Wiederholung des Simplexalgorithmus' am Beispiel des Mozartproblems

Wir betrachten das Mozartproblem aus der Vorlesung:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_K + 2x_T \\ \text{s.t.} & 2x_K + 1x_T \leq 10 \\ & 1x_K + 1x_T \leq 6 \\ & 1x_K + 2x_T \leq 9 \\ & x_K, x_T \geq 0 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ll} \min & -3x_K - 2x_T \\ \text{s.t.} & 2x_K + 1x_T \leq 10 \\ & 1x_K + 1x_T \leq 6 \\ & 1x_K + 2x_T \leq 9 \\ & x_K, x_T \geq 0 \end{array}$$

Einführung von Schlupfvariablen führt auf:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_K + 2x_T + 0x_{s_1} + 0x_{s_2} + 0x_{s_3} \\ \text{s.t.} & 2x_K + 1x_T + 1x_{s_1} \hphantom{+ 1x_{s_2} + 1x_{s_3}} = 10 \\ & 1x_K + 1x_T \hphantom{+ 1x_{s_1}} + 1x_{s_2} \hphantom{+ 1x_{s_3}} = 6 \\ & 1x_K + 2x_T \hphantom{+ 1x_{s_1} + 1x_{s_2}} + 1x_{s_3} = 9 \\ & x_K, x_T, x_{s_1}, x_{s_2}, x_{s_3} \geq 0 \end{array}$$

bzw.

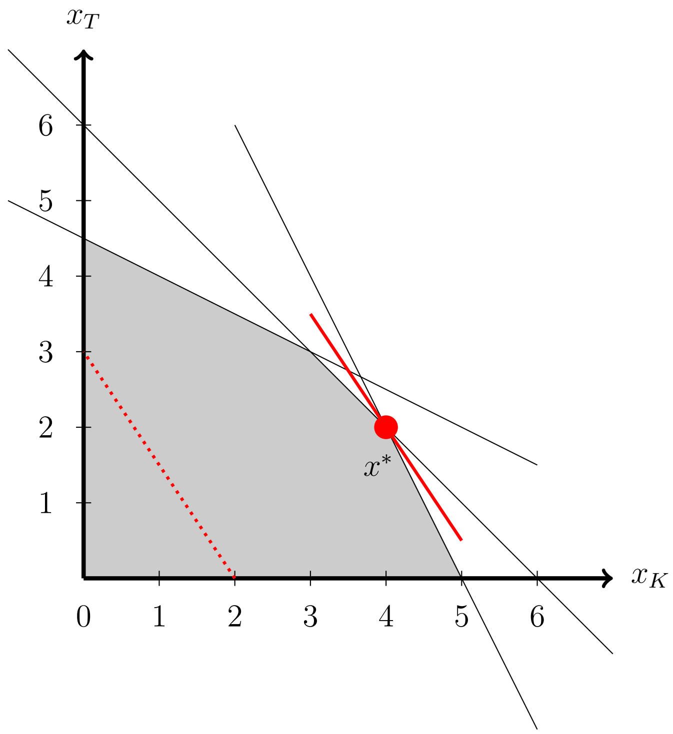
$$\begin{array}{ll} \min & -3x_K - 2x_T - 0x_{s_1} - 0x_{s_2} - 0x_{s_3} \\ \text{s.t.} & 2x_K + 1x_T + 1x_{s_1} \hphantom{+ 1x_{s_2} + 1x_{s_3}} = 10 \\ & 1x_K + 1x_T \hphantom{+ 1x_{s_1}} + 1x_{s_2} \hphantom{+ 1x_{s_3}} = 6 \\ & 1x_K + 2x_T \hphantom{+ 1x_{s_1} + 1x_{s_2}} + 1x_{s_3} = 9 \\ & x_K, x_T, x_{s_1}, x_{s_2}, x_{s_3} \geq 0 \end{array}$$

Anders aufgeschrieben:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, c_{\max} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, c_{\min} = -c_{\max}$$

Als zulässige Startbasis nehmen wir $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, d. h. $x_K = x_T = 0, x_{s_1} = 10, x_{s_2} = 6, x_{s_3} = 9$. Im Folgenden schreiben wir oft $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T$ statt $x = \begin{bmatrix} x_K & x_T & x_{s_1} & x_{s_2} & x_{s_3} \end{bmatrix}^T$

Graphische Darstellung:



Simplex im Tableau

Nummer	BV	c_B	x_1 3	x_2 2	x_3 0	x_4 0	x_5 0	x_B	θ
1	x_3	0	$\boxed{2}$	1	1	0	0	10	$\boxed{5}$
2	x_4	0	1	1	0	1	0	6	6
3	x_5	0	1	2	0	0	1	9	9
4			$\boxed{-3}$	-2	0	0	0	0	
1	x_1	3	1	1/2	1/2	0	0	5	10
2	x_4	0	0	$\boxed{1/2}$	-1/2	1	0	1	$\boxed{2}$
3	x_5	0	0	3/2	-1/2	0	1	4	8/3
4			0	$\boxed{-1/2}$	3/2	0	0	15	
1	x_1	3	1	0	1	-1	0	4	
2	x_2	2	0	1	-1	2	0	2	
3	x_5	0	0	0	1	-3	1	1	
4			0	0	1	1	0	16	

Simplex aus Vorlesung - Minimierungsproblem

1. (i) Basis $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 9 \end{bmatrix}^T$, $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

   (ii) BTRAN: $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

   (iii) PRICE: $\bar{z}_N = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$

   Wählen $\hat{i} = 1$ (geringste reduzierte Kosten) $\Rightarrow x_1$ geht in die Basis

   (iv) FTRAN: $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (v) RATIO: Bestimme $\hat{j}$: $\frac{\bar{x}_{B(1)}}{\bar{w}_1} = \frac{10}{2} = 5$, $\frac{\bar{x}_{B(2)}}{\bar{w}_2} = \frac{6}{1} = 6$, $\frac{\bar{x}_{B(3)}}{\bar{w}_3} = \frac{9}{1} = 9 \Rightarrow \hat{j} = 1, \xi = 5$ $\Rightarrow x_3$ verlässt die Basis

   (vi) Update: $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $x_1 = 5$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. (i) Basis $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$

   (ii) BTRAN: $\bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-T} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   (iii) PRICE: $\bar{z}_N = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

   Wählen $\hat{i} = 2$ (negative reduzierte Kosten) $\Rightarrow x_2$ geht in die Basis

   (iv) FTRAN: $\bar{w} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

(v) RATIO: Bestimme $\hat{j}$: $\frac{\bar{x}_{B(1)}}{\bar{w}_1} = \frac{5}{0.5} = 10$, $\frac{\bar{x}_{B(2)}}{\bar{w}_2} = \frac{1}{0.5} = 2$, $\frac{\bar{x}_{B(3)}}{\bar{w}_3} = \frac{4}{1.5} = 8/3 \Rightarrow \hat{j} = 2, \xi = 2 \Rightarrow x_4$ verlässt die Basis

(vi) Update: $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $x_2 = 2$, $N = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$

3. (i) Basis $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $N = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$

(ii) BTRAN: $\bar{y} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$

(iii) PRICE: $\bar{z}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow z_N \geq 0 \Rightarrow$ Optimallösung gefunden

Optimallösung $x = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $x_K = 4, x_T = 2$