TU Chemnitz
C. Helmberg

Chemnitz, 23. Juni, 2006
abzugeben am 7. Juli, 2006

Nichtlineare Optimierung
Übung 6

1. (2 Punkte) Bestimme analytisch für $c \in \mathbb{R}^n$ die Optimallösungen des Problems

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i - c^T x, \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ & x > 0. \end{array}$$

2. (4 Punkte) Zeige: Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{h \times n}$ mit $\text{Rang}(B) = h$ ist genau eines der beiden Systeme (a) und (b) lösbar:
(a) $Ad < 0$, $Bd = 0$,
(b) $A^T\lambda + B^T\mu = 0$ mit $(\lambda, \mu) \neq 0$ und $\lambda \geq 0$.
Hinweis: Farkas Lemma

3. (4 Punkte) Zeige, dass die Definition von (MFCQ) über die Bedingungen
   (i) die Gradienten $\nabla c_i(\bar{x})$, $i \in \mathcal{E}$ sind linear unabhängig,
   (ii) es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$ so dass $\nabla c_i(\bar{x})^T d = 0\ \forall i \in \mathcal{E}$ und $\nabla c_i(\bar{x})^T d < 0\ \forall i \in \mathcal{A}(\bar{x}) \cap \mathcal{I}$,

   äquivalent zur Definition der Vorlesung (aus $\sum_{i \in \mathcal{A}(\bar{x})} \alpha_i \nabla c_i(\bar{x}) = 0$ mit $\alpha_i \geq 0$ für $i \in \mathcal{A}(\bar{x}) \cap \mathcal{I}$ folgt $\alpha_i = 0$ für $i \in \mathcal{A}(\bar{x})$) ist.

4. (4 Punkte) Zeige, im Beweis von Satz IX.13, die Regularität der Matrix

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x^*) - \sum \lambda_i^* \nabla^2 c_i(x^*) & -[\nabla c_1(x^*), \ldots, \nabla c_m(x^*)] \\ [\nabla c_1(x^*), \ldots, \nabla c_m(x^*)]^T & 0 \end{bmatrix}.$$

5. (6 Punkte) Bestimme für das folgende quadratische Programm in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T Q x - bx \\ \text{s.t.} & x_1 + 1 \geq 0 \\ & -x_1 + 1 \geq 0 \\ & x_2 + 1 \geq 0 \\ & -x_2 + 1 \geq 0\ . \end{array}$$

   die Optimallösungen, deren Lagrange-Multiplikatoren und die (stark/schwach) aktiven Indexmengen für die Fälle

   $(a)\quad Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad (b)\quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

   $(c)\quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

   Versuche in jedem einzelnen Fall für eine kleine Verschiebung der rechten Seite der Nebenbedinungen um ein $d \in \mathbb{R}^4$ mittels des Beweises aus Satz IX.13 die Änderung der Optimallösung und ihres Wertes zu bestimmen.