TU Chemnitz
C. Helmberg

Chemnitz, 28. April, 2004

Nichtlineare Optimierung
Übung 3

1. (4 Punkte) Vervollständige den Beweis der Kantorovich Ungleichung: Für $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ gilt
$$\max_{\xi_i \geq 0, \sum \xi_i = 1} \Big(\sum_{i=1}^n \xi_i \lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{1}{\lambda_i}\Big) = \frac{1}{4} \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n}.$$

2. (2 Punkte) Zeige, dass Steilster-Abstieg mit exaktem Line-Search für das Problem $\min f(x,y)$ mit $f(x,y) = \frac{cx^2+y^2}{2}$, $\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad 0 < c < 1$ und Startpunkt $x_0 = (1, c)$ die Punktfolge
$$x_k = (q^k, (-1)^k c q^k), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$
mit $q = \frac{1-c}{1+c}$ erzeugt. Wie viele Schritte werden benötigt, um für $c = 10^{-3}$ auf 10^{-6} genau an den Optimalpunkt heranzukommen?

3. (4 Punkte) Vervollständige den Beweis von Satz II.7 und zeige
   (a) $\|x_k + p_k - x^*\| = O(\|x_k - x^*\|^2) + o(\|p_k\|) \quad \Rightarrow \quad \|p_k\| = O(\|x_k - x^*\|)$
   (b) $\|x_k + p_k - x^*\| = o(\|x_k - x^*\|) \Rightarrow \|p_k\| = O(\|x_k - x^*\|)$ und $\|p_k - p_k^N\| = o(\|p_k\|)$

4. (2 Punkte) Sei $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix(-variable), für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sei $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$. Zeige:
   (a) Jede $n \times n$ Matrix C lässt sich orthogonal in symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil $C = \frac{1}{2}(C + C^T) + \frac{1}{2}(C - C^T)$ zerlegen, insbesondere gilt $\langle C, X\rangle = \frac{1}{2}\left\langle C + C^T, X\right\rangle$ und $\frac{1}{2}\left\langle C - C^T, X\right\rangle = 0$.
   (b) Für $f(X) = \frac{1}{2}\langle QXQ, X\rangle + \langle H, X\rangle$ mit $Q \succ 0$, $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ führt die streng genommen inkorrekte, aber übliche Schreibweise der Stationarität, $\nabla f(X) = QXQ + \frac{1}{2}(H + H^T) = 0$, auf das richtige Ergebnis.

5. (8 Punkte) Implementiere ein BFGS-Quasi-Newton-Verfahren in Matlab mit Aufruf

```
[xsol]=bfgsnewton(@fun,xstart)
```

unter Nutzung der vorigen Line-Search-Routine, wobei `fun` wieder für eine beliebige differenzierbare Funktion $f(x)$ der Form

```
[fval,fgrad]=function_name(x)
```

mit `fval`$= f(x)$ und `fgrad`$= \nabla f(x)$ steht. Teste es an der Rosenbrock-Funktion.