Graphentheorie

1. Erstellen Sie eine Übersicht über die bisher bewiesenen Sätze!

2. Zeigen Sie, dass der Petersen-Graph keinen aufspannenden Kreis (Hamiltonkreis) hat!

3. Die Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ eines Graphen G ist die maximale Knotenanzahl, die ein kantenloser induzierter Untergraph von G haben kann. Zeigen Sie: $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$.

4. Wenn $\chi(H) < k = \chi(G)$ für jeden Untergraphen von G verschieden von G gilt, dann nennen wir G farbkritisch bzw. k-kritisch. Beweisen Sie: Wenn G frabkritisch ist, so ist die chromatische Zahl höchstens $\delta(G) - 1$, wobei $\delta(G)$ die Minimalvalenz von G ist.

5. Beweisen Sie, dass gilt: $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq |V(G)| + 1$. Dabei ist $\bar{G}$ der Komplementärgraph zu G, also der Graph $\left(V(G), \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)\right)$.

6. Der Greedy-Färbealgorithmus verläuft wie folgt: Färbe den Graphen Knoten für Knoten und nutze die in jedem Schritt die Farbe mit der kleinsten Nummer, die nicht schon in der Nachbarschaft des zu färbenden Knoten vorkommt!

   Beweisen Sie, dass es für jeden Graphen eine Reihenfolge der Knoten so gibt, dass der Greedy-Färbealgorithmus mit $\chi(G)$ Farben auskommt!

7. Konstruieren Sie für jedes natürliche k einen Baum T_k mit Maximalvalenz k und einer Ordnung σ seiner Knoten so, dass der Greedy-Färbealgorithmus bei Abarbeitung mit Knotenreihenfolge σ genau $k + 1$ Farben benutzt!