TU Chemnitz
C. Helmberg

Chemnitz, 12. Mai, 2006
abzugeben am 26. Mai, 2004

Nichtlineare Optimierung
Übung 4

1. (4 Punkte) Beweise Lemma III.4 (entlang des dog-leg-Pfades wächst die Schrittlänge und fällt der Modellwert, falls $B \succ 0$).

2. (2 Punkte) Es bezeichne p_{k+1} die vom linearen CG-Algorithmus in der k-ten Iteration erzeugte Suchrichtung für $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ mit $A \succ 0$. Zeige, dass p_{k+1} jeweils Abstiegsrichtung ist.

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit und die Vektoren $p_0, \ldots, p_{n-1} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ seien konjugiert bezüglich A. Zeige:

   (a) (1 Punkt) Die Vektoren $p_0, \ldots, p_{n-1}$ sind linear unabhängig.

   (b) (3 Punkte) Für das Minimierungsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ und einen beliebigen Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert die durch die Iterationsvorschrift
   $$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad \text{mit} \quad r_k = Ax_k - b \quad \text{und} \quad \alpha_k = -\frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$$
   gegebene Folge der x_k in höchstens n Schritten gegen das Optimum x^* und es gilt $x^* = \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{p_i^T b}{p_i^T A p_i}) p_i$.

   (c) (2 Punkte) Die Punkte x_k aus (b) erfüllen
   $$x_{k+1} = \arg \min_{x\in\{x_0\}+\operatorname{span}\{p_0,\ldots,p_k\}} \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x.$$

4. (2) Beweise Korollar IV.2.

5. (6) Das Projizierte-Gradienten-Verfahren von Rosen: Zeige, dass für das Problem
   $$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad Ax = b$$
   ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ habe vollen Zeilenrang) die Suchrichtung $p = -(I - A^T(AA^T)^{-1}A)\nabla f(x)$ für zulässiges x eine zulässige Abstiegsrichtung liefert, wenn es eine gibt (Hinweis: $I - A^T(AA^T)^{-1}A$ ist die Projektionsmatrix auf den Nullraum von A). Entwerfe, basierend auf dieser Suchrichtung, ein global konvergentes Verfahren für dieses Problem (unter geeigneten Voraussetzungen an f).