Vorlesungen vom 5.Januar 2005

5 Planare Graphen

5.1 Beispiel: Gas, Wasser, Elektrik

Drei eingeschworene Feinde, die im Wald leben, planen Trassen zu den Versorgungswerken für die drei Grundgüter Gas, Wasser und Elektrizität. Damit sie keine Probleme miteinander bekommen, sollen diese Trassen einander nicht kreuzen.

Die Frage, ob eine solche Trassenführung überhaupt möglich ist, ist zuweilen in Tageszeitungen in der Rätselecke zu finden. Etwas formeller betrachtet sollen sechs Punkte sowie neun Verbindungslinien so in die Ebene gezeichet werden, dass die Punkte paarweise verschieden sind, dass die Verbindungslinien jeweils nur zwei der Punkte (jeweils an Ihren Enden) enthalten und sich nicht kreuzen, und dass drei der sechs Punkte jeweils direkt mit allen drei verbleibenden der sechs Punkte verbunden sind.

Fasst man die Verbindungslinien nun als Sinnbilder für die Kanten eines Graphen auf, die Punkte als Sinnbilder für seine Knoten, so ist dieser Graph offenbar der $K_{3,3}$ und die Frage lautet nun danach, ob man den $K_{3,3}$ so in die Ebene zeichnen kann, dass keine Kante im Inneren Punkte einer anderen Kante enthält.

Statt einen Graphen in die Ebene zu zeichnen, könnten wir ihn auch auf eine (Erd-) Kugel zeichnen. Das macht aber keinen Unterschied, da wir bei unserer Zeichnung auf die Kugel sicher einen Punkt X auslassen, und die Kugeloberfläche ohne X ohnehin homöomorph zur Ebene ist: Man betrachte beispielsweise die Ebene, die die Kugel am Antipod Y zu X berührt. Ein Homöomorphismus ist dann beispielsweise die Bijektion zwischen Punkten der Kugel und der Ebene, welche auf einem gemeinsamen Strahl durch X liegen.

Man kann also Graphen (in relativ weitem Sinne) genausogut auf die Kugel zeichnen, wie auf die Ebene.

5.2 Planare und ebene Graphen

Was bedeutet aber, in die Ebene zeichnen, welche Art Linien wollen wir zulassen?

Der Einfachheit halber mögen unsere Linien sich im Inneren nicht selbst überschneidende Streckenzüge bestehend aus jeweils endlich vielen Strecken sein. Damit lässt sich eine Linie, wie wir sie mit dem Stift zeichnen, hinreichend genau approximieren, dass das Auge den Unterschied nicht bemerkt (bis auf die Strichdicke, die nun gleich 0 ist). Solche Streckenzüge bezeichnen wir als *Polygonzüge*, sofern Anfangs- und Endpunkt verschieden sind, und anderenfalls als *Polygone*.

Polygonzüge sind damit homöomorph zum Einheitsintervall, ihre Endpunkte sind die Bilder von 0 und 1 unter einem entsprechenden Homöomorphismus, ihre inneren Punkte sind alle ihre Punkte außer den Endpunkten.

Polygone hingegen sind homöomorph zum Einheitskreis.

Schlingen (von Multigraphen) werden wir beispielsweise stets als Polygon zeichnen müssen.

Ein (endlicher) *ebener Graph* ist ein paar (V, E) folgender Art:

1. V ist eine endliche Menge paarweise verschiedener Punkte der Ebene, die als Knoten bezeichnet werden.

2. E ist eine endliche Menge, deren Elemente als Kanten bezeichnet werden. Dabei sind diese Kanten Polygonzügen und Polygone.

3. Eine jede Kante, die ein Polygon ist, enthält genau einen Punkt aus V und ist ansonsten disjunkt zu allen anderen Kanten.

4. Eine jede Kante, die ein Polygonzug ist, hat ihre Endpunkte in V und ist ansonsten disjunkt zu allen anderen Kanten.

Zwei Knoten heißen hier wieder adjazent, wenn sie durch eine Kante verbunden sind, Eine Kante ist inzident zu einem Knoten, wenn sie ihn enthält. Zwei Graphen heißen weiter isomorph, wenn es eine inzidenzerhaltende Bijektion gibt, die Knoten des einen Graphen Knoten des anderen Graphen, und Kanten des einen Graphen Kanten des anderen Graphen zuordnet.

In diesem Sinne sind ebene Graphen im allgemeinen Zeichnungen von Multigraphen, da Mehrfachkanten und Schlingen auftreten können.

Ein Graph G (oder Multigraph) heisst nun *planar*, wenn es einen zu ihm isomorphen ebenen Graphen G' gibt. Der Graph G' heisst dann *(ebene) Einbettung* des Graphen G.

Ist G ein ebener Graph, wo verwenden wir das Symbol G auch als Bezeichnung für die Vereinigung seiner Kanten und seiner Knotenmenge - was eine abgeschlossene ebene Punktmenge liefert.

5.3 Topologische Voraussetzungen

Ein jeder ebener Graph G zerlegt die Ebene in verschiedene zusammenhängende „Gebiete “. Diese Zerlegung wollen wir genauer definieren:

Sei dazu $O = \Re^2 \setminus G$. Wir bemerken, dass O eine offene Punktmenge ist.

Sind zwei Punkte aus O identisch, oder durch einen Polygonzug verbunden (verbindbar) der vollständig in O liegt, so sollen sie zu dem gleichen Gebiet von O gehören.

Da diese Eigenschaft zweier Punkte in der Tat eine Äquivalenzrelation ist, definiert sie eine Zerlegung von O in Äquivalenzklassen. Unsere Forderung wird erfüllt, wenn wir diese Äquivalenzklassen als *Gebiete* von O bezeichnen, was wir infolgedessen auch tun.

Die Gebiete von $O = \Re^2 \setminus G$ werden auch als *Länder* von G bezeichnet, ein jedes solches Gebiet ist also ein Land von G.

Für das Folgende wollen wir uns die Definition des Randes einer Punktmenge in Erinnerung rufen:

Der *Rand* einer Punktmenge ist die Menge aller Punkte, die in Ihrer Umgebung sowohl Punkte innerhalb, als auch außerhalb dieser Punktmenge enthalten.

Der Rand einer offenen Punktmenge liegt also vollständig in Ihrem Komplement.
Wir wollen nun ein Paar Eigenschaften unserer Gebiete von O auflisten:

- Jeder Punkt x eines Gebietes L ist von jedem Punkt y seines Randes aus direkt zugänglich, d.h. es gibt einen Streckenzug, der x und y verbindet und bis auf x vollständig in L liegt.
- Je zwei Punkte x und y des Randes eines Gebietes sind durch einen Polygonzug verbunden, der bis auf seine Endpunkte x und y vollständig in dem Gebiet liegt.
- Jeder Streckenzug Z der aus einem Gebiet herausführt, trifft den Rand ein erstes Mal. Das bedeutet, er enthält einen Teilstreckenzug, dessen einer Endpunkt auf dem Rand des Gebietes liegt, dessen anderer Endpunkt auch Endpunkt von Z ist, und der im Inneren vollständig in dem Gebiet liegt.

Wir wollen nun Grundaussagen bereitstellen, in welcher Art und Weise Polygone und Polygonzüge die Ebene in Gebiete zerlegen.

Theorem 5.3.1 (Jordanscher Kurvensatz für Polygone) *Ist $P \subseteq \Re^2$ ein Polygon, so hat $\Re^2 \setminus P$ genau zwei Gebiete, von denen genau eines beschränkt ist. Jedes der beiden Gebiete hat als Rand ganz P.*

Das folgende Lemma gibt an, wie und mit welchen Folgen ein Gebiet durch einen Polygonzug zerlegt wird:

Lemma 5.3.2 (Drei-Wege-Lemma) *Es seien P_1, P_2 und P_3 drei Polygonzüge mit den gleichen Endpunkten, aber sonst disjunkt. Dann gilt:*

1. *$\Re^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$ hat genau drei Gebiete mit den Rändern $P_1 \cup P_2$, $P_2 \cup P_3$ bzw. $P_1 \cup P_3$.*
2. *Ist P ein Polygonzug zwischen einem Punkt im Inneren von P_1 und einem Punkt im Inneren von P_2, dessen Inneres vollständig in dem Gebiet von $\Re^2 \setminus (P_1 \cup P_2$ liegt, welches P_3 enthält, dann sind das Innere von P_3 und das Innere von P nicht disjunkt.*

Dieses Lemma wollen wir am Beispiel des $K_{3,3}$ beleuchten: Angenommen der $K_{3,3}$ ist ein planarer Graph. Sei nun G ein zum $K_{3,3}$ isomorpher ebener Graph und C ein aufspannender Kreis von G. Aussage 2 des Drei-Wege-Lemmas impliziert, dass die drei Sehnen in paarweise verschiedenen Gebieten von $\Re \setminus C$ liegen müssen, was nach dem Jordanschen Kurvensatz für Polygone nicht geht. Also hatte unsere Eingangsaufgabe keine Lösung.

Das nächste Lemma gibt an, wieviele Länder eine Kante eines ebenen Graphen in Ihrem Rand haben:

Lemma 5.3.3 *Sei P eine Kante eines ebenen Graphen G, so gilt:*

1. *Ist L ein Land von G, welches einen Inneren Punkt von P auf seinem Rand enthält, so enthält sein Rand ganz P.*
2. *Ist P eine Brücke in G, so liegt P auf dem Rand von genau einem Land von G.*
3. *Ist P keine Brücke in G, so liegt P auf dem Rand von genau zwei Ländern von G.*

5.4 Duale Graphen

Sei G ein ebener Graph. Ein ebener Graph G^* ist *Dualgraph* von G, wenn er folgende Eigenschaften hat:

- Die Knoten von G^* liegen in den Ländern von G und zwar liegt in jedem Land von G genau ein Knoten von G^*.
- Zu jeder Kante P von G gibt es genau eine Kante P^* von G^*, welche diese Kante im Inneren schneidet. P^* verbindet die Knoten von G^*, welche in Ländern von G liegen, welche P in ihrem Rand enthalten. Ist insbesondere P eine Brücke, so ist P^* ein Polygon, im graphentheoretischen Sinne also eine Schlinge.

Man kann sich geometrisch klar, dass jeder ebene Graph einen dualen Graphen besitzt. Alle dualen Graphen G eines Ebenen Graphen sind offenbar isomorph zu jenem Multigraphen, dessen Knotenmenge die Menge der Länder von G ist, wobei zwei Knoten L_1 und L_2 verbunden sind, wenn die Ränder von L_1 und L_2 eine Kante von G gemeinsam enthalten, und wobei die Vielfachheit der Verbindung sich durch die Anzahl der gemeinsamen Kanten der Ränder von L_1 und L_2 in G ergibt. Weiterhin ist die Zahl der Schlingen an ein Land L genau die Zahl der Brücken von G, die im Rand von L enthalten sind. Damit sind alle Graphen, die dual zu einem gegebenen ebenen Graphen sind, auch untereinander isomorph.

Ist hingengen G ein Planarer Graph und sind G_1 und G_2 ebene Graphen isomorph zu G, so können ein Dualgraph G_1^* zu G_1 und ein Dualgraph G_2^* zu G_2 durchaus nichtisomorph zueinander sein. Bestehe zum Beispiel G aus 4 Wegen von einem Knoten x zu einem Knoten y, welche die Längen 1, 2, 3 und 4 besitzen, so hat der Dualgraph genau dann einen Knoten der Valenz 3, wenn die beiden Wege der Längen 3 und 4 im Gleichen Gebiet bezüglich der Wege der Längen 1 und 2 liegen. Das kann, muss aber nicht der Fall sein.

Im Folgenden geben wir eine hinreichende Bedingung an, dass diese Variabilität des Dualgraphen nicht auftritt.

5.5 Satz von Whitney

Theorem 5.5.1 *Je zwei Einbettungen eines dreifach zusammenhängenden planaren Graphen in die Ebene haben isomorphe Dualgraphen.*

Um diesen Satz zu beweisen, bedarf es einer kleinen Vorbereitung.

Zunächst definieren wir ein paar hilfreiche Begriffe: Ist G ein Graph und U ein Untergraph, so bezeichnen wir alle K_2, deren Knoten in U und deren Kante außerhalb U liegen als *Sehnen* von U in G Ein *Gespinst* an U in G ist entweder eine Sehne von U in G oder ein Untergraph von G, der sich aus einer Komponente von $G - U$ durch Hinzunahme der herausführenden Kanten und deren Endknoten ergibt.

Wir bemerken, dass ein Gespinst von G an U stets bis auf seinen Durchschnitt mit U vollständig in ein und demselben Land von U liegen muss, wenn G ein ebener Graph ist.

Ein Kreis von G heißt trennend, wenn G mehr als ein Gespinst an ihm enthält.

Nun bestimmen wir die Gebietsränder eines dreifach zusammenhängenden ebenen Graphen:

Lemma 5.5.2 *Die Ränder der Länder eines dreifach zusammenhängenden ebenen Graphen G (ohne Schlingen und Mehrfachkanten) sind genau seine nicht trennenden Kreise. Dabei berandet jeder trennende Kreis genau ein Land.*

Beweis von Lemma 5.5.2. Wir beweisen zuerst die Vorwärtsrichtung. Sei dazu L ein Land von G und wir beweisen, dass L ein nicht trennender Kreis ist. L ist durch ein Polygon berandet, da G ansonsten entweder gar nicht zusammenhängend ist, oder eine Artikulation besitzt. Dieses Polygon ist ein Kreis C des ebenen Graphen G.

Hätte C eine Sehne von einem Knoten x zu einem Knoten y, so verliefe diese nicht durch L, damit also durch das einzige andere Land L' von C (vgl. Jordanscher Kurvensatz). Da G keine Mehrfachkanten besitzt, liegt auf beiden xy-Wegen von C je ein weiterer Knoten. Diese Knoten seien u und v. Jeder Weg von u nach v vermeidet L'. Nach dem Drei-Wege-Lemma müssen alle Wege von u nach v in G damit über x oder über y verlaufen. Damit wäre G aber nicht dreifach zusammenhängend, da $\{x, y\}$ ein Zweitrenner von G ist.

Also hat C keine Sehne in G.

Damit genügt es zu zeigen, dass $G - C$ zusammenhängend ist. Seien also nun x und y Knoten von $G - C$. Da G dreifach zusammenhängend ist, gibt es drei xy-Wege P_1, P_2 und P_3, die nach dem Drei-Wege-Lemma die Ebene in drei Gebiete zerlegt. Da L ein Land von G ist, muß es vollständig in einem dieser drei Gebiete liegen, sagen wir o.B.d.A. in dem von $P_1 \cup P_2$ berandeten. Damit ist aber P_3 disjunkt zu C und wir haben gezeigt, dass x und y in der gleichen Komponente von $G - C$ liegt. Also hat aber $G - C$ in der Tat nur eine Komponente.

Nun beweisen wir die Rückwärtsrichtung. Sei C dazu ein nicht trennender Kreis von G. Dann hat G genau ein Gespinst an C (Beachte: Kreise sind nie dreifach zusammenhängend) und dieses ist in genau ein Land von C eingebettet. Das andere Land von C ist also auch Land von G. Die letzte Aussage des Satzes folgt auch aus dieser Überlegung. $\square$

Nun sind wir bereit für den Beweis von Satz 5.5.1:

Beweis von Theorem 5.5.1. Da wir die Gebiete bijektiv auf ihren Rändern zugeordnet und diese Ränder als die nicht trennenden Kreise identifiziert haben, können wir den Multigraphen, der isomorph zum Dualen jeder ebenen Einbettung eines planaren Graphen ist (vgl. Abschnitt 5.4) konstruieren, ohne Bezug auf die konkrete Einbettung nehmen zu müssen. Die Aussage des Satzes folgt. $\square$

5.6 Satz von Euler

Wir wollen nun eine grundlegende kombinatorische Eigenschaft ebener Graphen kennenlernen:

Theorem 5.6.1 (Euler, 1758) *Sind n, e und f die Anzahlen der Knoten, Kanten und Gebiete eines zusammenhängenden ebenen Graphen, so gilt:*

$$n - e + f = 2$$

Wir beweisen eine einfache Verallgemeinerung dieses Satzes

Theorem 5.6.2 *Sind n, e, f und c die Anzahlen der Knoten, Kanten, Länder und Komponenten eines zusammenhängenden ebenen Graphen G, so gilt:*

$$n - e + f - c = 1$$

Beweis von Theorem 5.6.2. Wir verwenden Induktion nach Anzahl der Kanten von G. Hat G keine Kanten, so haben wir $c = n$, $f = 1$ und $e = 0$, also $n - e + f - c = n - 0 + 1 - n = 1$. Für solche Graphen gilt Theorem 5.6.2 also.

Sei im Induktionsschritt p eine Kante von G. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Ist p eine Brücke, so hat der Graph $G - p$ immer noch n Knoten und f Länder, aber $e - 1$ Kanten und $c + 1$ Komponenten. Induktionsvoraussetzung für $G - p$ liefert also $1 = n - (e - 1) + f - (c + 1) = n - e + f - c$ was den Beweis in diesem Falle abschließt.

Ist p hingegen keine Brücke, so hat der Graph $G - p$ immer noch n Knoten und c Komponenten, aber $e - 1$ Kanten und $f - 1$ Länder. Induktionsvoraussetzung für $G - p$ liefert also $1 = n - (e - 1) + (f - 1) - c = n - e + f - c$. Damit ist auch der Induktionsschluss in jedem Falle geglückt und mithin das Theorem bewiesen. □

5.7 Schranken der Planarität

Theorem 5.7.1 *Ist G ein (schlichter) planarer Graph mit mindestens drei Knoten, so gilt $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$. Falls G keine Dreiecke besitzt, folgt sogar $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.*

Beweis von Theorem 5.7.1. Wir können uns auf zusammenhängende ebene Graphen zurückziehen, da wir Komponenten durch zusätzliche Kanten verbinden können, ohne die Planarität zu gefährden, und das Einbetten die betrachteten Anzahlen nicht ändert. Des weiteren überzeugen wir uns, dass für Dualgraphen G^* von G im ersten Fall $\delta(G^*) \geq 3$ und im zweiten Falle $delta(G^*) \geq 4$ gilt. Mit n bezeichnen wir wieder die Knotenzahl von G, mit e die Kantenzahl von G (also auch die von G^*) und mit f die Zahl der Länder von G (also die Zahl der Knoten von G^*)

Zweifaches Abzählen der Kanten im Dualgraphen liefert also im ersten Fall:

$$2e = \sum_{v \in V(G^*)} val_{G^*}(v) \geq 3f$$

Damit erhalten wir $f \leq \frac{2}{3}e$ und mit dem Eulerschen Polyedersatz $2 = n - e + f \leq n - \frac{e}{3}$ was nach Umstellen nach e die gewünschte Ungleichung liefert.

Im zweiten Fall liefert zweifaches Abzählen der Kanten im Dualgraphen:

$$2e = \sum_{v \in V(G^*)} val_{G^*}(v) \geq 4f$$

Damit erhalten wir $f \leq \frac{e}{2}$ und mit dem Eulerschen Polyedersatz $2 = n - e + f \leq n - \frac{e}{2}$ was nach Umstellen nach e wiederum die gewünschte Ungleichung liefert. □

Anwendungsbeispiel: Betrachtet man den $K_{3,3}$ oder den K_5, so stellt man jeweils fest, dass die beiden Graphen jeweils zu viele Kanten haben, um Planar zu sein.