TU Chemnitz
C. Helmberg

Chemnitz, 2. Juni, 2006
abzugeben am 16. Juni, 2006

# Nichtlineare Optimierung
## Übung 5

1. (4 Punkte) Zeige im Beweis von Satz VI.1 (inexaktes Newton-Verfahren), dass lineare / superlineare / quadratische Konvergenz der Gradienten gegen Null äquivalent zur linearen / superlinearen / quadratischen Konvergenz der Punkte gegen $x^*$ in der $[\nabla^2 f(x^*)]^2$-Norm ist.

2. (4 Punkte) Zeige, dass die im Line-Search Newton-CG Verfahren erzeugte Schrittrichtung immer auch Abstiegsrichtung ist.

3. (5 Punkte) Nichtlineare Gleichungssyteme: Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von der Form
$$F(x) = \begin{pmatrix} x^T A_1 x + b_1^T x + c_1 \\ x^T A_2 x + b_2^T x + c_2 \end{pmatrix}.$$
mit $A_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, $b_i \in \mathbb{R}^2$, $c_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1,2\}$ und Jacobimatrix $J(x)$. Es bezeichne $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : J(x) \text{ nicht regulär}\}$ die Menge der degenerierten Punkte. Gib, falls möglich, ein Beispiel für die Koeffizienten $A_i$, $b_i$, $c_i$ an, so dass
(a) (1/2 Punkt)$D = \emptyset$ (b) (1/2 Punkt) $D = \mathbb{R}^2$ (c) (3 Punkte) $|D| = 1$
(d) (1 Punkt) $D = \{x : a_1^T x = 0\} \cup \{x : a_2^T x = 0\}$ für beliebige $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$.

4. (4 Punkte) Bestimme Tangentialkegel und linearisierten Tangentialkegel für den Punkt $(1,0,0)$ des Optimierungsproblems
$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & \frac{1}{2} x^T A x \le b_1 \\ & a^T x \le b_2 \\ & x \in \mathbb{R}^3 \end{array} \quad \text{mit } c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Wie sieht die Menge der Optimallösungen aus? Welches Problem besteht bezüglich der Lagrange-Multiplikatoren? Gib eine andere Beschreibung der zulässigen Menge, für die immer Lagrange-Mulitplikatoren existieren.

5. (3 Punkte) Ein Problem der Form
$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g(x) \le 0,\ h(x) = 0, \\ & G(x) \ge 0,\ H(x) \ge 0,\ G(x)^T H(x) = 0 \end{array} \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \\ G, H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^M \end{array}$$
wird Optimierungsproblem mit Gleichgewichtsrestriktionen (*mathematical program with equilibrium constraints*, MPEC) genannt. Zeige, dass LICQ in keinem zulässigen Punkt des MPECs erfüllt ist.