Technische Universität Chemnitz
M. Winter

Chemnitz, 25. Oktober 2019

Graphentheorie

Übung 2

Begriffe

- Wald, Baum, uv-Weg, Länge eines Weges/Kreises
- Abstand, Durchmesser $\mathrm{diam}(G)$, Radius $\mathrm{rad}(G)$, Zentrum $Z(G)$, Taillenweite $g(G)$,
- Inszidenz-Matrix, Adjazenz-Matrix, Kantenzug, Handschlag-Lemma,
- Kanten-Kontraktion, Minor, Kante durchziehen, topologischer Minor,
- Quotient, Graphen-Isomorphie,
- Spannbaum, Matrix-Gerüst-Satz.

Aufgaben

1. Konstruieren Sie einen nicht-leeren Graphen G, in dem je zwei Knoten verschiedene Grade haben, oder zeigen Sie, dass dies nicht möglich ist. Was wenn G endlich sein soll?
2. Zeigen Sie, dass jeder zusammenhängende Graph einen Spannbaum hat.
3. Es sei G ein Graph und P ein längster Weg in G. Zeigen Sie, dass die Endknoten von P keine Artikulationen sind.
4. Es sei T ein endlicher Baum. Zeigen Sie, dass T mindestens zwei Knoten vom Grad eins hat. Ist $v \in V(T)$ ein solcher Knoten, ist dann $T - v$ immernoch ein Baum?
5. Es sei $G = (V, E)$ ein endlicher nicht-leerer Graph. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   i. G ist ein Baum, d.h. G ist zusammenhägend und jede Kante ist eine Brücke.

   ii. G ist kanten-minimal zusammenhängend.

   iii. G ist kanten-maximal kreisfrei.

   iv. Zu je zwei Knoten $u, v \in V$ gibt es genau einen uv-Weg in G.

   v. G ist zusammenhängend und $|E| \leq |V| - 1$.

   vi. G ist kreisfrei und $|E| \geq |V| - 1$.

6. Zeigen Sie, dass jeder zusammenhägende nicht-leere Graph $G = (V, E)$ der Quotient eines Baumes ist.

   (a) Wählen Sie einen Knoten $v \in V$. Es sei T der wie folgt definierte Graph:

   $$\begin{aligned} V(T) &:= \{\, \text{Wege in } G \text{ mit } v \text{ als Endknoten} \,\}, \\ E(T) &:= \{\{P_1, P_2\} \mid P_1 \subseteq P_2 \text{ und } |P_1| = |P_2| - 1\}. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass T ein Baum ist.

   (b) Es sei $\sim$ die folgende Äquivalenzrelation auf $V(T)$:

   $$P_1 \sim P_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad P_1 \text{ und } P_2 \text{ haben die selben Endknoten.}$$

   Zeigen Sie, dass der Quotient $T/\sim$ isomorph zu G ist.

   (c) Beschreiben Sie den Baum T, wenn

      i. G ein Baum ist.

      ii. G ein Kreis ist.

   (d) Die obige Konstruktion ergibt im Allgemeinen einen Baum T mit enorm vielen Knoten. Geben Sie eine "sparsamere" Konstruktion an. Wie viele Knoten wird ein optimal konstruierter Baum haben?

7. Es sei $G = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender Graph. Zeigen Sie

   $$\operatorname{rad}(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2 \operatorname{rad}(G).$$

8. Es sei $T = (V, E)$ ein Baum mit endlich vielen Knoten. Zeigen Sie

   (a) $\operatorname{rad}(T) = \lceil \operatorname{diam}(T)/2 \rceil$.

   (b) Ist $\operatorname{diam}(T)$ gerade, so enthält $Z(T)$ genau einen Knoten. Ist $\operatorname{diam}(T)$ ungerade, so enthält $Z(T)$ genau zwei adjazente Knoten.

9. Geben Sie Graphen an, in denen $\operatorname{diam}(G) = \operatorname{rad}(G)$ gilt. Kann ein solcher Graph Knoten verschiedener Grade haben?

10. Es sei G ein Multigraph (ungerichtet, ohne Schleifen) mit Knotenmenge $\{1, ..., n\}$. Drücken Sie die folgenden Größen mithilfe der Adjazenzmatrix aus:

    (a) Die Anzahl der Dreiecke in G.

    (b) Für beliebige Knoten $i, j \in V(G)$ die Anzahl der Wege der Länge drei mit Endknoten i und j.