb{R}$ *??? ebenso*

Beachte:
Optimalwert gibt es nur einen, Optimallösungen u.U. viele!

Oft wird Optimalwert/lösung mit einem $*$ gekennzeichnet, z.B.:

$$f^* = f(x^*) = \inf_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

Es bezeichnet

- $x^* = \mathrm{argmin}\{f(x) : x \in \mathcal{X}\}$ die eindeutige Optimallösung (wenn wir schon wissen, dass es genau eine gibt),
- $\mathrm{Argmin}\{f(x) : x \in \mathcal{X}\}$ die Menge aller Optimallösungen (diese kann auch leer sein).

Optimal ist nicht steigerungsfähig,
„noch optimaler“ ist sinnlos und schlechter Sprachgebrauch!

Inhaltsübersicht für heute:

Überblick über spezielle Klassen von Optimierungsproblemen

Verfahren gibt es nur für eingeschränkte Problemklassen, diese unterscheiden sich nach

- den Eigenschaften der Funktionen f, g_i, h_i
- den Eigenschaften der Grundmenge Ω
- der Form, in der die Problemdaten gegeben sind
- den Ansprüchen an die Lösung (lokal/global/multikriteriell)

Verfahren/Löser für viele wichtige Problemklassen gibt es auf dem

NEOS Server for Optimization

Nichtlineare Optimierung (NonLinear Programming)

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & f(x) & \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} \\ & g_i(x) \le 0 & i \in \mathcal{I} \\ & x \in \Omega & \end{array}$$

$f,\ g_i,\ h_i$	„hinreichend glatt“, $C_1(\mathbb{R}^n)$ oder $C_2(\mathbb{R}^n)$,
	d.h., mindestens einmal oder zweimal stetig differenzierbar,
$\mathcal{E}$ und $\mathcal{I}$	endliche Mengen (unendlich: „Semiinfinite Opt.“)
	falls $\mathcal{E} = \mathcal{I} = \emptyset$: freie/unrestringierte Optimierung
	sonst restringierte Optimierung oder Opt. mit Nebenbed.
$\Omega = \mathbb{R}^n$	(meist)
Ziel:	lokales Optimum (aber oft schon Zulässigkeit schwer!)
Anw.:	Optimalsteuerung, Shape Optimization,
	Parameterschätzung (nichtlin.),
	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme, ...
Verf.:	für lokal gute Konvergenz: Newton, Quasinewton, ...
	zur Suche lokaler Mulden: Line-Search, Trust-Region, CG, ...
Input:	Unterroutinen für Funktionswert, Gradient, (Hessematrix)
Größe :	einige 100 bis einige 1000 Variablen (mehr bei spez. Struktur)

Konvexe Optimierung (Convex Optimization)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & f(x) \\ \text{unter} & Ax = b \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i \in \mathcal{I} \\ & x \in \Omega \end{array}$$

f, g_i	konvexe Funktionen
$Ax = b$	nur lineare Gleichungsnebenbedingungen! falls f, g_i glatt $\rightarrow$ smooth convex opt. falls f, g_i nicht notw. diffb. $\rightarrow$ nonsmooth convex opt.
$\mathcal{I}$	endliche Menge
$\mathcal{C}$	„einfache“ konvexe Menge (Box[=Intervall], $\mathbb{R}^n$, ...)

Ziel:	globales Optimum
Anw.:	Portfolio Design, Experimental Design, Optimalsteuerung, Signal Processing, Berechnung von Schranken für nichtlineare Probleme, ...
Verf.:	smooth: Newton, Quasinewton, ... nonsmooth: Subgradienten-, Bündel-Verfahren
Input:	Unterroutinen für Funktionswert, (Sub)Gradient, (Hessematrix)
Größe :	einige 100 bis einige 10000 Var. (mehr bei spez. Struktur)

Konvexe Opt. mit Struktur (Structured Convex Opt.)

Minimiere	$q(x)$
unter	$Ax = b$
	$x \in \mathcal{K}$

$q(\cdot)$	lineare (affine) oder konvex-quadratische Zielfunktion
	$q(x) = c^T x$ $(+\frac{1}{2}x^T Qx$ mit Q symmetrisch positiv semidefinit)
$Ax = b$	lineare Gleichungs- oder auch Ungleichungsnebenbedingungen
$\mathcal{K}$	konvexe Kegel spezieller Struktur
	q linear, $\mathcal{K} = R^n_+$: Lineare Opt. (Linear Programming)
	q linear, $\mathcal{K} = \mathcal{Q}^n_+$: Second Order Cone Opt. (SOCP)
	q linear, $\mathcal{K} = S^n_+$: Semidefinite Opt. (SemiDefnite P.)
	q quadrat., $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$: (Konvexe) Quadratische Opt. (QP)
Ziel:	globales Optimum in „kurzer“ Zeit
Anw.:	Portfolio Design, Experimental Design, Optimalsteuerung, Signal Processing, Berechnung von Schranken für ganzz. Probleme, ...
Verf.:	LP, SOCP, SDP, QP: Innere-Punkte-Verf. (Newton)
	LP: Simplex
Input:	Koeffizienten der Matrizen und Vektoren (evtl. Kegeltyp)
Größe :	einige 1000 bis Millionen Variablen

Ganzzahlige Optimierung (Integer Programming)

Minimiere	$c^T x$
unter	$Ax \leq b$
	$x \in \mathbb{Z}^n$

$c^T x$	lineare Zielfunktion
$Ax \leq b$	lineare Gleichungs- oder auch Ungleichungsnebenbedingungen
$x \in \mathbb{Z}^n$	nur ganzzahlige Lösungen! verwandte Varianten:
	Binary Integer P.: $x \in \{0,1\}^n$ (≈ kombinatorische Opt.)
	Mixed Integer P.: $x \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}$
	Mixed Integer NonLinear P.: f, g_i, h_i nichtlin.
Ziel:	sehr problemabhängig (meist NP-schwer), „gute“ Lösung mit Gütegarantie
Anw.:	Probleme mit Entscheidungskomponenten, z.B., Flüsse in Netzwerken, Zuweisungs-, Transport-, Standortprobleme, VLSI-Design, Basisauswahl, ...
Verf.:	konvexe/lineare Relaxation und lokale Suche/Rundungsheuristiken, exakte Lösung durch „Branch and Bound“ (effiz. Enumerieren), für sehr spezielle Probleme: exakte Algorithmen
Input:	von Koeffizienten der Matrizen bis hin zu Struktur-nutzenden Zusatzroutinen
Größe :	extrem problemabhängig, von unter 100 bis zu Millionen

Globale Optimierung (Global Optimization)

$$\begin{array}{lll} \text{Minimiere} & f(x) & \\ \text{unter} & h_i(x) = 0 & i \in \mathcal{E} \\ & g_i(x) \leq 0 & i \in \mathcal{I} \\ & x \in \Omega & \end{array}$$

f, g_i, h_i	hinreichend glatt von bekannter Struktur (z.B. Polynome) so dass auf Intervallen Unterschätzer konstruierbar sind
$\mathcal{E}$ und $\mathcal{I}$	(kleine) endliche Mengen
Ω	„einfache“ konvexe Menge (Box)
Ziel:	globales Optimum (!!! i.A. zu schwer, nur sehr kleine Dimension!!!)
Anw.:	kleine nichtlineare Optimalsteuerungsprobleme ...
Verf.:	Branch and Bound: pro Intervall der Unterteilung untere Schranken durch Lösung konvexer Relaxation und obere Schranken durch NLP-Löser
Input:	algebraische Beschreibung der Funktionen
Größe :	etwa 10-30 Variable (je nach spez. Struktur u.U. auch mehr)

Einige weitere Klassen/Forschungsgebiete

Meist durch spezielle Anwendungsforderungen motiviert:

Multikriterielle Optimierung (Mehrziel-Opt.):

- Bspe: Portfolio soll Gewinn maximieren und Risiko minimieren, Auto soll möglichst schnell mit möglichst wenig Treibstoff fahren, größte Stabilität bei geringstem Materialeinsatz, etc.
- Darstellung konkurrierende Ziele werden durch $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine durch einen spitzen Kegel induzierte Partialordnung auf $\mathbb{R}^m$.
- „Pareto-optimale Lösung“: bzgl. Partialordnung nicht verbesserbar
- Für m klein, Berechnung der „Paretofront“, sonst Rückführung auf Standardverf. durch Skalarisierung (gewichtete Linearkombination) oder lexikographisches Optimieren mittels neuer Nebenbedingungen

Ableitungsfreie Optimierung (derivative-free opt.):

- Es ist jeweils nur $f(x)$ bestimmbar (wird durch Simulation, Messung, Bohrung, etc. ermittelt), aber keine Ableitungsinformation
- $f(x)$ billig: numerisches Differenzieren oder Verf. von Nelder-Mead
- $f(x)$ teuer: Modellerstellende Verfahren (Kriging, Powell, ...)

Einige weitere Klassen/Forschungsgebiete

Stochastische Optimierung:

- Statistische Daten in Entscheidungen einbeziehen: Ein-/Ausschalten von Kraftwerken für stochstisches Verbrauchsmodell, Portfoliooptimierung für stochastische Finanzmodelle, Logistik-Optimierung nach stochastischem Bedarfsmodell
- oft Einteilung in gewichtete mehrstufige Szenarien, rekursives Lösen mit Standardverfahren

Robuste Optimierung:

- Gegen Datenunsicherheit, Mindestanforderungen, oder Ungenauigkeiten in der realen Umsetzung absichern: leichteste Brücke für unterschiedliche Lasten, Entwurf von Antennen-Arrays, Mindestproduktionskapazitäten bei Maschinenausfällen
- geschickte Modellierung erlaubt oft den Einsatz von Standardverfahren

Inhaltsübersicht für heute:

Lineare Optimierung

Zwei typische Schreibweisen für ein „Lineares Programm“ (LP)

LP in Standardform

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

LP in kanonischer Form

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Wenn nicht anders erwähnt, dann $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$x \geq 0$ und $Ax \geq b$ sind jeweils elementweise zu vestehen,
also $x \geq 0 :\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots n\}$

Egal ob man

- minimieren oder maximieren will,
- Gleichungen oder Ungleichungen hat,
- Variablen mit oder ohne Nichtnegativitätsbedingungen hat,

man kann jedes LP in so eine Form bringen.

Umformen von LPs

- maximieren → minimieren:

  $\max c^T x \text{ s.t. } Ax = b, x \geq 0 \Leftrightarrow -\min(-c)^T x \text{ s.t. } Ax = b, x \geq 0$

- Gleichungen → Ungleichungen:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

- Ungleichungen → Gleichungen: durch Schlupfvariablen $s \geq 0$

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & [A, I] \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = b \\ & x \geq 0, s \geq 0 \end{array} \qquad [I \text{ Identität}]$$

- Statt jeder freien Variable $x_i \in \mathbb{R}$ zwei vorzeichenbeschränkte:

$$x_i^+ \geq 0 \text{ und } x_i^- \geq 0 \;\text{ mit }\; x_i = x_i^+ - x_i^-$$

Kleines Beispiel zur Illustration: Mozart-Problem

Maximiere den Gewinn bei Produktion von Mozart-Kugeln und -Talern:

	Marzipan	Nougat	Edelherb	Gewinn
Pro Kugel:	2 Teile	1 Teil	1 Teil	3 Euro
Pro Taler:	1 Teil	1 Teil	2 Teile	2 Euro
verfügbar:	10 Teile	6 Teile	9 Teile	

Variablen:

x_K ... Anzahl Kugeln

x_T ... Anzahl Taler

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_K + 2x_T \\ \text{s.t.} & 2x_K + 1x_T \leq 10 \\ & 1x_K + 1x_T \leq 6 \\ & 1x_K + 2x_T \leq 9 \\ & x_K \geq 0, x_T \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} -\min & [-3, -2, 0, 0, 0]x \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \qquad [x \in \mathbb{R}^5_+] \end{array}$$

Anwendung: Tschebyscheff-Approximation

Mathematisches Problem: Minimiere $\|Ax - b\|_\infty$ über $x \in \mathbb{R}^n$

[$\|\bar{b}\|_\infty := \max_{i=1,\dots,m} |\bar{b}_i|$ ist die Unendlich-Norm]

$\rightarrow$ $\min s$ s.t. $-\mathbf{1}s \leq Ax - b \leq \mathbf{1}s$ $\quad \mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$

Anwendung z.B. in der Filtersynthese (hier stark vereinfacht):

Eine gewünschte Impulsantwort (Funktion) $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ soll möglichst gut durch gewichtete Addition verfügbarer Impulsantworten $h_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ dargestellt werden.

Modellierung:
Variable $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ als Gewicht von h_i,
Diskretisierung von $[0,1]$ z.B. in Schritte $t_j = j/h$, $j = 0, \dots, h$

$$\begin{array}{ll} \min & s \\ \text{s.t.} & -s \leq h(t_j) - \sum_{i=1}^n x_i h_i(t_j) \leq s \qquad j = 0, \dots, h \\ & x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ähnlich: 1-Norm Minimierung

Mathematisches Problem: Minimiere $\|Ax - b\|_1$ über $x \in \mathbb{R}^n$

$[\|\bar{b}\|_1 := \sum_{i=1}^m |\bar{b}_i|$ ist die 1-/Manhattan-Norm$]$

$$\rightarrow \qquad \min \mathbf{1}^T s \;\; \text{s.t.} \; -Is \leq Ax - b \leq Is$$

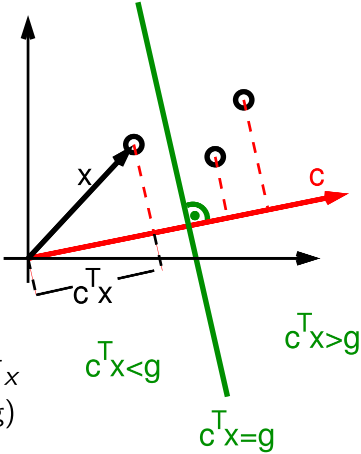
Geometrische Interpretation: WH Skalarprodukt $c^T x$

$c^T x = \|c\| \|x\| \cos \alpha$
mit α Winkel zw. c und x.

Für $\|c\| = 1$ ist (wie im Bild) $c^T x$ die Länge der Projektion von x auf die Gerade $\{\gamma c : \gamma \in \mathbb{R}\}$

$\{x : c^T x \leq \gamma\}$ ist der Halbraum aller Punkte, deren Projektion auf c kleiner gleich γ ist.

c ist Gradient der linearen Fkt. $c^T x$ (zeigt in Richtung steilster Anstieg)



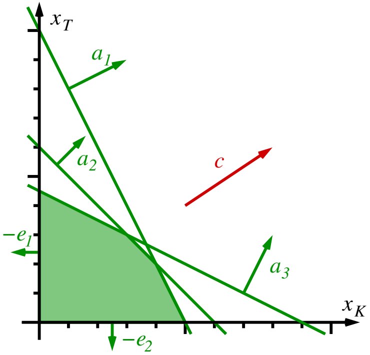
Für $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$ ist Zeile j von $Ax \leq b$ gerade $a_j^T x \leq b_j$

Geometrische Interpretation: am Mozart-Problem

Wegen $x_K \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -x_K \leq 0$ ist

$$\begin{array}{ll} \max & \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} x \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ x_T \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

wieder das Mozart-Problem.



Definition

Ein *Polyeder* *ist der Schnitt endlich vieler Halbräume.*

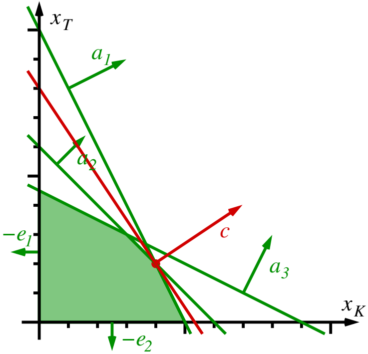
Die zulässige Menge jedes LPs ist also ein Polyeder.

Geometrische Interpretation: Optimallösung

Wegen $x_K \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -x_K \leq 0$ ist

$$\begin{array}{ll} \max & \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} x \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ x_T \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

wieder das Mozart-Problem.

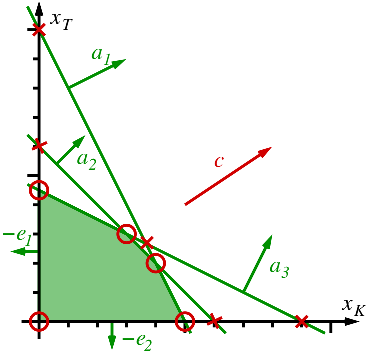


„Offensichtlich" ist eine Ecke des Polyeders eine Optimallösung,
sie erfüllt Dimension viele Ungleichungen mit Gleichheit, hier:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow x_K = 4, x_T = 2$$

Interpretation einer Ecke in Standardform

$$\begin{array}{ll} \max & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \\ & x_K \geq 0, x_T \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0 \end{array}$$



In dieser Darstellung $n = 5,\ m = 3$

Jeder Ungleichung ist genau eine Schlupfvariable zugeordnet!
(x_K für $x_k \geq 0$ und x_T für $x_T \geq 0x$)

Wegen der m Gleichungen hat das Polyeder Dimension $\leq n - m$.
Für eine Ecke müssen $n - m$ weitere Ungleichungen als Gleichungen gewählt werden ($\Leftrightarrow$ Schlupfvariablen auf 0 setzen), so dass diese eindeutig einen Punkt festlegen, und für diesen der Wert der anderen Schlupfvariablen (=„Abstand“ zur Ungleichung) nichtnegativ ist.

Inhaltsübersicht für heute:

Der Simplex-Algorithmus (für Standardform)

Gegeben $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, bestimme

$$\min c^T x \text{ s.t. } Ax = b, x \geq 0$$

Idee: Gehe von der aktuellen Ecke zu einer benachbarten besseren.

Notation: Für $B \in \{1, \dots, n\}^m$ sei $A_B := [a_{iB(j)}]_{i,j=1,\dots,m}$.
Wir fassen B auch als Menge von Spaltenindices auf.

Definition

Eine Spaltentupel $B \in \{1, \dots, n\}^m$ mit A_B regulär heißt Basis und $N := \{1, \dots, m\} \setminus B$ Nichtbasis.
Ist zusätzlich $A_B^{-1} b \geq 0$ heißt die Basis zulässig.

$$Ax = b \qquad \rightarrow \qquad A_B x_B + A_N x_N = b$$

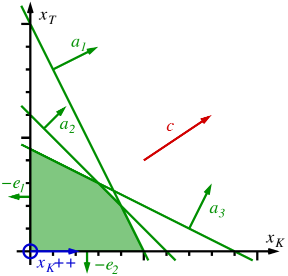
Die Nichtbasisvariablen x_i, $i \in N$, werden auf 0 gesetzt,
die Basisvariablen x_i, $i \in B$, durch $x_B = A_B^{-1} b$ bestimmt.

Eine benachbarte bessere Ecke finden

B sei nun eine zulässige Basis, also

$$0 \leq \bar{x}_B := A_B^{-1}(b - A_N \bar{x}_N) \quad \text{für} \quad \bar{x}_N := 0$$

Benachbarte Ecke: Eine Gleichung $x_i = 0$ mit $i \in N$ aufgeben und x_i vergrößern bis die nächste Ungleichung erreicht wird.



Veränderung der Zielfunktion abhängig von x_N:

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N \;=\; c_B^T A_B^{-1} b \;+\; \underbrace{(c_N - A_N^T A_B^{-T} c_B)}_{=:\bar{z}_N}{}^T x_N$$

Die reduzierten Kosten $\bar{z}_N$ zeigen die Veränderung abh. von x_N an.

Ist $\bar{z}_N \geq 0 \Rightarrow$ Ecke nicht verbesserbar, Optimallösung gefunden.

Sonst wähle im Pricing-Schritt ein $\hat{\imath} \in N$ mit $\bar{z}_{\hat{\imath}} < 0$
$\rightarrow x_{\hat{\imath}}$ ist die (in die Basis) eintretende Variable und wird vergrößert.

Zur Zulässigkeit muss $x_B = A_B^{-1}(b - A_{\hat{\imath}} x_{\hat{\imath}}) \geq 0$ bleiben,

$$\text{mit } \bar{w} := A_B^{-1} A_{\hat{\imath}} \quad \text{muss} \quad w x_{\hat{\imath}} \leq \bar{x}_B \quad \text{erfüllt sein.}$$

Ist $\bar{w} \leq 0$ darf $x_{\hat{\imath}}$ beliebig groß werden $\Rightarrow$ Problem unbeschränkt.
Sonst wähle im Ratio-Test

$$\hat{\jmath} \in \operatorname*{Argmin}_{j=1,\ldots,m} \left\{ \frac{\bar{x}_{B(j)}}{\bar{w}_j} : \bar{w}_j > 0 \right\}$$

$x_{B(\hat{\jmath})}$ ist die (aus der Basis) austretende Variable.
Sie wird nun im Basisaustauschschritt durch $x_{\hat{\imath}}$ ersetzt,

$$N \leftarrow N \setminus \{\hat{\imath}\} \cup \{B(\hat{\jmath})\}, \;\; B(\hat{\jmath}) \leftarrow \hat{\imath},$$

und der Algorithmus wird von dieser neuen Ecke aus fortgesetzt.

Das (primale revidierte) Simplex-Verfahren

Input: zulässige Basis B, $\bar{x}_B = A_B^{-1} b$

1. BTRAN: Bestimme $\bar{y} := A_B^{-T} c_B$ durch Lösen von $A_B^T y = c_B$.
2. PRICE: $\bar{z}_N := c_N - A_N^T \bar{y}$, ist $z_N \geq 0$, STOP (Optimallösung), sonst wähle $\hat{\imath} \in N$ mit $z_{\hat{\imath}} < 0$.
3. FTRAN: Bestimme $\bar{w} := A_B^{-1} A_{\hat{\imath}}$ durch Lösen von $A_B w = A_{\hat{\imath}}$.
4. RATIO: Ist $\bar{w} \leq 0$, STOP (Problem unbeschränkt), sonst wähle $\hat{\jmath} \in \operatorname{Argmin}_{j=1,\dots,m} \left\{ \frac{\bar{x}_{B(j)}}{\bar{w}_j} : \bar{w}_j > 0 \right\}, \ \xi := \frac{\bar{x}_{B(\hat{\jmath})}}{\bar{w}_{\hat{\jmath}}}$
5. Update: $\bar{x}_B := \bar{x}_B - \xi \bar{w}$, $\bar{x}_{\hat{\imath}} := \xi$, $N := N \setminus \{\hat{\imath}\} \cup B(\hat{\jmath})$, $B(\hat{\jmath}) := \hat{\imath}$, GOTO 1.

(Lösung der Glgssysteme nutzt sparsity etc., nicht invertieren!)

Das Paar $(\hat{\jmath}, \hat{\imath})$ wird auch Pivot-Element genannt.

Endlichkeit und Kreisen

In jeder Iteration mit $\xi > 0$ wird der Zielfunktionswert strikt besser, und der Algorithmus besucht diese Ecke nie wieder.

Ist $\xi = 0$, wechselt man nur zu einer anderen Basisdarstellung derselben Ecke (sie liegt auf mehr als $n - m$ Ungleichungen). Bei ungünstiger Wahl in Pricing und Ratio-Test wird die gleiche Basis später wieder besucht $\rightarrow$ der Algorithmus kreist.

Mit den Auswahlregeln von Bland (wähle aus den erlaubten Variablen jeweils die mit kleinstem Index) wird jede Basis höchstens einmal besucht und der Algorithmus endet nach endlich vielen Iterationen. (In der Praxis nimmt man andere Auswahlregeln und nutzt Bland nur, wenn Kreisen beobachtet wird.)

Hat ein LP zwei unterschiedliche Basen, die den gleichen Punkt beschreiben, nennt man das LP und derartige Basen degeneriert oder entartet. Für entartete LPs kann der Simplex-Algorithmus sehr langsam sein, dann sind Innere-Punkte-Verfahren (s. dort) meist besser.

Finden einer zulässigen Ausgangsbasis

Die 2-Phasen-Methode

Löse in Phase 1 das Hilfsproblem (o.B.d.A. $b \geq 0$)

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{1}^T s \\ \text{s.t.} & Ax + Is = b \\ & x \geq 0, s \geq 0 \end{array}$$

zul. Basis: die Spalten von s

Ist Optimalwert$=0$ $\rightarrow$ zul. Basis des Originalproblems gefunden, löse diese in Phase 2.

Liefert überprüfbaren Nachweis (Zertifikat) für (Un-)Zulässigkeit!

Die Big-M Methode (o.B.d.A. $b \geq 0$)

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + M\mathbf{1}^T s \\ \text{s.t.} & Ax + Is = b \\ & x \geq 0, s \geq 0 \end{array}$$

zul. Basis: die Spalten von s

Ist $M > 0$ groß genug, werden die $s_i = 0$

Vorteil: sucht gleich gute Basis
Nachteil: Wie groß muss M sein?

In Standard-Software muss man sich darum nicht kümmern!

Mit dem Simplex-Algorithmus zeigt man

Satz (Hauptsatz der Linearen Optimierung)

Hat ein LP in Standardform einen endlichen Optimalwert, so wird dieser auch in einer Ecke angenommen.