Definitionen und Sätze der Graphentheorie

Dr. F. Göring

4. Februar 2010

Zusammenfassung

Die wesentlichen Definitionen und Sätze zusammengestellt.

Kapitel 1

Einführung

Definition 1.1 *Sei* Ω *eine Grundmenge. Ein geordnetes Paar* (V, E) *mit* $V \subseteq \Omega$ *und* $E \subseteq \binom{V}{2}$ *heißt* **Graph***.*

V wird als seine **Knotenmenge** *und* E *als seine* **Kantenmenge** *bezeichnet.*

Ist G *ein Graph, so bezeichnet* $V(G)$ *seine Knotenmenge und* $E(G)$ *seine Kantenmenge.*

Definition 1.2 *Sei* G *ein Graph und* $v \in V(G)$, $T \subseteq V(G)$ *sowie* $e \in E(G)$*. Wir sagen* v *ist* **inzident mit** e*, wenn* $v \in e$ *gilt. Zwei Kanten sind* **inzident** *zueinander, wenn sie zu einem gemeinsamen Knoten inzident sind. Wir setzen:*

$$
\begin{aligned}
G - v &:= (V(G) \setminus \{v\}, E(G) \setminus \{f \in E(G) | v \in f\} \\
d_G(v) &:= |\{f \in E(G) | v \text{ ist inzident mit } e\}| \\
\Delta(G) &:= \max\{d_G(v) | v \in V(G)\} \\
\delta(G) &:= \min\{d_G(v) | v \in V(G)\} \\
N_G(v) &:= \{w \in V(G) | \{v, w\} \in E(G)\} \\
\bar{N}_G(v) &:= N_G(v) \cup \{v\} \\
N_G(T) &:= \{w \in V(G) \setminus T | N_G(w) \cap T \neq \emptyset\} \\
\bar{N}_G(T) &:= N_G(T) \cup T \\
G - e &:= (V(G), E(G) \setminus \{e\}) \\
G|_e &:= ((V(G) \setminus e) \cup \{v_e\}, \\
&\quad\; E(G) \setminus \{f \in E(G) | f \cap e \neq \emptyset\} \cup \{\{w, v_e\} | w \in N_G(e)\})
\end{aligned}
$$

Wir sagen $G - v$ *bzw.* $G - e$ *geht aus* G *durch* **Löschen** *von* v *bzw.* e *hervor und* $G|_e$ *geht aus* G *durch* **Kontraktion** *von* e *hervor.* $d_G(v)$ *ist die* **Valenz** *oder auch der* **Grad** *von* v*. Gilt* $d_G(v) = 1$*, so heißt* v **Blatt** *von* G*, gilt* $d_G(v) > 3$*, so heißt* v **Verzweigungsknoten** *von* G*.*

Definition 1.3 *Seien* G *und* H *Graphen.*

H heißt **induzierter Untergraph** *von* G *(kurz* $H \subseteq_{ind} G$*), wenn* H *durch fortgesetztes Löschen von Knoten aus* G *entsteht, d.h. wenn gilt* $V(H) \subseteq V(G)$ *und* $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$*.*

Ist $T \subseteq V(G)$, so bezeichnet $G[T]$ den durch T induzierten Untergraphen $(T, E(G) \cap \binom{T}{2})$.

H heißt **Untergraph** *von G (kurz $H \subseteq G$), wenn H aus G durch fortgesetztes Löschen von Knoten und Kanten aus G entsteht, d.h. wenn gilt $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$.*

H heißt **Minor** *von G (kurz $H \preceq G$), wenn H aus G durch fortgesetztes Kontrahieren von Kanten sowie Löschen von Knoten und Kanten entsteht.*

Ist keine kontrahierte Kanten direkt vorher inzident mit einem Verzweigungsknoten gewesen, so nennen wir den Minor auch **topologischer Minor** *(kurz $H \preceq_{top} G$).*

G und H sind **isomorph** *zueinander (kurz $G \cong H$), sofern es eine Bijektion $\phi|V(G) \leftrightarrow V(H)$ mit*
$E(H) = \{\{\phi(v), \phi(w)\}|\{v, w\} \in E(G)\}$, gibt. In der Regel unterscheiden wir nicht zwischen isomorphen Untergraphen.

Wir definieren $G \cap H := (V(G) \cap V(H), E(G) \cap E(H))$.

Hinweis: Im allgemeinen bezeichnen wir also (auch) eine Klasse isomorpher Graphen als Untergraph, induzierter Untergraph, Minor oder topologischen Minor, sofern sie einen Graphen enthält, der nach der vorangegangenen Definition Untergraph, induzierter Untergraph, Minor oder topologischen Minor ist. Eine Klasse isomorpher Graphen (Isomorphieklasse) wird zuweilen selbst als Graph aufgefasst.

Definition 1.4 (Spezielle Graphen)

- *$K_V := \left(V, \binom{V}{2}\right)$ ist der* **vollständige Graph** *auf V, $K_{|V|}$ bezeichnet die Klasse der zu ihm isomorphen Graphen, z.B. ist jeder vollständige Graph mit drei Knoten ein K_3.*

- *$K_{A,B} := (A \cup B, \{\{a, b\}|a \in A \wedge b \in B\})$ ist der* **vollständig paare Graph** *mit Partitionsklassen A und B. Mit $K_{|A|,|B|}$ wird wieder seine Isomorphieklasse bezeichnet.*

- *$K_{A_1,A_2,\ldots A_r} := \left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i, \{\{a, b\}|\exists i \neq j : a \in A_i b \in A_j\}\right)$ ist der* **vollständig r-partite Graph** *mit* **Partitionsklassen** *$A_i, i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Mit $K_{|A_1|,|A_2|,\ldots|A_r|}$ wird wieder seine Isomorphieklasse bezeichnet.*

- *$P_n := \{G \cong (\{0, 1, \ldots, n\}, \{\{i-1, i\}|i \in \{1, 2, \ldots, n\}\})\}$ ist die Isomorphieklasse der* **Wege der Länge** *n. Beachte: $P_1 = K_2$.*

- *Für $n > 2$ ist $C_n := \{G \cong (\{1, \ldots, n\}, \{\{i, j\}|i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \wedge j - i \cong 1 \mod n\})\}$ die Isomorphieklasse der* **Kreise der Länge** *n. Beachte: $C_3 = K_3$.*

Definition 1.5 *Ist G ein Graph, so heißt G zusammenhängend, wenn für $T \subseteq V(G)$ mit $T \notin \{\emptyset, V(G)\}$ stets $|N_G(T)| > 0$ und $V(G) \neq \emptyset$ gilt.*

Definition 1.6 *Ist G ein Graph und $H \subseteq G$, so heißt H* **Zusammenhangskomponente** *oder kurz* **Komponente** *von G, sofern H zusammenhängend ist, und $N_G(V(H)) = \emptyset$ gilt. $c(G)$ bezeichne die Anzahl der Komponenten von G.*

Eine Komponente ist also ein zusammenhängender Untergraph, aus dem nichts hinausführt.

Beobachtung 1.7 *Die Vereinigung zweier nichtdisjunkter zusammenhängender Graphen ist zusammenhängend. Ein Graph ist die disjunkte Vereinigung seiner Komponenten.*

Definition 1.8 *Sei G ein Graph und $e \in E(G)$. Die Kante e wird als* **Brücke** *in G bezeichnet, sofern es ein $T \subseteq V(G)$ gibt mit $|N_G(T)| = |T \cap e| = 1$.*

Eine Brücke ist also eine Kante, die als einzige aus einem Teil des Graphen hinausführt.

Definition 1.9 *Ein* **Baum** *ist ein zusammenhängender Graph, der nach Löschen einer beliebigen Kante stets nicht mehr zusammenhängend ist.*

Ein Baum wird als kantenminimaler zusammenhängender Graph definiert.

Definition 1.10 *Ein* **Wald** *ist ein Graph, dessen Kanten alle Brücken sind. Knoten eines Waldes, die keine Blätter sind, heißen* **innere Knoten** *des Waldes.*

Beobachtung 1.11 *Die Komponenten eines Waldes sind Bäume.*

Satz 1.12 *In jedem endlichen Baum gilt $|V(G)| - |E(G)| = 1$.*

Definition 1.13 *Ein* **Verzweigungsknoten** *ist ein Knoten mit einer Valenz größer zwei. Ein* **Weg** *ist ein Baum ohne Verzweigungsknoten. Die Knoten eines Weges, die keine* **innere Knoten sind**, *heißen auch* **Endknoten**.

Definition 1.14 *Ein* Kreis *ist ein Graph, der nach Löschen einer beliebigen Kante ein Baum wird.*

Beobachtung 1.15 *Ist P ein Weg, so hat P höchstens 2 Knoten vom Grade 1. Der Weg P ist*

- *entweder ein einseitig unendlicher Weg, d.h. isomorph zu*

$$\left(\mathbb{N}, \left\{\{i,j\} \in \binom{\mathbb{N}}{2} | j = i+1\right\}\right)$$

- *oder ein beidseitig unendlicher Weg, d.h. isomorph zu*

$$\left(\mathbb{Z}, \left\{\{i,j\} \in \binom{\mathbb{N}}{2} | j = i+1\right\}\right)$$

- *oder ein Weg der Länge k (für passendes $k \in \mathbb{N}_0$), d.h. isomorph zu:*

$$\left(\{0,1,\ldots,k\}, \left\{\{i,j\} \in \binom{\{0,1,\ldots,k\}}{2} | j = i+1\right\}\right) =: P_k$$

Ist C ein Kreis, so ist C 2-regulär endlich und daher ein Kreis der Länge k (für passendes $k \in \mathbb{N}_0$), d.h. isomorph zu $P_{k-1} + \{0, k-1\} =: C_k$.

Definition 1.16 *Eine* Artikulation *ist ein Knoten eines Graphen, dessen Löschung die Anzahl der Komponenten verändert.*

Definition 1.17 *Seien A und B Teilmengen der Grundmenge Ω. Ein* $A-B$-Verbinder *ist ein zusammenhängender Graph, der weder zu A noch zu B disjunkt ist,*

Beobachtung 1.18 *Die Vereinigung eines $A-B$-Verbinders und eines $B-C$-Verbinders liefert einen $A-C$-Verbinder, sofern die beiden sich überschneiden.*

Definition 1.19 *Ist der einzige $A-B$-Verbinder, der Untergraph eines $A-B$-Verbinders G ist, G selber, so nennen wir G einen* $A-B$-Weg.

Beobachtung 1.20 *Jeder $A-B$-Verbinder enthält mindestens einen $A-B$-Weg.*

Ein $A-B$-Weg ist stets ein endlicher Graph, und zwar ein Weg.

Knoten vom Grad 2 eines $A-B$-Weges gehören weder zu A noch zu B und sind innere Knoten des Weges.

Konvention: Statt $\{a\}-\{b\}$-Weg bzw. $\{a\}-\{b\}$-Verbinder schreiben wir auch kurz $a-b$-Weg bzw. $a-b$-Verbinder.

Satz 1.21 *Sei G ein endlicher Graph. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- *G ist ein Baum.*
- *Zu je zwei Knoten $a, b \in V(G)$ enthält G genau einen $a-b$-Weg.*
- *G ist zusammenhängend und $|V(G)| = |E(G)| + 1$.*
- *G ist zusammenhängend und hat keinen Kreis als Untergraph.*
- *G hat keinen Kreis als Untergraph, aber $|V(G)| - 1$ Kanten.*
- *G hat keinen Kreis als Untergraph, aber Hinzufügen einer beliebigen Kante erzeugt einen Kreis als Untergraph.*
- *Jede der $|V(G)| - 1$ Kanten von G ist eine Brücke.*

Kapitel 2

Zusammenhang

2.1 Einleitung

Definition 2.1 *Betrachten wir einen beliebigen Graphen G und zwei Teilmengen A und B seiner Knotenmenge, sowie zwei seiner Knoten a und b.*

In G seien

- *A und B* **k-zusammenhängend**, *wenn es k disjunkte A-B-Verbinder in G gibt,*
- *a und B* **k-zusammenhängend**, *wenn es k a-B-Verbinder in G gibt von denen je zwei außerhalb von $\{a\}$ disjunkt sind (ihr Durchschnitt also in $\{a\}$ liegt).*
- *a und b* **k-zusammenhängend**, *wenn es k kreuzungsfreie a-b-Verbinder in G gibt, wobei je zwei a-b-Verbinder* **kreuzungsfrei** *seien, wenn sie außerhalb $\{a, b\}$ disjunkt sind.*

Mit $\kappa_G(A, B)$ bezeichnen wir die größte Zahl k derart, dass A und B k-zusammenhängend in G sind.

Analog sind $\kappa_G(a, B)$ und $\kappa_G(a, b)$ definiert.

Der Begriff **k-kantenzusammenhängend** *ergibt sich, wenn man bei den entsprechenden Definitionen für k-zusammenhängend das Wort "disjunkt" durch "kantendisjunkt" ersetzt.*

Mit $\kappa'_G(A, B)$ bezeichnen wir die größte Zahl k derart, dass A und B k-kantenzusammenhängend in G sind.

Analog sind $\kappa'_G(a, B)$ und $\kappa'_G(a, b)$ definiert.

Aufbauend darauf sei $\kappa(G)$ die kleinste Zahl k derart, dass G zwei Knoten a und b enthält, für die $\kappa_G(a, b) = k$ ist. Die Zahl $\kappa'(G)$ sei wieder analog definiert.

Eine Menge T derart, dass $G - T$ eine Knotenmenge V disjunkt zu A enthält, die $B \setminus T$ einschließt und in $G - T$ keinen Nachbarn hat, heißt **A-B-Trenner** *in G. Besteht T nur aus Kanten, so heißt T auch* **Kantentrenner**.

Ein **a-B-Trenner** *von G sein ein $\{a\}$-B-Trenner disjunkt zu $\{a\}$; ein* **a-b-Trenner** *entsprechend ein $\{a\}$-$\{b\}$-Trenner disjunkt zu $\{a, b\}$.*

*Analog sind die Begriffe a-B-***Kantentrenner** *und a-b-***Kantentrenner** *definiert.*

Ist T für geeignete a und b ein a-b-Trenner von G, so bezeichnen wir T auch als Trenner von G.

Bemerkung: Offenbar ist die Definition eines A-B-Trenners T in G gleichbedeutend damit, dass $T \subseteq V(G)$ gilt und $G - T$ keinen $A - B$-Verbinder besitzt. Dies ist der einfachste Fall des folgenden Satzes:

2.2 Der Satz von Menger

Satz 2.2 (Menger) *Sei G ein beliebiger Graph, A und B seien Teilmengen von $V(G)$. Die kleinste Mächtigkeit eines A-B- Trenners in G ist gleich $\kappa_G(A, B)$.*

Dass zwischen einem beliebigen A-B-Trenner T und einer beliebigen Menge disjunkter A-B-Verbinder W die Beziehung $|T| \geq |W|$ ist offenbar.

Die Hauptaussage dieses Satzes besteht darin, dass es in G zwei gleichmächtige Mengen T und W gibt, wobei T ein A-B-Trenner von G ist und W aus disjunkten A-B-Verbindern in G besteht.

Varianten:

Satz 2.3 ("Fächermenger") *Sei G ein beliebiger Graph, $a \in V(G)$ und B eine Teilmengen von $V(G)$. Die kleinste Mächtigkeit eines a-B-Trenners in G ist gleich $\kappa_G(a, B)$.*

Satz 2.4 ("Zweipunktmenger") *Sei G ein beliebiger Graph, a und b seien verschiedene nicht durch eine Kante verbundene Knoten von $V(G)$. Die kleinste Mächtigkeit eines a-b-Trenners in G ist gleich $\kappa_G(a, b)$.*

Satz 2.5 ("Vorschreibmenger") *Sei G ein beliebiger (gegebenfalls sogar unendlicher) Graph, A und B seien Teilmengen von $V(G)$ und W eine endliche Menge disjunkter A-B-Wege in G. Die kleinste Mächtigkeit eines A-B-Trenners in G sei größer als $|W|$. Dann gibt es in G eine Menge W' disjunkter A-B-Wege in G derart, dass $|W'| = |W| + 1$ gilt und jeder Knoten aus $A \cup B$, welcher auf einem der Wege aus W liegt, auch auf einem der Wege aus W' liegt.*

Analoge Sätze gelten auch für gerichtete Graphen und für den Kantenzusammenhang.

Korollare:

Satz 2.6 (Whitney) *Ist $|V(G)| > k + 1$, so ist $\kappa(G) = k$ äquivalent zu der Aussage: Es gibt einen kleinsten Trenner von G bestehend aus k Knoten.*

Definition 2.7 *Sei G ein Graph, $V \subseteq V(G)$ und $E \subseteq E(G)$. V heißt* **Kantenüberdeckung von** *G falls $G - V$ kantenlos ist. E heißt* **Matching** *oder* **Paarung** *von G, wenn je zwei Kanten aus E disjunkt sind. Ist die Vereinigung aller Elemente von E gleich $V(G)$, so heißt E* **perfektes Matching** *in G. Gibt es zu G zwei Knotenmengen A und B mit $G \subseteq K_{A,B}$ so heißt G* **paar**, **bipartit** *oder (später in passendem Kontext)* **zweifärbbar**.

Satz 2.8 (Hall, Heiratssatz) *Ist $G \subseteq K_{A,B}$, so besitzt G genau dann ein A überdeckendes Matching, wenn für jedes $A' \subseteq A$ gilt $|N_G(A')| \geq |A'|$.*

Satz 2.9 (Hall, Defektversion Heiratssatz) *Ist $G \subseteq K_{A,B}$, so besitzt G genau dann ein Matching der Größe $|A| - d$, wenn für jedes $A' \subseteq A$ gilt $|N_G(A')| \geq |A'| - d$.*

Satz 2.10 (König) *Ist G paar, so ist die kleinste Mächtigkeit einer Kantenüberdeckung von G gleich der größten Mächtigkeit eines Matchings.*

2.3 Der Satz von Mader

Definition 2.11 *Eine Knotenmenge H heißt* **unabhängig** *in einem (sie enthaltenden) Graphen G, sofern $E(G)$ disjunkt zu $\binom{H}{2}$ ist, G also keine Kante zwischen zwei Knoten aus H besitzt.*

Ist P ein Weg positiver Länge und H eine Knotenmenge (die durchaus Knoten außerhalb P enthalten darf), die sich mit $V(P)$ genau in den Endknoten von P überschneidet, so nennen wir P einen H**-Weg**.

Zwei H-Wege heißen **kreuzungsfrei**, *sofern sie außerhalb H disjunkt sind.*

Für einen Graphen G betrachten wir ein Paar (X, Y) mit $X \in (V(G)$ und $Y \in E(G - X)$. Wir definieren

$$\mathit{perm}_G(X, Y) := |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}(Y)} \left\lfloor \frac{|\partial_{G-X} C|}{2} \right\rfloor$$

als **Durchlässigkeit** *von (X, Y) in G. Dabei bezeichne $\mathcal{C}(Y)$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von Y* **erzeugten** *Graphen $(\bigcup e \in Y e, Y) =: [Y]$ und $\partial_{G-X} C$ die Menge der Knoten von C, welche in $G - X$ Nachbarn außerhalb C haben.*

Ist H eine Knotenmenge disjunkt zu X, die keinen Knoten inzident zu einer Kante aus Y enthält, un ist kein H-Weg von G disjunkt zu X und Y, so bezeichnen wir (X, Y) als H**-Trenner** *von G.*

Beobachtung 2.12 *Ist G ein endlicher Graph, H eine unabhängige Menge in G, W eine Menge kreuzungsfreier H-Wege in G und (X, Y) ein H-Trenner in G, so enthält W höchstens $\mathit{perm}_G(X, Y)$ Wege.*

Satz 2.13 (Mader) *Die vorige Beobachtung ist* **scharf**, *d.h.*

$$\min\{\mathit{perm}_G(X, Y) : (X, Y) \text{ ist } H\text{-Trenner in } G\} = \max\{|W| : W \text{ ist Menge kreuzungsfreier } H\text{-Wege ir}$$

.

Bemerkung: Der Satz von Menger ist Korollar des Satzes von Mader. Gleiches gilt für den 1-Faktorsatz von Tutte (den wir auch unabhängig davon bewiesen haben):

Definition 2.14 *Zu gegebenem $k \in \mathbb{N}$ und gegebenem endlichen Graphen G wird ein Untergraph $U \subseteq G$ als k-**Faktor** von G bezeichnet, sofern er k-**regulär** ist, also alle seine Knoten den Grad k haben.*

Satz 2.15 (Tutte) *Ein endlicher Graph G hat genau dann einen 1-Faktor (bzw. ein perfektes Matching), wenn für jede endliche Teilmenge S seiner Knotenmenge die Zahl $o(G-S)$ der ungeraden Komponenten (Komponenten mit ungerade vielen Knoten) von $G-S$ die Zahl der Knoten von S nicht übersteigt.*

Wie bei dem Satz von Hall gibt es auch eine Defektversion, die ebenfalls als Korollar zum Satz von Mader bewiesen werden kann:

Satz 2.16 (Tutte, Defektversion) *Ein endlicher Graph G hat genau dann ein Matching welches alle bis auf d Knoten enthält, wenn für jede endliche Teilmenge S seiner Knotenmenge die Zahl $o(G-S)$ der ungeraden Komponenten (Komponenten mit ungerade vielen Knoten) von $G-S$ die Zahl der Knoten von S nicht um mehr als d übersteigt, und diese Grenze aber auch angenommen wird.*

2.4 Verkleinerung niedrig zusammenhängender Graphen

Satz 2.17 *Jeder 2-zusammenhängende Graph G ist entweder ein Kreis, oder enthält ein* **Ohr**, *d.h. einen Weg P positiver Länge derart, dass nach Löschung aller Kanten und inneren Knoten von P aus G ein immer noch 2-zusammenhängender Graph übrig bleibt.*

Später in der Vorlesung benötigten und bewiesen wir einen Satz zu 3-zusammenhängenden Graphen, der auch hierhin sortiert werden kann:

Satz 2.18 *Jeder 3-zusammenhängende Graph G ist entweder ein K_4 oder besitzt eine knotrahierbare Kante, d.h. eine Kante e derart, dass $G|_e$ ebenfalls 3-zusammenhängend ist.*

Kapitel 3

Durchlaufungen von Graphen

3.1 Eulertouren

Definition 3.1 *Ist G ein Graph mit m Kanten und existiert eine Folge $(v_i)_{i=0\ldots m}$ seiner Knoten derart, dass $E(G) = \{\{v_{i-1}, v_i\} : i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$ gilt (wobei sich Knoten wiederholen dürfen), so heißt diese Knotenfolge* **Eulertour**. *Gilt zusätzlich $v_0 = v_m$, so heißt diese Eulertour* **geschlossene** *Eulertour. Besitzt G eine geschlossene Eulertour, so heißt G* **eulersch**.

Satz 3.2 *Ein Graph hat genau dann eine Eulertour, wenn er höchstens 2 Knoten ungerader Valenz hat. Er ist genau dann eulersch, wenn alle seine Knoten gerade Valenz haben.*

3.2 Hamiltonkreise

Definition 3.3 *Enthält G einen Kreis C derart, dass $V(C) = V(G)$, so heißt C* **Hamiltonkreis** *von G und G heißt* **hamiltonsch**.

3.2.1 Das Toughness-Konzept: Notwendige Bedingungen

Definition 3.4 *Sei G ein Graph und t eine reelle Zahl. Ist für jeden Trenner T von G die Zahl der Knoten in T mindestens t mal so groß, wie die Zahl der Komponenten von $G - T$, so sei G* **t-tough**.

Die **Toughness** *von G (kurz $t(G)$) ist die größte Zahl t derart, dass G t-tough ist.*

Beobachtung 3.5 *Ist G ein Graph mit $t(G) < 1$, so ist G nicht hamiltonsch.*

Vermutung 3.6 (Chvatal) *Es gibt ein $t > 0$ derart, dass aus $t(G) > t$ folgt, dass t hamiltonsch ist.*

Falls die Vermutung gilt, muss aber $t \geq \frac{9}{4}$ gelten.

Definition 3.7 *Sei G ein Graph und t eine reelle Zahl. Gibt es für jede mindestens 2-elementige Teilmenge H von $V(G)$ eine Menge von mindestens $t|H|$ kreuzungsfreien H-Wegen, so heißt G* **topologisch t-tough**.

Die **topologische Toughness** *von G (kurz $t_{top}(G)$) ist die größte Zahl t derart, dass G topologisch t-tough ist.*

Beobachtung 3.8 *Ist G ein Graph mit $t_{top}(G) < 1$, so ist G nicht hamiltonsch.*

Satz 3.9 *Ist G ein Graph mit $t_{top}(G) \geq 1$, so enthält G einen 2-Faktor.*

(Ohne Beweis.)

3.2.2 Einfache hinreichende Bedingungen

Satz 3.10 (Dirac) *Ist G ein Graph mit mindestens drei Knoten und Minimalgrad mindestens $\frac{|V(G)|}{2}$, so ist G hamiltonsch.*

Satz 3.11 *Jeder Graph G mit $\alpha(G) \leq k \leq \kappa(G)$ ist hamiltonsch.*

3.2.3 Hamiltonsche Hülle

Lemma 3.12 (Ore) *Falls G zwei nichtadjazente Knoten u und v mit $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ besitzt, so ist G genau dann hamiltonsch, wenn $G + \{u, v\}$ es ist.*

Definition 3.13 *Die* **hamiltonsche Hülle** *eines Graphen G erhält man durch iteriertes Hinzufügen von Kanten zwischen nichtadjazenten Knoten u und v, deren Gradsumme $d(u) + d(v)$ mindestens n ist.*

Beobachtung 3.14 *Die hamiltonsche Hülle eines Graphen ist wohldefiniert, hängt also nicht von der Auswahl der jeweils hinzuzufügenden Kante ab.*

Satz 3.15 (Bondy, Chvátal) *Ein Graph ist genau dann hamiltonsch, wenn seine hamiltonsche Hülle es ist.*

Satz 3.16 (Chvátal) *Ein Graph G mit n Knoten und Knotenvalenzen $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ ist hamiltonsch, falls für alle $i < \frac{n}{2}$ mit $d_i \leq i$ gilt: $d_{n-i} \geq n - i$.*

Bemerkung: Die Umkehrung gilt nicht.

Kapitel 4

Planarität

4.1 Einleitung

Definition 4.1 *Ein Graph heißt* **planar** *(oder* **plättbar***), wenn er isomorph zu einem ebenen Graphen ist.*

Ein **ebener Multigraph** *ist ein Paar (V, E) mit $V \subseteq \mathbb{R}^2$ diskret, d.h. in einer Umgebung eines Elementes v aus V liegen keine weiteren Elemente von v, und E ist eine Menge von Kreisbogenpolygonzügen im R^2, die außerhalb V disjunkt sind und genau Ihre Endpunkte in V haben. Die Elemente von V sind seine Knoten, die Elemente von E sind seine Kanten. Knoten, die durch eine Kante verbunden sind heißen wieder adjazent.*

Ein **Kreisbogenpolygonzug** *(kurz* **Polygonzug***) besteht aus einer Folge von Kreisbögen und Strecken derart, dass zwei nicht aufeinander foolgende Glieder der Folge stets disjunkt sind und aufeinanderfolgende Glieder genau einen Punkt gemeinsam haben - nämlich einen Endpunkt. Endpunkte nur eines Gliedes der Folge (des Anfangs oder Endgliedes) heißen* **Endpunkte** *des Polygonzuges, alle anderen heißen* **innere Punkte***. Ein* **Kreisbogenpolygon** *(kurz* **Polygon** *besteht aus zwei im Inneren disjunkten Polygonzügen mit gleichen Endpunkten.*

Ein **ebener Graph** *ist ein ebener Multigraph, in dem jede Kante ein anderes Paar verschiedener Knoten verbindet.*

Jeder ebene Multigraph G wird ggf. auch als Vereinigung seiner Kanten und damit als abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ aufgefaßt.

Da die Relation, in einer Menge $O \subseteq \mathbb{R}^2$ durch einen Kreisbogenpolygonzug verbunden zu sein, eine Äquivalenzrelation der Punkte in O ist, zerfällt O bzgl. dieser Relation in Äquivalenzklassen, die wir **Gebiete** *nennen.*

Die **Gebiete eines Graphen** *G oder auch* **Länder** *von G seien die Gebiete von $R^2 \setminus G$, wobei wir hier G als Vereinigung seiner Kanten auffassen. Ihre Menge sei mit $F(G)$ bezeichnet. Zu einem Gebiet f sei $G[f] := \partial f$ der Rand von f, also die Menge aller Punkte von $\mathbb{R}^2$, die in jeder Umgebung Punkte von f haben.*

Satz 4.2 (Jordanscher Kurvensatz für Polygone) *Ist $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Polygon, so hat $\mathbb{R}^2 \setminus P$ genau zwei Gebiete, von denen genau eines beschränkt ist. Jedes der beiden Gebiete* *hat als Rand ganz P.*

Lemma 4.3 (Kreuzungslemma) *Es seien P_1, P_2, P_3 drei Polygonzüge mit den gleichen Endpunkten, aber sonst disjunkt.*

- $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$ *hat genau drei Gebiete, mit Rändern $P_1 \cup P_2$, $P_1 \cup P_3$ und $P_2 \cup P_3$.*
- *Verbindet ein Polygonzug P einen inneren Punkt von P_1 und einen inneren Punkt von P_3 und ist disjunkt zu dem von $P_1 \cup P_3$ berandeten Gebiet, so enthält er einen Punkt von P_2.*

Lemma 4.4 (Brückenlemma) *Sei P ein Polygonzug, welcher zwei disjunkte Teilmengen X_1 und X_2 der Ebene $\mathbb{R}^2$ verbindet, aber im Inneren disjunkt zu Ihnen ist, und sind X_1 und X_2 selbst Vereinigungen endlich vieler Punkte und Polygonzüge, so gibt es genau ein Gebiet O von $R^2 \setminus X_1 \cup Y_1$, welches die inneren Punkte von P enthält. Insbesondere ist $O \setminus P$ dann ein Gebiet von $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2 \cup Y_1$.*

Lemma 4.5 (Gebietslemma) *Es sei G ein ebener Graph und e eine Kante von G.*

- *Enthält der Rand eines Gebiet f von G einen inneren Knoten von e, so enthält er e.*
- *Es gibt mindestens ein und höchstens zwei Gebiete, deren Rand e enthält.*
- *Liegt e auf einem Kreis C von G, so enthält jedes Gebiet von C ein Gebiet von G, dessen Rand e enthält.*
- *Liegt e auf keinem Kreis (ist also eine Brücke) von G, so gibt es genau ein Gebiet, dessen Rand e enthält.*

Korollar 4.6 *Für jedes Gebiet f eines ebenen Graphen G ist der Rand von f die Punktmenge eines Untergraphen von G.*

Lemma 4.7

- *Ein ebener Graph ist genau dann ein Wald, wenn er nur ein Gebiet hat.*
- *Ein Graph ist genau dann ein Kreis, wenn er zwei Gebiete mit dem gleichen Rand hat.*
- *Ein Graph ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn jedes Gebiet durch einen Kreis berandet ist.*
- *Die Gebietsränder eines 3-zusammenhängenden Graphen sind genau seine nicht trennenden induzierten Kreise.*

Definition 4.8 *Ein Graph heißt* **maximal eben**, *wenn er nicht durch Hinzufügen einer neuen Kante zu einem ebenen Graphen erweitert werden kann. Ein Graph heißt* **ebener Dreiecksgraph** *oder* **ebene Triangulation** *(kurz: Triangulation), wenn jedes seiner Gebiete durch einen Kreis der Länge* 3 *berandet ist.*

Lemma 4.9 (maximal eben) *Ein ebener Graph mit mindestens 3 Knoten ist genau dann maximal eben, wenn er eine Triangulation ist.*

Satz 4.10 (Eulersche Polyederformel) *Für ebene Multigraphen gilt —V(G)—+—F(G)—-—E(G)—=2.*

Korollar 4.11 (Kantenanzahl ebener Graphen) *Wir betrachten einen ebenen Graphen G mit mindestens drei Knoten. Es gilt $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$, wobei Gleichheit genau für Triangulationen eintritt.*

Korollar 4.12 *Kein ebener Graph enthält K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor.*

4.2 Planaritätskriterien

4.2.1 Der Satz von Kuratowski und Wagner

Lemma 4.13 *Ein Graph enthält K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor, wenn er einen dieser Graphen als topologischen Minor enthält.*

Lemma 4.14 *Ist ein Graph G 3-zusammenhängend und hat weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Minor, so ist G planar.*

Lemma 4.15 *Wir betrachten eine Menge $\mathcal{M}$ von 3-zusammenhängenden Graphen, sowie einen höchstens 2-zusammenhängenden Graphen G mit mindestens 3 Knoten. Zu einem kleinster Trenner T von G sei C_1 eine Komponente von $G - T$. Sei $G_1 = G - C_1$ und $G_2 = G - (G_1 - T)$. Ist G kantenmaximal ohne topologischen Minor in $\mathcal{M}$, dann sind es auch G_1 und G_2 und es gilt $G_1 \cap G_2 = K_2$.*

Lemma 4.16 *Ist G ein Graph mit mindestens 4 Knoten ohne K_5 oder $K_{3,3}$ als topologischen Minor, aber kantenmaximal unter diesen Voraussetzungen, so ist G dreifach zusammenhängend.*

Korollar 4.17 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent für Graphen G:*

- *G ist planar;*
- *G enthält weder $K_{3,3}$ noch K_5 als topologischen Minor;*
- *G enthält weder $K_{3,3}$ noch K_5 als Minor;*

Korollar 4.18 *Jede Triangulation mit mindestens vier Knoten ist 3-zusammenhängend.*

4.2.2 Ein algebraisches Kriterium

Definition 4.19 *Sei G ein Graph. Betrachten wir den Vektorraum aller Funktionen, die $E(G)$ in den Körper $0, 1$ (mit Addition modulo 2), und identifizieren die Elemente mit den jeweiligen Teilmengen von $E(G)$, die auf 1 abgebildet werden, so vezeichnen wir diesen Vektorraum als* **Kantenraum** *von G. Der* **Zyklenraum** *von G (kurz $\mathcal{C}(G)$) ist der durch die Kantenmengen aller Kreise von G erzeugte Unterraum des Kantenraumes. Der* **Schnittraum** *von G ist der durch die Mengen aller von einem Knoten ausgehenden Kanten erzeugte Unterraum des Kantenraumes. Eine Teilmenge des Kantenraums heiße schlicht, wenn jede Kante von G in höchstens zwei ihrer Elemente (die ja Kantenmengen sind) liegt.*

Lemma 4.20 *Der Schnittraum besteht genau aus den Kantenmengen S, zu denen es eine Partition von $V(G)$ in Mengen A und B derart gibt, dass S genau die Kanten enthält, die A und B verbinden.*

Lemma 4.21 *Schnittraum und Zyklenraum sind im Kantenraum orthogonal komplementär, d.h. der Schnittraum ist $\mathcal{C}(G)^{\perp}$. Insbesondere gilt $\dim(\mathcal{C}(G)) = |E(G)| - |V(G)| + 1$ und $\dim(\mathcal{C}(G)^{\perp}) = n - 1$.*

Satz 4.22 (MacLane) *Ein Graph ist genau dann planar, wenn sein Zyklenraum eine schlichte Basis besitzt.*

Satz 4.23 *Für 3-zusammenhängende Graphen G ist äquivalent:*

- *G ist planar;*
- *Jede Kante von G liegt auf höchstens zwei nicht trennenden induzierten Kreisen;*
- *Jede Kante von G liegt auf genau zwei nicht trennenden induzierten Kreisen;*

4.2.3 Planarität und Dualität

Definition 4.24 *Zwei ebene Multigraphen G und $G*$ heißen (topologisch)* **dual** *zueinander, wenn*

1. *jede Kante f von G genau eine Kante $f*$ von $G*$ schneidet und zwar in einem inneren Punkt,*
2. *in jedem Land von G genau ein Knoten von $G*$ und*
3. *in jedem Land von $G*$ genau ein Knoten von G liegt.*

Beobachtung 4.25 *Seien E und $E*$ entsprechende Kantenmengen von G und $G*$, d.h. jede Kante von E schneidet eine von $E*$ und umgekehrt. Dann ist E genau dann ein minimaler Schnitt in G, wenn $E*$ die Kantenmenge eines Kreises in $G*$ ist (und umgekehrt).*

Definition 4.26 *Zwei ebene Multigraphen G und $G*$ heißen kombinatorisch* **dual** *zueinander, wenn es eine Bijektion ϕ der Kanten von G und $G*$ derart gibt, dass eine Kantenmenge E von G genau dann die Kantenmenge eines Kreises ist, wenn $\phi(E)$ die Kantenmenge eines minimalen Schnittes von G^* ist.*

Beobachtung 4.27 *Sind G und G^* kombinatorisch dual, so verwandelt ϕ^{-1} den Schnittraum von G^* in den Zyklenraum von G.*

Satz 4.28 (Whitney) *Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn ein zu ihm kombinatorisch dualer Multigraph existiert.*

Kapitel 5

Graphenfärbungen

5.1 Die Chromatische Zahl

Definition 5.1 *Unter einer* **zulässigen Knotenfärbung** *oder kurz* **zulässigen Färbung** *eines Graphen verstehen wir eine Abbildung seiner Knotenmenge in eine Menge M (von Farben), welche auf keiner der Kanten des Graphen konstant ist. Das heißt: Benachbarte Knoten werden unterschiedlich gefärbt. Die für eine zulässige Färbung eines Graphen G minimal mögliche Mächtigkeit der Farbmenge M wird als* **chromatische Zahl** *von G bezeichnet und mit $\chi(G)$ abgekürzt.*

5.1.1 Obere Schranken

Satz 5.2 (Vierfarbensatz) *Ist G planar, so gilt $\chi(G) \leq 4$.*

Satz 5.3 (Brooks) *Für Graphen G gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Gleichheit ist äquivalent dazu, dass G ein Kreis oder ein vollständiger Graph ist.*

Vermutung 5.4 *Sei k die größte natürliche Zahl derart, dass G einen vollständigen Graphen mit k Knoten als Minor hat. Dann gilt $\chi(G) \leq k$.*

5.1.2 Untere Schranken

Definition 5.5 *Ist G ein Graph, so bezeichne die* **Unabhängigkeitszahl** *$\alpha(G)$ die maximale Größe einer unabhängigen Menge von Knoten in G.*

Satz 5.6 *Ist G ein Graph, so gilt $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$*

Definition 5.7 *Ein Graph heiße k-***konstruierbar***, sofern er rekursiv nach den folgenden Regeln konstruiert werden kann:*

- *Jeder vollständige Graph auf k Knoten sei k-konstruierbar.*

- *Ist G k-konstruierbar und $\{x, y\}$ unabhängig in G, so sei auch $G|_{\{x,y\}}$ k-konstruierbar.*
- *Gibt es zu zwei k-konstruierbaren Graphen G_1 und G_2 drei Knoten x, y_1 und y_2 mit $V(G_1 \cap G_2) = \{x\}$, $\{x, y_1\} \in E(G_1)$ und $\{x, y_2\} \in E(G_2)$, so sei auch $(G_1 \cup G_2) - \{x, y_1\} - \{x, y_2\} + \{y_1, y_2\}$ k-konstruierbar.*

Satz 5.8 *Für $k \in \mathbb{N}$ und einen Graphen G sind äquivalent:*

- *G hat einen k-konstruierbaren Untergraphen.*
- $\chi(G) \geq k$

5.1.3 Die Kantenchromatische Zahl

Definition 5.9 *Unter einer* **zulässigen Kantenfärbung** *eines Graphen verstehen wir eine Abbildung seiner Kantenmenge in eine Menge M (von Farben), welche inzidenten Kanten werden unterschiedlich Farben zuordnet. Die für eine zulässige Kantenfärbung eines Graphen G minimal mögliche Mächtigkeit der Farbmenge M wird als* **kantenchromatische Zahl** *von G bezeichnet und mit $\chi'(G)$ abgekürzt.*

Satz 5.10 (König) *Für jeden paaren Graphen gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Satz 5.11 (Vizing) *Für alle Graphen G gilt: $\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}$*

5.1.4 Die Listenchromatische Zahl

Definition 5.12 *Wird jedem Knoten $v \in V(G)$ eine Liste L_v von Farben zugeordnet, so* **respektiert** *eine zulässige Färbung f von G diese Listen $(L_v)_{v \in V(G)}$, sofern jeder Knoten mit einer Farbe aus seiner Liste gefärbt wurde, also für jeden Knoten v von G gilt: $f(v) \in L_v$. Die* **listenchromatische Zahl** *$ch(G)$ ist die kleinste Zahl k derart, dass der Graph G zu jeder Familie $(L_v)_{v \in V(G)}$ von Listen, deren kürzeste mindestens k Einträge hat, eine sie respektierende zulässige Färbung besitzt.*

Beobachtung 5.13 $\chi(G) \leq ch(G)$

Satz 5.14 (Thomassen) *Ist G planar, so gilt $ch(G) \leq 5$.*

Beobachtung 5.15 (Voigt) *Es gibt planare Graphen mit $ch(G) = 5$.*

Kapitel 6

Extremalgraphen

6.1 Der Satz von Turán

Definition 6.1 *Mit $ex(n, H)$ bezeichnen wir die maximale Anzahl von Kanten, die ein Graph ohne Untergraph isomorph zu H haben kann.*

Definition 6.2 *$T_r(n)$ bezeichne den* Turángraphen, *mit n Knoten und r Klassen, d.h. denjenigen vollständig r-partiten Graphen, dessen Partitionsklassen sich in ihrer Größe um höchstens 1 unterscheiden. Wir setzen $t_r(n) := |V(T_r(n))|$.*

Satz 6.3 (Turan) *Es gilt $ex(n, K_r) = t_{r-1}(n)$. Insbesondere ist jeder Graph mit n Knoten und $ex(n, K_r)$ Kanten ohne K_r als Untergraph ein $T_{r-1}(n)$.*

Lemma 6.4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{r-1}(n)}{\binom{n}{2}} = \frac{r-2}{r-1}$$

Satz 6.5 (Erdős & Stone) *Zu jedem $r \in \mathbb{N}, r > 1$, jedem $s \in \mathbb{N}, s > 0$ und jedem reellen $\varepsilon > 0$ gibt es ein natürliches n_0 derart, dass jeder Graph $n \geq n_0$ Knoten und mindestens $t_{r-1}(n) + \varepsilon\binom{n}{2}$ Kanten einen $T_r(s \cdot r)$ als Untergraphen enthält.*

Korollar 6.6 *Für jeden Graphen H mit mindestens einer Kante gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n, H)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(H) - 2}{\chi(H) - 1}.$$

6.2 Das Regularitätslemma

Definition 6.7 *Sind X und Y disjunkte Teilmengen eines Graphen G so bezeichne $d_G(X, Y)$ die* **Dichte** $\frac{|\{e|e verbindet\ X\ \ mit\ Y\}|}{|X|\cdot|Y|}$ *des Paares (X, Y). (A, B) heißt* ε**-regulär** *zu vorgegebenem positive ε, sofern die Dichte von $(X, Y) \in A \times B$ nur um mehr als ε von der Dichte von (A, B) abweicht, wenn $|X| \leq \varepsilon|A|$ oder $|Y| \leq \varepsilon|B|$ gilt.*

Bemerkung: Der Gleichheitsfall ist jeweils irrelevant.

Lemma 6.8 (Große Nachbarschaft) *Es sei (A, B) ein ε-reguläres Paar der Dichte d und $Y \subseteq B$ enthalte mehr als $\varepsilon|B|$ Knoten. Dann haben alle bis auf höchstens $\varepsilon|A|$ der Knoten aus A jeweils mindestens $(d - \varepsilon)|Y|$ Nachbarn in Y.*

Definition 6.9 *Der Graph R mit $V(R) = \{1, \ldots, k\}$ (und jeder zu ihm isomorphe Graph) wird (ε, m, d)*-**Regularitätsgraph** *(sind die Parameter klar dann auch kurz* **Regularitätsgraph** *zu einem Graphen G genannt, wenn $V(G)$ k disjunkte Teilmengen $V_1, \ldots, V_k$ aus je m Knoten derart besitzt, dass $\{i, j\} \in E(R)$ äquivalent dazu ist, dass (V_i, V_j) ein ε-reguläres Paar der Dichte d bilden. Zu gegebenem natürlichen s sei R_s wie folgt gebildet. Die Knoten von R werden durch disjunkte unabhängige Mengen der Größe s ersetzt, die vollständig bipartit verbunden werden, wenn die entsprechenden Knoten von R vorher verbunden waren.*

Lemma 6.10 *Sei $d \in (0, 1]$ und $\Delta \geq 1$ gegeben. Dann gibt es ein ε_0 derart, dass jeder Graph G, der einen (ε, m, d)-Regularitätsgraphen R mit $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ besitzt jeden Graphen H enthält, welcher Maximalvalenz höchstens Δ hat und in $R_{\lfloor \varepsilon_0 m \rfloor}$ enthalten ist.*

Satz 6.11 (Regularitätslemma von Szemerédy) *Sei ε eine positive reelle Zahl und ℓ eine natürliche Zahl. Dann gibt es natürliche Zahlen L und N mit folgender Eigenschaft:*

Die Knotenmenge V eines jeden Graphen G besitzt eine Partition $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ mit

1. *$\ell \leq k \leq L$,*
2. *$|V_0| \leq \varepsilon|V|$,*
3. *$|V_1| = \ldots = |V_k|$ und*
4. *alle bis auf höchstens $\varepsilon\binom{k}{2}$ der Paare (V_i, V_j) mit $1 \leq i < j \leq k$ sind ε-regulär.*

Kapitel 7

Ramseysätze

Beobachtung 7.1 *Jeder Graph auf sechs Knoten enthält ein Dreieck oder eine unabhängige Menge der Größe 3. Der C_5 enthält weder ein Dreieck noch eine unabhängige Menge der Größe 3.*

Satz 7.2 (Ramsey) *Zu jedem natürlichen r gibt es ein natürliches n derart, dass jeder Graph mit mindestens n Knoten r unabhängige Knoten oder r vollständig verbundene Knoten enthält.*

Definition 7.3 *Die kleinste Zahl n gemäß Satz 7.2 nennen wir* **Ramseyzahl** *von r, kurz $R(r)$.*

Satz 7.4 $R(r) \leq 2^{2r-3}$

Satz 7.5 *Für alle natürlichen Zahlen m und k gilt: Ist X eine unendliche Menge und sind die Elemente von $\binom{X}{m}$ mit k Farben gefärbt, so gibt es eine unendliche Menge $Y \subseteq X$ derart, dass die Menge $\binom{Y}{m}$ einfarbig ist.*

Lemma 7.6 (Unendlichkeitslemma von König) *Enthält G eine unendliche Folge disjunkte nichtleerer endlicher Mengen $V_0, V_1, \ldots$ und hat für jedes positive natürliche n jeder Knoten $v \in V_n$ einen Nachbarn in V_{n-1}, so enthält G einen undlichen Weg $v_0 v_1 \ldots$ mit $v_i \in V_i$ für jedes $i \in \{0, 1, \ldots\}$.*

Satz 7.7 *Zu positiven natürlichen Zahlen m, k, r existiert stets ein $n \geq m$ mit der Eigenschaft, dass bei beliebiger Färbung der Elemente von $\binom{X}{m}$ (zu n-elementigen X) mit k Farben stets eine r-elementige Teilmenge Y von X derart existiert, dass $\binom{Y}{r}$ einfarbig ist.*

Definition 7.8 *Zu gegebenem Graphen H sei $R(H)$ die kleinste natürliche Zahl n derart, dass eine Kantenzweifärbung des K_n stets eine einfarbige Kopie von H enthält.*

Satz 7.9 *Zu jedem $\Delta \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante c derart, dass für alle Graphen mit Maximalvalenz höchstens Δ gilt $R(H) \leq c|V(H)|$.*

Kapitel 8

Probabilistische Methode

Satz 8.1 $\alpha(G) \geq \sum\limits_{v \in V(G)} \frac{1}{d_G(v)+1}$

Satz 8.2 *Ist G ein Graph mit Minimalvalenz d so gilt* $\gamma(G) \leq 1 - \frac{d}{(d+1)^{1+\frac{1}{d}}}$

Lemma 8.3 *Zu jedem k gibt es Graphen G mit Unabhängigkeitszahl kleiner $\frac{|V(G)|}{2k}$ und höchstens $\frac{|V(G)|}{2}$ Kreisen einer Länge kleiner k.*

Definition 8.4 *Die* **Taillenweite** *eines Graphen ist die Länge eines kürzesten Kreises. Ist der Graph ein Wald, so setzen wir sie gleich unendlich.*

Satz 8.5 (Erdős) *Zu jedem k gibt es Graphen mit Taillenweite mindestens k und chromatischer Zahl mindestens k.*