Da wir Polygone P und Q durch eventuelles Einfügen zusätzlicher 180Grad-Ecken auf den Seiten stets in Polygone mit gleichvielen Ecken verwandeln können, ohne die von ihnen berandeten beschränkten Gebiete zu ändern, können wir durch die Nacheinanderausführung zweier bijektiver stetiger stückweise affiner Abbildungen diese Gebiete (über einen Zwischenschritt mit einem streng konvexen Polygon) so aufeinander Abbilden, das Grapheneinbettungen in das eine Gebiet in Einbettungen in das andere Gebiet überführt werden.

Mit Lemma 5.8.4 ergibt sich folgende Beobachtung:

Beobachtung 5.8.8 *Sei G ein zweifach zusammenhängender planarer Graph und e eine seiner Kanten. Dann hat G eine Einbettung G^* in eine Halbebene bzgl. einer Geraden g und zwei Punkten A und B auf g derart, dass der Durchschnitt von g mit G^* genau die Einbettung von e, und zwar die Strecke von A nach B ist.*

G hat schließlich gemäß Lemma 5.8.4 eine Einbettung, in der e das Außenland berandet. Der Rand des Aussenlandes ist ein Polygon P, da G zweifach zusammenhängend ist. e ist dann als Streckenzug aus x Strecken auf P abgebildet, der von A nach B verläuft. Sei nun Q ein Dreieck ABC, welches durch zusätzliche 180Grad-Ecken auf seinen Kanten zu einem Polygon mit ebensovielen Ecken wie P gemacht wurde. Dabei werde die Strecke von A nach B gerade in x Teilstrecken zerlegt. Das liefert dann eine geeignete Abbildung von P nach Q.

Lemma 5.8.9 *Jeder bzgl. topologischer Minorenrelation minimale nichtplanare Graph ist dreifach zusammenhängend.*

Beweis von Lemma 5.8.9. Der Beweisansatz ist wieder indirekt. Sei G ein minimaler nichtplanarer Graph der nicht dreifach zusammenhängend ist.

Gemäss Lemma 5.8.7 verbleibt der Fall, dass G zweifach zusammenhängend ist. Dann besitzt G zwei Knoten u und v sowie zwei Untergraphen G_1 und G_2 derart, dass G_1 und G_2 sich nur in u und v überschneiden, und G_1 wie G_2 weniger Knoten haben, als G. Enthielte G_2 keinen uv-Weg, so wäre u oder v ein 1-Trenner von G. Also enthält G_2 einen uv-Weg. Der Graph H_1, der aus G_1 durch Hinzufügen einer Kante e_1 von u nach v entsteht, ist also ein topologischer Minor von G mit weniger Knoten. Also ist H_1 planar.

Analog ist der Graph H_2, welcher aus G_2 durch Hinzufügen einer Kante e_2 von u nach v entsteht, ebenfalls planar.

Wählen wir also eine Gerade g, sowie zwei verschiedene Punkte A und B auf G, so können wir gemäß Lemma 5.8.8 H_1 in die eine und H_2 in die andere Halbebene bzgl. g so einbetten, dass e und e' beide als Strecke AB eingebettet sind, und sich die Einbettungen auch nur in diese Strecke überschneiden.

Das liefert uns aber auch eine ebene Einbettung von G im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

5.8.2 Konvexe Einbettungen: Der Satz von Tutte

Der folgende Satz schließt die Lücke, die zum Beweis des Satzes von Kuratowski bleibt:

Theorem 5.8.10 (Tutte) *Jeder dreifach zusammenhängende Graph ohne Kuratowski-Untergraphen besitzt eine ebene Einbettung derart, alle Länder von streng konvexen Polygonen berandet sind.*

Eine ebene Einbettung wie in diesem Satz beschrieben wollen wir als *konvexe Einbettung* bezeichnen. Man kann zusätzlich fordern, dass alle Kanten als Strecken eingebettet sind.

Wie wir aus dem Abschnitt über dreifach zusammenhängende Graphen wissen, hat jeder dreifach zusammenhängende Graph verschieden vom K_4 eine *kontrahierbare* Kante, also eine Kante, deren Kontraktion einen wiederum dreifach zusammenhängenden Graphen liefert.

Beobachtung 5.8.11 (Übung) *Hat der Graph G keinen Kuratowski-Untergraphen, so hat auch kein Minor von G einen Kuratowski-Untergraphen.*

Beweis von Theorem 5.8.10. Wir beweisen diesen Satz durch Induktion über die Anzahl der Knoten von G, wobei wir im Induktionsschritt die Existenz der kontrahierbaren Kante verwenden wollen:

Am Induktionsanfang ist mithin nur der K_4 zu diskutieren; er hat keinen Kuratowski-Untergraphen und besitzt offenbar eine konvexe Einbettung.

Im Induktionsschritt betrachten wir einen Graphen G mit kontrahierbarer Kante e von u nach v. Der Graph $G|_e$, der durch Kontraktion von e zu w aus G entsteht, hat nach Beobachtung 5.8.11 keinen Kuratowski-Untergraphen und besitzt nach Induktionsvoraussetzung eine konvexe Einbettung. Löschen wir in dieser Einbettung den Knoten w, so entsteht ein Land L_w, welches in seinem Inneren das Bild von w enthält.

Da $G|_e - w$ noch immer zweifach zusammenhängend ist, wird dieses L_w von einem Polygon berandet.

Besteht dieses Polygon aus zwei sich nur in Ihren Enden A und B überschneidenden Teilstrecken, von denen eine die Bilder der Knoten aus $N_G(u)$ und die andere die Bilder der Knoten aus $N_G(v)$ enthält, so ist die Existenz einer konvexen Einbettung von G offensichtlich.

Anderenfalls liefert eine geeignete Fallunterscheidung allerdings stets einen Kuratowski-Untergraphen. □

Beweis von Theorem 5.8.1. Wir wissen, dass ein Graph mit Kuratowski-Untergraphen grundsätzlich nicht planar sein kann. Lemma 5.8.9 sagt uns, dass jeder minimale nichtplanare Graph dreifach zusammenhängend ist. Satz 5.8.10 liefert aber, dass jeder dreifach zusammenhängende Graph ohne Kuratowski-Untergraph planar ist. Also hat jeder minimalen nichtplanaren Graphen einen Kuratowski-Untergraphen. Damit hat jeder nichtplanare Graph einen Kuratowski-Untergraphen. □

Bemerkt sei, dass jeder planare Graph Untergraph eines dreifach zusammenhängenden planaren Graphen ist (Übung), weswegen der Satz von Tutte impliziert, dass es für jeden Graphen eine Einbettung in die Ebene gibt, bei der alle Kanten als Strecken abgebildet werden.

5.9 Der Vierfarbensatz

Theorem 5.9.1 *Für jeden planaren Graphen G gilt: Man kann die Knoten von G so mit 4 Farben färben, dass benachbarte Knoten unterschiedliche Farben erhalten.*

Diesen Satz werden wir nicht beweisen, da es bisher noch keinen Beweis gibt, der hinreichend kurz und abwechslungsreich ist, um im Detail von Interesse zu sein. Stattdessen werden wir die seinem Beweis zu Grunde liegenden Ideen kennenlernen.

5.9.1 Kempe-Ketten und Discharging

Der folgende Beweis galt eine Weile lang tatsächlich als korrekt:

Beweis von Theorem 5.9.1. Nehmen wir an, G ist ein Gegenbeispiel mit möglichst wenig Knoten und möglichst vielen Kanten. Offenbar hat G wenigstens fünf Knoten.

Wir gehen von einer konkreten Einbettung aus, d.h. betrachten G als ebenen Graphen. Hinzufügen von Kanten senkt nicht die chromatische Zahl, ist also möglich, solange ein Land noch kein Dreieck im graphentheoretischen Sinne ist. Daher können wir davon ausgehen, das jedes Land ein Dreieck im graphentheoretischen Sinne ist. Solche Graphen bezeichnen wir als *Triangulationen*. Triangulationen (im graphentheoretischen Sinne) sind stets dreifach zusammenhängende Graphen.

Aus der letzten Übung wissen wir, dass G einen Knoten mit Valenz höchstens 5 hat.

Das können wir aber auch über die *Discharging*-Methode zeigen:

Zu Beginn erhält jeder Knoten, jede Kante und jedes Land eine Ladung (dem jeweiligen Objekt wird eine reelle Zahl zugeordnet), und zwar -1 für Kanten und 1 sonst.

Die Summe aller Ladungen ist zu Beginn gemäß dem Eulerschen Polyedersatz positiv (bei zusammenhängenden Graphen 2), und wird in dem folgenden *Discharging* genannten Prozess nicht mehr verändert:

Das Discharging ist nun ein geeignetes verschieben von Ladungen zwischen inzidenten Objekten. In diesem speziellen Fall erhält jede Kante von den Ländern auf ihren beiden Seiten eine Teilladung von $\frac{1}{3}$ und von jedem adjazenten Knoten eine Teilladung von $\frac{1}{6}$. Ist die Kante eine Brücke, so erhält sie insbesondere von dem einzigen zu ihr inzidenten (von ihr berandeten) Land eine Teilladung von $\frac{2}{3}$.

Da jedes Land von mindestens drei Kanten berandet wird (kein Multigraph!, mindestens sieben Knoten, da sonst Aussage trivial ist), haben nach dem Discharging (bzw. Entladen) alle Länder eine Ladung ≤ 0.

Da jede Kante zwei Ladungen von $\frac{1}{3}$ von den inzidenten Ländern, sowie zwei Ladungen von $\frac{1}{6}$ von den inzidenten Knoten erhält, ist ihre Ladung am Ende gleich Null. Positive Ladungen bleiben überhaupt nur bei Knoten mit Valenz ≤ 5, da ab Valenz 6 der Knoten mindestens 1 an die inzidenten Kanten abgibt.

Da - wie angedeutet - die Gesamtladung positiv bleibt, muss es also Knoten einen Knoten v mit einer Valenz kleiner 6 geben.

Hat G einen Knoten v mit Valenz kleiner 4, so können wir $G-v$ zulässig mit vier Farben färben und diese Färbung auf v fortsetzen mit der Farbe, die in der Nachbarschaft von v

(bzgl. G) nicht vorkommt, im Widerspruch dazu, dass G nicht zulässig mit vier Farben färbbar ist.

Hat G einen Knoten v mit Valenz 4, so kommen daher in jeder zulässigen Färbung von $G - v$ alle vier Farben in der Nachbarschaft von v vor. Seien in mathematisch positiver Drehrichtung um v herum die Nachbarn von v mit v_1, v_2, v_3 und v_4 bezeichnet, die Farbe von v_i sei mit i bezeichnet.

Der Knoten v und alle Knoten in den Farben von i und j induzieren in G einen Graphen G_{ij}.

Hat $G_{13} - v$ keinen v_1v_3-Weg, so können wir in der Komponente, welche v_1 enthält, die Farben 1 und 3 vertauschen, sowie v mit der Farbe 3 färben, um eine zulässige Färbung von G zu erhalten. Also hat $G_{13} - v$ einen v_1v_3-Weg

Analog hat $G_{24} - v$ einen v_2v_4 Weg.

Solche Wege (allgemein solche, die mit nur zwei Farben gefärbt sind) werden als *Kempe-Ketten* bezeichnet.

Nun liegen aber die Knoten v_2 und v_4 im Inneren unterschiedlicher Länder von G_{13}, weswegen disjunkte Untergraphen von G, nämlich $G_{24} - v$ und G_{13}, sich irgendwo überschneiden müssen. Das widerspricht der Behauptung, dass G ein ebener Graph ist!

Bleibt der Fall, dass G Minimalvalenz 5 hat. Sei v also ein Knoten mit Valenz 5. Wir betrachten wieder eine zulässige Färbung von $G - v$. Um ihn herum liegen nun in dieser Reihenfolge v_1 bis v_5 und wir können davon ausgehen, dass v_1 bis v_4 die verschiedenen Farben 1 bis 4 haben. O.B.d.A. dürfen wir davon ausgehen, dass v_5 die Farbe 2 hat, da er mit v_1 und v_4 benachbart ist, und wir den Graphen gegebenenfalls spiegeln können, um die Indizes 2 und 3 zu vertauschen.

Da wir keine Farbe in der Nachbarschaft von v durch geeignetes Umfärben eliminieren können, gibt es eine Kempe-Kette von v_1 nach v_3 und eine Kempe-Kette von v_1 nach v_4.

Nun ist die Komponente H des Graphen $G_{24} - v$, welche v_2 enthält, durch G_{13} von v_4 und v_5 getrennt. Ebenso ist die Komponente H' des Graphen $G_{23} - v$, welche v_5 enthält, durch G_{14} von v_2 und v_3 getrennt.

Also können wir die Farbe 2 aus der Nachbarschaft von v entfernen, indem wir in H die Farben 2 und 4, sowie in H' die Farben 2 und 3 löschen. $\square$

Wo steckt der Fehler?

Beim letztem Umfärben können sich H und H' in Knoten der Farbe 2 überschneiden, deren neue Farbe dann nicht klar ist.

Diese Beweisidee lässt sich aber prima zu einem Beweis des Fünffarbensatzes abändern (Übung!)

Was ist der Kern der Idee:

Jede planare Triangulation besitzt einen Knoten der Valenz drei, vier oder fünf. d.h. die Menge solcher Knoten liefert eine *unvermeidbare* Menge von *Konfigurationen.* Als *Konfiguration* einer ebenen Triangulation bezeichnen wir einen trennenden Kreis C (der *Ring*), zusammen mit einem Teil des Graphen innerhalb C (Hier wird der Ring jeweils durch die Nachbarschaft von v induziert).

Bei Knoten der Valenz drei und vier ließ sich tatsächlich die Färbung des Graphen aus einer gegebenen Färbung einer kleineren Triangulation erzeugen.

Kennt man zu einer Konfiguration eine Möglichkeit, die Färbung des Graphen mit dieser Konfiguration aus der Färbung eines kleineren Graphen herzuleiten, so nennt man diese Konfiguration *reduzibel*

Die Idee ist nun, eine endliche unvermeidbare Menge reduzierbarer Konfigurationen anzugeben, und für jede dieser Konfigurationen die Reduzierbarkeit zu beweisen.

Weiteres Beispiel für reduzierbare Konfigurationen: Der Birkhoff-Diamant.(Übung)