5.8 Der Satz von Kuratowski

In diesem Unterabschnitt möchten wir folgenden Satz beweisen:

Theorem 5.8.1 (Kuratowski) *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als topologischen Minor hat.*

In diesem Abschnitt wollen wir unter einem *minimalen nichtplanaren* Graphen einen solchen Graphen verstehen, dessen zu ihm nicht isomorphe topologische Minoren sämtlich planar sind und der selber eben nicht planar ist.

Hat ein Graph G einen topologischen Minor M, so hat er einen Untergraphen U, der eine Unterteilung von M ist (entsteht aus M, wenn seine Kanten durch kreuzungsfreie Wege positiver Länge ersetzt werden).

Wir bezeichnen daher Untergraphen eines Graphen, die isomorph zum $K_{3,3}$ oder zum K_5 sind, als *Kuratowski-Untergraphen.*

Nun ist anzumerken, dass

- schon gezeigt wurde, dass die Graphen $K_{3,3}$ und K_5 nicht planar sind und
- eine ebene Einbettung eines Graphen auch eine ebene Einbettung seiner topologischen Minoren liefert.

Es genügt daher offenbar zu zeigen, dass jeder minimale nichtplanare Graph G einen Kuratowski-Untergraphen enthält.

Da wir dies indirekt tun werden, unser Widerspruch aber zuweilen in der Konstruktion einer Einbettung von G aus kleineren Teilen von G liegt, brauchen wir noch einige topologische Voraussetzungen, um gegebene Einbettungen eventuell erst noch in eine passende Form zu bringen.

5.8.1 Triangulationen ebener Gebiete und Grapheneinbettungen

Eine Zerlegung eines ebenen Gebietes in endlich viele nichtentartete Dreiecke bezeichnen wir als *Triangulation*, wenn kein Eckpunkt eines Dreieckes im Inneren einer Seite eines anderen Dreieckes liegt. Die Menge aller Punkte die Eckpunkt mindestens eines Dreiecks der Triangulation sind, bezeichnen wir als *Ecken* der Triangulation.

Zwei Triangulationen bezeichnen wir als *gleichwertig* oder *gleichartig*, wenn es eine Bijektion gibt, welche die Dreiecke beider Triangulationen derart aufeinander abbildet, dass gemeinsame Ecken bzw. Kanten erhalten bleiben.

Man kann nun zwei beliebige nichtentartete Dreiecke durch eine bijektive affine Abbildung ineinander überführen. Überführt man benachbarte Dreiecke einer Triangulation auf geeignete Art und Weise (gleiche Ecken auf gleiche Ecken abbilden) in benachbarte Dreicke einer anderen Triangulation, so stimmen die betreffenden affinen Abbildungen auf der gemeinsamen Kante überein, da Teilverhältnisse jeweils erhalten bleiben.

Damit ergibt sich folgende Beobachtung:

Beobachtung 5.8.2 *Haben zwei Gebiete gleichartige Triangulationen, so lassen sie sich durch eine bijektive stetige stückweise affine Abbildung ineinander überführen. Eine solche ist wohldefiniert durch eine geeignete Bijektion der Ecken beider Triangulationen.*

Da jeder endliche Streckenzug jedes Dreieck einer Triangulation nur endlich oft verlassen kann, ergibt sich daraus folgende Beobachtung:

Beobachtung 5.8.3 *Haben zwei Gebiete gleichartige Triangulationen, so gibt es einen Homöomorphismus zwischen Ihnen, der eine Einbettung eines Graphen in das eine Gebiet in eine Einbettung eines Graphen in das andere Gebiet überführt.*

Sei beispielsweise eine Einbettung $G*$ des Graphen G gegeben. Im Land L dieser Einbettung zeichnen wir ein gleichseitiges Dreieck DEF ein, das Dreieck ABC ergebe sich aus dem Dreieck DEF durch Punktspiegelung am Symmetriezentrum und nachfolgende Streckung mit hinreichend großem Streckungsfaktor, dass $G*$ vollständig in Dreieck ABC liegt. Das Gebiet bestehend aus allen Punkten des Dreiecks ABC, die nicht im Dreieck DEF liegen, wird durch die Dreiecke ABF, AEF, AEC, DEC, DBC und DBF trianguliert (d.h. diese Dreiecke bilden eine Triangulation).

Der Homöomorphismus gemäß Beobachtung 5.8.3, der dieses Gebiet so auf sich selbst abbildet, dass A auf D, B auf E, C auf F und jeweils umgekehrt abgebildet werden, liefert eine ebene Einbettung des Graphen G, in der Kanten, die in G^* das Land L beranden, nun das Aussenland beranden.

Also gilt:

Lemma 5.8.4 *Sei E_L die Menge der Kanten, die in einer ebenen eines Graphen ein Land L beranden. Dann gibt es eine Einbettung dieses Graphen, in der E_L die Menge der Kanten ist, die das Außenland beranden.*

Betrachten wir ein beschränktes, von einem Polygon P berandete Gebiet L. Es erscheint offenbar, dass L eine Triangulation besitzt, deren Ecken gerade die Ecken von P sind (man beachte: die Innenwinkel von P dürfen alle Werte zwischen 0Grad und 360Grad annehmen, also insbesondere 180Grad).

Will man solches aber beweisen, so geht das aber nicht so leicht. Wir tun dies, indem wir zeigen dass P eine Diagonale hat, deren Inneres voll in L liegt. Diese zerlegt schließlich P in zwei Polygone mit weniger Ecken, was einen rekursiven Algorithmus zum triangulieren von P liefert.

Sei also A eine Ecke von P und w der Strahl welcher den Innenwinkel von P in A halbiert. s verläßt in einem Punkt X das erste mal L, also liegt die Strecke von A nach X völlig in L. Ist X eine Ecke von P so sind wir fertig. Anderenfalls liegt X auf einer Kante k von P. Betrachten wir alle Punkte X' auf k derart, dass AX' vollständig in $L \cup P$ liegt, so muss dies eine Teilstrecke von k sein, da P zusammenhängend ist. Die Endpunkte seien Y und Z (Y und Z sind sicher verschieden). Auf den Strecken AY und AZ liegt dann aber jeweils eine Ecke B bzw. C von P. Die Strecke BC ist dann unsere gesuchte Diagonale.

Ist Q nun ein streng konvexes Polygon mit genauso vielen Ecken wie P, und sei f eine Bijektion der Ecken von P und der Ecken von Q, die benachbarte Ecken auf benachbarte

Ecken abbildet, so zerlegt die bzgl. f dieser Diagonalen entsprechende Strecke auch Q in zwei entsprechende Polygone mit weniger Ecken.

Wir können folgende Beobachtung festhalten:

Beobachtung 5.8.5 *Sind P und Q Polygone mit gleichvielen Ecken, und ist Q konvex, so haben ihre beschränkten Gebiete gleichartige Triangulationen.*

Da wir jeden eben eingebetteten Graphen in ein polygonal berandetes Gebiet (Rand sei P) so einschließen können, dass eine vorgegebene Ecke am Rand des Aussenlandes auch Ecke des Gebietsrandes ist, ergibt sich mit Lemma 5.8.4 folgende Beobachtung:

Beobachtung 5.8.6 *Ist G ein planarer Graph und v ein Knoten von G, so läßt sich G so in einen Winkelraum zu einem beliebigen Winkel $\alpha > 0$ einbetten, dass v als Scheitelpunkt eingebettet ist.*

Wir brauchen für Q lediglich ein streng konvexes Polygon mit gleichvielen Ecken wie P und einem Innenwinkel der Größe α zu verwenden.

Es ergibt sich folgendes Lemma:

Lemma 5.8.7 *Jeder minimale nichtplanare Graph ist zweifach zusammenhängend.*

Beweis von Lemma 5.8.7. Wir gehen indirekt vor. Sei G ein minimaler nichtplanarer Graph, der nicht zweifach zusammenhängend ist. Ist G überhaupt nicht zusammenhängend, so auch sind insbesondere seine Komponenten. G lässt sich dann komponentenweise einzubetten (jede zus. Komponente in ein Land bzgl. der bis dahin gezeichneten Einbettung), und damit ist G im Widerspruch zur Voraussetzung planar.

Anderenfalls zerfällt G in zwei zusammenhängende Graphen G_1 und G_2, die sich nur in der Artikulation v überschneiden. Einbettung von G_1 und G_2 in disjunkte Winkelräume zu v liefert eine Einbettung von G - im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$