Übungsaufgaben Graphentheorie, Wintersemester 2011/12

Frank Göring

25. Januar 2012

Zusammenfassung

Übungsaufgaben zur Graphentheorievorlesung.

1 Bis 19.10.2011

1. Wir hatten einen Graphen G als *zusammenhängend* bezeichnet, wenn beliebige nichtleere Untergraphen G_1 und G_2, mit $G_1 \cup G_2 = G$ einen nichtleeren Durchschnitt haben.

   (a) Zeigen Sie, die Vereinigung nicht disjunkter zusammenhängender Graphen zusammenhängend ist!

   Zusatz: Seien G_1 und G_2 Graphen mit $\kappa(G_1) \geq k$, $\kappa(G_2) \geq k$ und $|V(G_1 \cap G_2)| \geq k$. Zeigen Sie $\kappa(G_1 \cup G_2) \geq k$!

   (b) Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann zusammenhängend ist, wenn er allein durch Kantenkontraktionen zu einem Knoten zusammengezogen werden kann!

2. Wir hatten u-v Wege definiert als bzgl. "'$\subseteq$" minimal mit der Eigenschaft, zusammenhängend zu sein und u und v zu enthalten. Zeigen Sie, dass diese Definition Äquivalent ist zu jener aus dem Buch "Graphentheorie" von R. Diestel aus dem Abschnitt "Wege und Kreise" des Kapitels "Grundbegriffe"!

3. Zeigen Sie, dass ein Graph genau dann zusammenhängend ist, wenn er zu beliebigen zwei Knoten u und v einen u-v-Weg enthält!

4. Bestimmen Sie die Zusammenhangszahl des Petersen-Graphen!

5. Beweisen Sie, dass ein endlicher Graph genau dann Vereinigung kantendisjunkter Kreise ist, wenn seine Knoten alle positive gerade Valenz haben (*Valenz*, auch *Grad* eines Knotens in einem Graphen: Anzahl der Kanten inzident mit diesem Knoten).

2 Bis 26.10.2011

1. Wieviele (paarweise nichtisomorphe) Bäume mit 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 Knoten gibt es?

2. Das *Zentrum* eines Graphen ist die Menge aller Knoten u für die der maximale Abstand zu einem anderen Knoten des Graphen minimal wird. Dabei ist der Abstand die Länge eines kürzesten im Graphen enthaltenen Weges, also dessen Kantenanzahl.

   Weisen Sie nach, dass das Zentrum eines Baumes stets mindestens einen und höchstens zwei Knoten enthält.

3. Ein Graph ist paar (auch bipartit / zweifärbbar), wenn er Untergraph eines $K_{A,B}$ mit geeigneten (disjunkten Knotenmengen A und B ist.

   Zeigen sie, dass ein Graph genau dann paar ist, wenn alle seine Kreise gerade Länge haben.

4. Zeigen Sie, dass je zwei längste Wege in einem zusammenhängenden Graphen stets einen Knoten gemeinsam haben!

3 Bis 2.11.2011

1. Zwei Kanten mögen im Rahmen dieser Aufgabe als *befreundet in einem Graphen* G gelten, wenn es einen Kreis in G gibt, der beide Kanten enthält.

   Weisen Sie nach, dass damit eine Äquivalenzrelation zwischen den Kanten von G begründet wird!

   Zeigen sie weiter, dass die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation gerade die Kantenmengen der Blocks von G sind!

2. Für welche n und m kann man ein $n \times m$ Quadrat so mit 1×2 Quadraten auslegen, dass lediglich zwei 1×1 Quadrate unbedeckt bleiben, welche in diagonal gegenüberliegenden Ecken liegen?

3. Für welche natürlichen t gilt der Satz von Tutte: Ein Graph G auf $n > t$ Knoten ist genau dann t-zusammenhängend, wenn es eine Folge

   $$G_t, G_{t+1}, \ldots, G_n$$

   mit $G_t = K_t$ und $G_n = G$ derart gibt, dass zu jedem $i \in \{t+1, \ldots, n\}$ eine Kante $xy = e_i \in V(G_i)$ existiert mit $G_i|_{e_i} = G_{i-1}$, $d_{G_i}(x) \geq t$ und $d_{G_i}(y) \geq t$?

4 Bis 9.11.2011

1. Sei G ein dreifach zusammenhängender Graph, $e = \{x, y\} \in E(G)$ eine Kante derart dass $G|_e$ ebenfalls dreifach zusammenhängend ist und C' ein induzierter nicht trennender Kreis in $G|_e$, welcher v_e enthält. Weiter seien v und w die Nachbarn von v_e auf C'. Es ist bekannt, dass $|E(G) \cap \{\{v, x\}, \{v, y\}, \{w, x\}, \{w, y\}\}| < 4$. Weisen sie nach, dass G einen nicht trennenden induzierten Kreis C enthält, der $C|_e = C'$ genügt.

2. Ist G ein Graph, $B \subseteq V(G)$ und $a \in V(G) \setminus B$, so sei eine Menge von $\{a\}$-B-Wegen in G, welche nur den Knoten a gemeinsam haben, als a-B-Fächer bezeichnet. Weisen sie unter Nutzung von Mengers Theorem folgendes Korollar nach: Ist G ein Graph, $B \subseteq V(G)$ und $a \in V(G) \setminus B$, so ist die maximale Anzahl von Wegen in einem a-B-Fächer gleich der minimalen Mächtigkeit einer Menge $T \subseteq V(G) \setminus \{a\}$ derart, dass jeder $\{a\}$-B-Weg einen Knoten aus T enthält.

3. Zwei Wege heißen kreuzungsfrei, wenn keiner einen Knoten des anderen als inneren Knoten (d.h. nicht als Endknoten) enthält. Welche Graphen G mit $\kappa(G) = k$ enthalten zwei Knoten a und b, zwischen denen es keine k kreuzungsfreien Wegen in G gibt?

4. Beweisen sie folgendes Korollar zu Mengers Theorem:

   Seien G ein Graph und a und b verschiedene Knoten von G. Die maximale Anzahl kantendisjunkter a-b-Wege in in einem Graphen G ist gleich der minimalen Mächtigkeit einer Menge $T \subseteq E(G)$ derart, dass jeder a-b-Weg eine Kante aus T enthält.

5 Bis 23.11.2011

1. Leiten Sie eine Defektversion des Heiratssatzes her!

2. Weisen Sie nach, dass jeder 2k-reguläre Graph einen 2-Faktor besitzt!

3. Vervollständigen Sie den Nachweis des Satzes von Tutte über die Existenz eines perfekten Matchings (1-Faktorsatz von Tutte) unter Verwendung des Satzes von Mader.

4. Der Satz von Mader entspricht im Spezialfall der Zweipunktversion des Satzes von Menger. Wie könnte eine Mengenversion des Satzes von Mader aussehen, die als Spezialfall die Mengenversion des Satzes von Menger liefert?

   Anmerkung: Die gesuchte Version wird in Alexander Schrijvers kurzem Beweis des Satzes von Mader auf den 1-Faktorsatz von Tutte zurückgeführt.

6 Bis 30.11.2011

1. Beweisen Sie direkt, dass ein Gebietsrand C eines 3-zusammenhängenden ebenen Graphen G nicht trennend ist. Wählen sie dazu zwei Knotenpunkte a und b aus $G - C$ und wenden Sie notfalls den Satz von Menger auf diese Knotenpunkte an!

2. Verwenden Sie das Lemma über die Gebietsränder dreifach zusammenhängender Graphen für einen Beweis, dass es keinen ebenen $K_{3,3}$, keinen ebenen K_5 und keinen ebenen Petersen-Graphen gibt.

3. Beweisen Sie, dass jeder maximal ebene Graph dreifach zusammenhängend ist.

4. Sei S ein Separator eines maximal ebenen Graphen G. Beweisen Sie, dass $G[s]$ kein Wald ist.

7 Bis 7.12.2011

1. Sei H ein Graph mit Maximalgrad $\Delta(H) \leq 3$ und $H \preceq G$. Zeigen Sie, dass H sogar topologischer Minor von G ist.

2. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jeder planare dreifach zusammenhängende Graph isomorph zu einem ebenen Graphen ist, dessen Gebietsränder sämtlich konvexe Polygone mit Innenwinkeln $< 180°$ an den Knoten sind und dessen Kanten Strecken sind.

   Weisen Sie nach, dass jeder planare Graph isomorph zu einem ebenen Graphen ist, dessen Kanten Strecken sind.

3. Weisen Sie unter Verwendung des eulerschen Polyedersatzes nach, dass jeder planare Graph ein Dreieck oder einen Knoten vom Grad 3 besitzt!

   Hinweis: Legen sie auf jedes Land und jeden Knoten eine geeignete Anzahl Münzen und verteilen Sie diese geschickt auf die Kanten um, um einen Widerspruchsbeweis zu erhalten.

8 Bis 14.12.2011

Zwei Einbettungen G_1 und G_2 eines planaren Graphen G heißen *kombinatorisch äquivalent* wenn die Menge der Untergraphen von G, die als Gebietsränder von G_1 eingebettet werden gleich der Menge der Untergraphen von G ist, die als Gebietsränder von G_2 eingebettet werden.

1. Zeigen Sie, dass für Unterteilungen dreifach zusammenhängender planarer Graphen alle Einbettungen äquivalent sind!

2. Klassifizieren Sie alle Graphen, die wenigstens zwei nicht äquivalente Einbettungen haben.

3. Für welche planaren dreifach zusammenhängenden Graphen (Polyedergraphen) gilt:

   Jede Einbettung U' eines planaren Untergraphen U lässt sich zu einer Einbettung G' von G erweitern?

4. Sei T eine ebene Triangulation und D ein nicht trennender Dreikreis von T. Sei T' aus T erzeugt, indem zwei abstrakte Kopien von T entlang des Dreiecks D identifiziert werden.

   (a) Zeigen Sie, dass T' isomorph zu einer ebenen Triangulation ist.

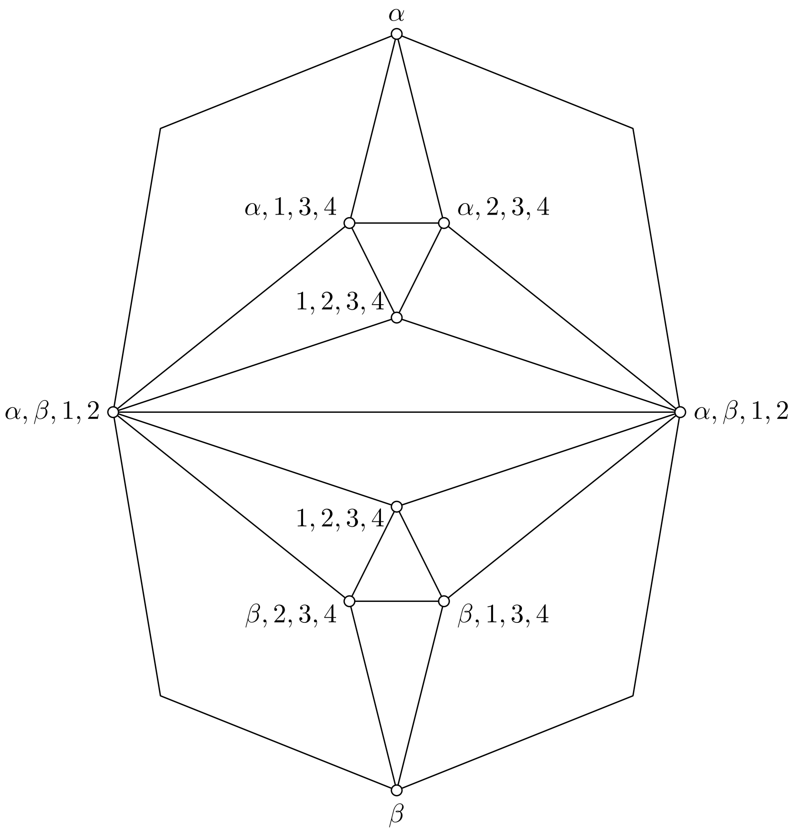
   (b) Zeigen Sie hiermit, dass T eine geradlinige Einbettung in die Ebene hat, bei der D das Außenland berandet.

9 Wiederholung (4.1.2012)

1. Wiederholen Sie die Satzgruppe von Menger.
2. Geben Sie einen Überblick über den Nachweis eines Planaritätskriteriums.
3. Klassifizieren Sie alle zweifach zusammenhängenden Graphen, die wenigstens zwei nicht äquivalente Einbettungen haben.

10 Bis 11.1.2012

Im folgenden sei G der hier abgebildete Graph:



1. In G sind in der Abbildung für alle Knoten Farblisten in Abhängigkeit von α und β vorgegeben. Dabei haben zwei Knoten einelementige Listen (sind also vorgefärbt); die anderen Knoten erhielten Listen der Länge 4.

   Zeigen Sie, dass G für kein Paar (α, β) mit $4 < \alpha \leq \beta$ zulässig aus den Listen färbbar ist!

2. Konstruieren Sie unter Nutzung von G einen planaren Graphen, mit Listenfärbungszahl (choice number) fünf!

3. Bestimmen Sie die chromatische Zahl des von Ihnen konstruierten Graphen!

4. Weisen Sie nach, dass es für jede netürliche Zahl n einen paaren Graphen H mit Listenfärbungszahl größer n gibt!

11 Bis 18.1.2012

1. Zeigen Sie, dass alle paaren Graphen Klasse 1 - Graphen sind! Nutzen Sie die Idee des Beweises des Satzes von Vizing aus der Vorlesung.

2. Als Greedy-Färbung eines Graphen zu einer vorgegebenen Reihenfolge seiner Knoten bezeichnen wir die Färbung, welche sich ergibt, wenn die Knoten in der vorgegebenen Reihenfolge mit der jeweils kleinsten Farbe gefärbt wird, die bis dahin in seiner Nachbarschaft nicht vorkommt.

   Die maximale Zahl von Farben einer Greedy-Färbung eines Graphen (maximiert über alle möglichen Reihenfolgen der Knoten) heißt Grundy-Zahl des Graphen.

   (a) Wie heißt die entsprechend minimale Zahl von Farben?

   (b) Bestimmen sie paare Graphen mit möglichst großer Grundy-Zahl!

3. Bestimmen Sie den chromatischen Index des Petersen-Graphen!

12 Bis 25.1.2012

1. Untersuchen Sie $\mathrm{ex}(n, H)$ für einfache Graphen H (wie z.B. $K_{1,2}$, $K_{1,r}$ oder C_4.

2. Bestimmen sie $t_r(n)$ explizit und finden Sie eine vereinfachte Abschätzung!

3. Zeigen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(n, H)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(H) - 2}{\chi(H) - 1}$$